УДК 681.518.3

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОСТРОЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДОВ К ОЦЕНКЕ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В РАЗЛИЧНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ БАЗИСАХ

© 2014 С.А. Прохоров, Я.В. Соловьева

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 17.12.2013

Приводятся и анализируются результаты построения ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик при применении аппроксимативного и численно-аналитического подхода к оценке коэффициентов разложения в базисах Бесселя, Лагерра, Якоби, Лежандра, Сонина-Лагерра, Дирихле.

Ключевые слова: ортогональная модель, корреляционно-спектральные характеристики, коэффициенты разложения.

Построение моделей корреляционных функций (КФ) и спектральных плотностей мощности (СПМ) нередко осуществляется при помощи ортогональных базисов. В настоящее время при построении ортогональных моделей функциональных характеристик используются, как правило, ортогональные многочлены Лагерра, Лежандра, Якоби, Дирихле. Это связано с тем, что они хорошо изучены и имеют явное аналитическое представление. Выбор ортогонального базиса является одной из важных и сложных задач, от правильного решения которой будет зависеть точность полученных результатов. В работе [1] предложено решение задачи построения моделей корреляционно-спектральных характеристик с использованием ортогональных функций Бесселя первого рода нулевого порядка в качестве системы базисных функций.

Идея применения данных функций в качестве ортогонального базиса при решении задач аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа случайных процессов возникла в связи с широким применением функций Бесселя в различных областях математической физики, прикладной математики, оптики и обработки сигналов, что обусловлено рядом свойств, которыми они обладают, в том числе способностью точно приближать различные функциональные зависимости, и, в особенности, затухающие колебательные процессы.

В ходе проведения исследований выяснилось, что ортогональные функции Бесселя имеют выгодные аппроксимативные возможности по сравнению с ранее изученными системами базисных функций, а их применение в качестве базисных функций дает возможность повысить точность построения ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик стационарных случайных процессов[1].

Ортогональные функции Бесселя дают наилучшие результаты при построении моделей КФ колебательного вида, постепенно затухающих на интервале существования. Это связано с тем, что уже первые взвешенные ортогональные функции Бесселя наиболее близко, по сравнению с другими базисными функциями, совпадают с формой анализируемых КФ этого класса, что обеспечивает допустимую погрешность аппроксимации при её минимальной глубине.

При построении ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик выделяют несколько алгоритмов оценки коэффициентов разложения, основные из которых: аппроксимативный[2], спектрально-аналитический[3], численно-аналитический подход[4]. Каждый из данных подходов имеет достоинства и недостатки.

Достоинствами построения ортогональных моделей с помощью аппроксимативного подхода являются [2]:

1) сокращение объема хранимых данных;

2) заданные алгоритмы и структура определения параметров модели;

3) наглядность и компактность полученного аналитического выражения, легкость визуализации;

4) возможность использования аналитического выражения для дальнейших аналитических исследований и преобразований с целью получения обобщенных вероятностных характеристик.

В качестве недостатка можно отметить невоз-

Прохоров Сергей Антонович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных систем и технологий. E-mail: sp@smr.ru
Соловьева Яна Владимировна, кандидат технических наук, ассистент кафедры информационных систем и технологий. E-mail: yanka58@yandex.ru

можность построения ряда с требуемой точностью и произвольным числом членов ряда вследствие вычислительных погрешно-стей.

Достоинствами спектрально-аналитического метода являются[3]:

1) снижение временных затрат при оценке коэффициентов разложения и построении ортогональных рядов;

2) уменьшение объема вычислительных операций при оценке коэффициентов разложения и построении ортогональных рядов.

Недостатком является проведение операций с оценками, предполагающими наличие погрешностей, в том числе случайных, т.к. коэффициенты разложения не могут быть рассчитаны точно, особенно при построении моделей случайных функций (оценок корреляционных и спектральных характеристик).

Достоинствами аналитического подхода являются [4]:

1) снижение временных и ресурсных затрат на получение конечного результата;

2) повышение точности оценки корреляционно-спектральных характеристик ортогональных рядов.

К недостатку можно отнести невозможность использования некоторых ортогональных базисов в качестве математического аппарата из-за отсутствия их аналитического представления.

Учитывая достоинства и недостатки данных методов, в данной работе рассмотрено развитие аппроксимативного подхода к построению ортогональных моделей путем добавления нового ортогонального базиса Бесселя в перечень функций, уже используемых в аппроксимативном анализе случайных процессов.

