УДК 519.9+534.01

# АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

© 2014 Ю.М. Заболотнов, А.А. Лобанков

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 17.12.2013

Разработана методика построения приближенно-оптимальных управлений для колебательных динамических систем с несколькими степенями свободы. Проведен аналитический расчет приближенно-оптимального регулятора для колебательной системы с двумя степенями свободы

Ключевые слова: колебательные системы, динамическое программирование, метод усреднения, устойчивость, приближенно-оптимальное управление.

Целью работы является разработка метода синтеза оптимального регулятора для колебательной системы с двумя степенями свободы, описывающей малые колебания относительно ее программного движения или состояния покоя. Для решения данной задачи используются принцип динамического программирования Беллмана и теория аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) Летова [1]. Рассматриваемые методы предлагается использовать совместно с методом усреднения [2]. Такой подход позволяет понизить размерность задачи и, тем самым, значительно упростить ее решение.

Рассматриваются колебательные системы, поведение которых описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A\frac{d^2x}{dt^2}+C\,x=\varepsilon\,Q\left(x,\frac{dx}{dt}\right)+\varepsilon\,m