Учитывая описанные выше положения, проведем сравнение алгоритмов оценки коэффициентов разложения при применении численного подхода в базисах Лагерра, Лежандра, Дирихле; численно-аналитического подхода в базисах Лагерра, Якоби, численного подхода в базисе Бесселя.

В качестве примера рассмотрим задачу построения модели КФ идеального полосового шума:

$$f(\tau) = \frac{\sin(\Delta\omega_e \tau)}{\Delta\omega_e \tau} \cdot \cos(\omega_0 \tau). \qquad (1)$$

Построим модель КФ (1) с применением выбранных подходов к оценке корреляционно-спектральных характеристик в различных ортогональных базисах для $\Delta\omega_e = 0.5, \omega_0 = 5$ со следующими данными: интервал дискретизации $\Delta\tau = 0.09$, число ординат КФ $N = 300$, число членов разложения ряда $m = 150$.

В табл. 1 приведены значения параметра масштаба γ и значения погрешности построения модели КФ (1) $\delta = \Delta \Big/ \int_0^\infty \left(f(t)\right)^2 \cdot \mu(\tau,\gamma)\, dt$.

Из таблицы видно, что наилучший результат аппроксимации получен в ортогональном базисе Бесселя. Наиболее близкий результат получен в ортогональном базисе Лагерра с применением численно-аналитического подхода.

На рис. 1 представлена графическая интерпретация результатов построения модели КФ (1) в различных ортогональных базисах при применении различных методик построения.

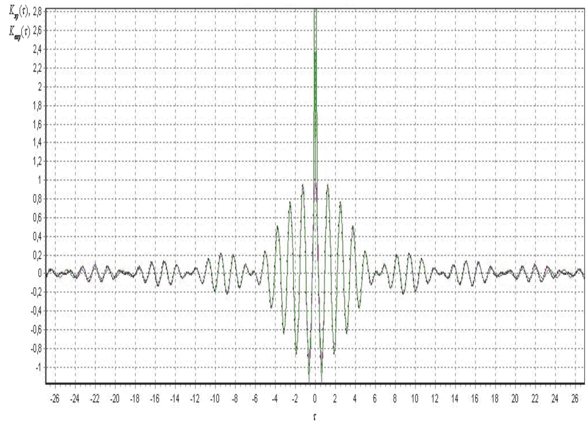
Из рисунка видно, что на графике результатов аппроксимации в базисе Бесселя отсутствует “выброс” в нулевой точке, а также наблюдается более точное приближение исходной КФ на всем интервале её существования, что, в особенности, заметно на “хвостах”.

Далее рассмотрим задачу построения модели КФ вида:

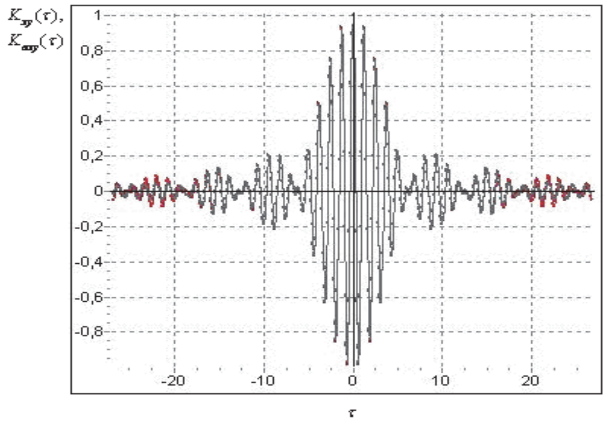
$$f(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cdot \cos(\omega_0 \tau) \qquad (2)$$

Таблица 1. Количественная оценка результатов построения модели КФ(3.34) с применением различных подходов к оценке корреляционно-спектральных характеристик в различных ортогональных базисах

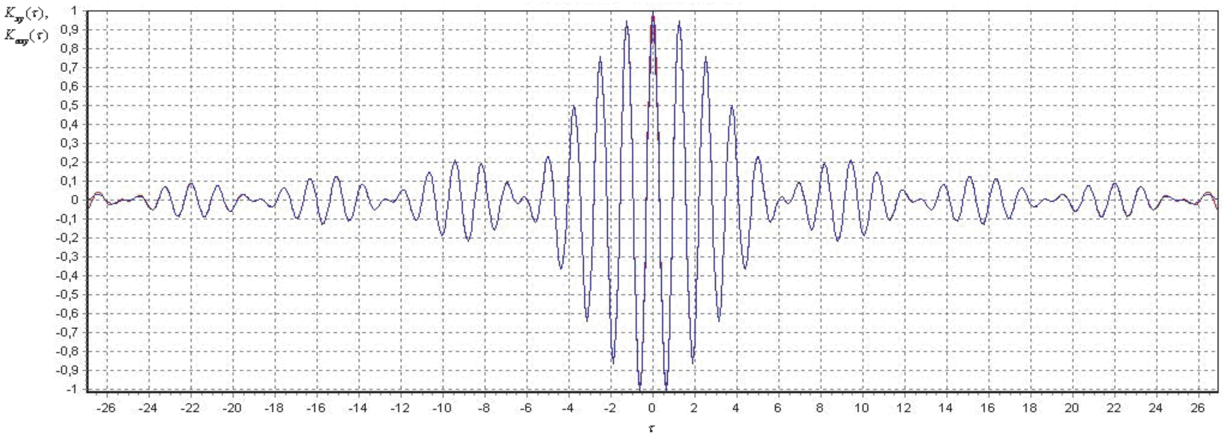
Ортогональный базис и тип подхода	Значение параметра масштаба γ	Погрешность аппроксимации δ
Бесселя, численный	0,029	0,04867
Лагерра, численный	0,897	0,20476
Лежандра, численный	0,003	0,22425
Дирихле, численный	0,006	0,23729
Лагерра, численно-аналитический	4,444	0,06852
Лежандра, численно-аналитический	0,015	0,09338
Якоби (-0,5;0), численно-аналитический	0,015	0,09356
Якоби (0,5;0), численно-аналитический	0,015	0,09329
Якоби (1;0), численно-аналитический	0,029	0,09328
Якоби (2;0), численно-аналитический	0,015	0,09336
Сонина-Лагерра (1;1), численно-аналитический	4,444	0,2003
Сонина-Лагерра (2;1), численно-аналитический	4,444	0,3514



а)



б)



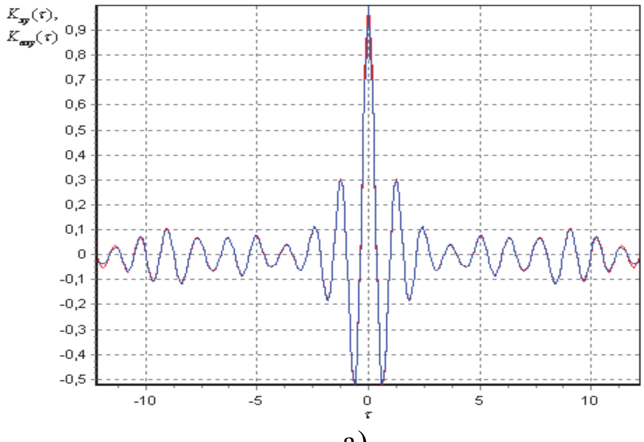
в)

Рис. 1. Вид моделей КФ:
а) в ортогональном базисе Лагерра при применении численного подхода;
б) в ортогональном базисе Лагерра при применении численно-аналитического подхода;
в) в ортогональном базисе Бесселя при применении численного подхода

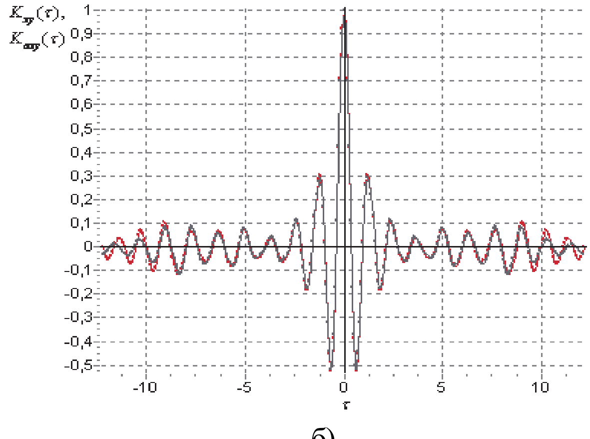
с применением выбранных подходов при небольшой глубине аппроксимации для $\omega_0/\alpha = 5$ со следующими данными: интервал дискретизации $\Delta\tau = 0{,}08165$, число ординат КФ $N = 150$, число членов разложения ряда $m = 71$.

Построение модели будем проводить с использованием алгоритмов оценки коэффициентов разложения при применении численного подхода в базисе Бесселя и численно-аналитического подхода в базисах Лагерра, которые показали лучшие результаты в предыдущем эксперименте.

На рис. 2 представлена графическая интер-

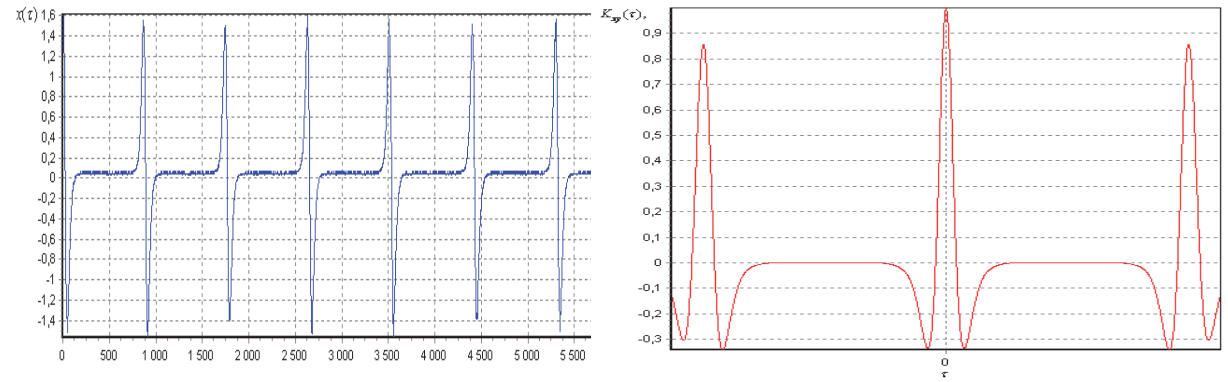


а)



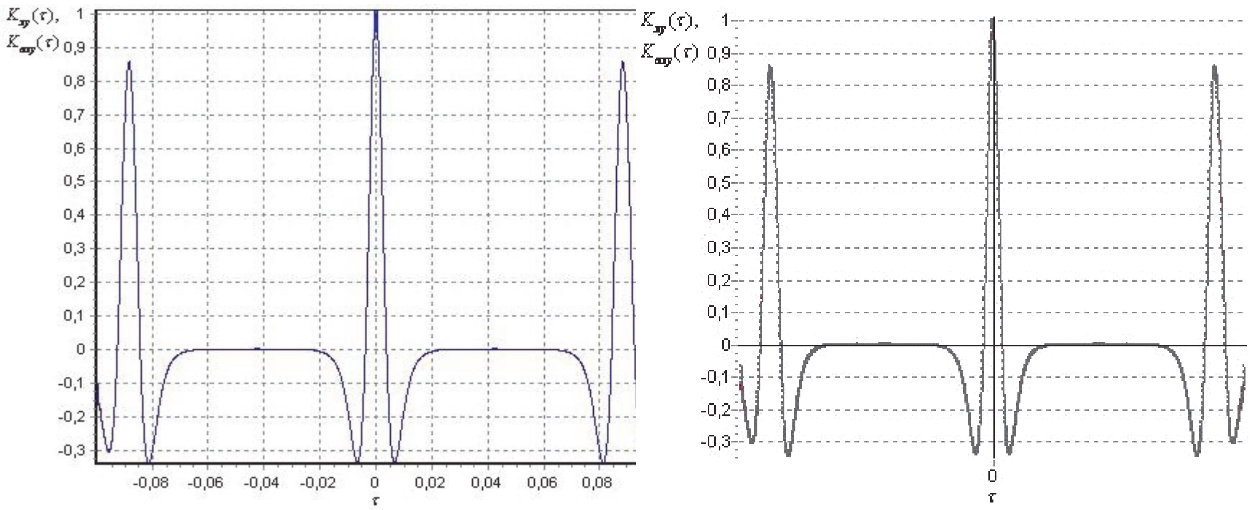
б)

Рис. 2. Вид моделей КФ:
а) в ортогональном базисе Бесселя при применении численного подхода, погрешность аппроксимации $\delta = 0{,}0762$; б) в ортогональном базисе Лагерра при применении численно-аналитического подхода, погрешность аппроксимации $\delta = 0{,}1115$



а) б)

Рис. 3. Вид анализируемых характеристик: а) входной сигнал; б) КФ, соответствующая сигналу



а) б)

Рис. 4. Вид моделей КФ:

а) в ортогональном базисе Бесселя при применении численного подхода, погрешность аппроксимации $\delta = 0{,}0139$;
б) в ортогональном базисе Лагерра при применении численно-аналитического подхода,
погрешность аппроксимации $\delta = 0{,}0147$

претация результатов построения модели КФ (2)в ортогональном базисе Бесселя с параметрами $\gamma = 0{,}0708$ и $m = 71$ при применении численного алгоритма (погрешность аппроксимации $\delta = 0{,}0762$) и в ортогональном базисе Лагерра с параметрами $\gamma = 4{,}899$ и $m = 71$ при применении численно-аналитического алгоритма (погрешность аппроксимации $\delta = 0{,}1115$).

Лучший результат аппроксимации по параметру “относительная погрешность аппроксимации” получен в ортогональном базисе Бесселя.

Применение ортогональных функций Бесселя в качестве базисных при построении ортогональных моделей обеспечивает удовлетворение заданной точности аппроксимации не только для описанного выше класса КФ. Это связано с тем, что в формулу, задающую ортогональные функции Бесселя, входит параметр масштаба, изменение которого может заметно менять их свойства. Параметр масштаба в случае ортогональных функций Бесселя входит даже в выражение для весовой функции, что позволяет практически всегда согласовывать форму взвешенных ортогональных функций с формой поступающих на обработку КФ.

В качестве примера, подтверждающего сказанное, приведем результаты построения модели КФ сигнала, приведенного на рисунке 3 с числом ординат *N=1000* и числом членов разложения ряда *m=500.*

На рис. 4 приведены модели данной КФ в ортогональном базисе Бесселя с параметрами $\gamma = 7{,}9840$ и $m = 500$ при применении численного алгоритма (погрешность аппроксимации $\delta = 0{,}0139$) и в ортогональном базисе Лагерра с параметрами $\gamma = 4000$ и $m = 500$ при применении численно-аналитического алгоритма (погрешность аппроксимации $\delta = 0{,}0147$).

Лучший результат аппроксимации по параметру “относительная погрешность аппроксимации” получен в ортогональном базисе Бесселя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соловьева Я.В.* Методы, алгоритмы и комплекс программ аппроксимативного-корреляционно-спектрального анализа в ортогональном базисе Бесселя: Дисс. ... канд. техн. наук: 05.13.18: защищена 27.06.2013: утв. 21.10.2013. Самара,2013. 116 с.
2. *Прохоров С.А.* Аппроксимативный анализ случайных процессов. 2-е изд., перераб. и доп. Самара: СНЦ РАН, 2001. 380 с.
3. Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. Задачи анализа изображений и распознавания образов/ *Ф.Ф. Дедус, С.А. Махортых, М.Н. Устинин, А.Ф. Дедус.* М.: Машиностроение, 1999.- 357 с.
4. *Прохоров С.А. Куликовских И.М.* Численно-аналитический подход к вычислению интегралов при построении ортогональных моделей // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2009. №2(19). С.140-146.

THE COMPARATIVE ANALYSIS OF ORTHOGONAL MODELS CREATION RESULTS IN CASE OF DIFFERENT APPROACH APPLICATIONS TO THE ASSESSMENT OF CORRELATIVE SPECTRAL CHARACTERISTICS IN DIFFERENT ORTHOGONAL BASES

© 2014 S.A. Prokhorov, Y.V. Solovyova

Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov
(National Research University)

The results of orthogonal models of correlative spectral characteristics creation are brought and analyzed in case of approximate and analytics-numerical approach application to an assessment of expansion coefficients in the bases of Bessel, Laguerre, Jacobi, Legendre, Sonin-Laguerre, Dirichlet.

Key words: orthogonal model, correlation and spectral characteristics, coefficients of decomposition.

SergeyProkhorov, Doctor of Technics, Professor, Head of Information Systems and Technologies Department.
E-mail: sp@smr.ru
Yana Solovyova, Candidate of Technics, Assistant of Information Systems and Technologies Department.
E-mail: yanka58@yandex.ru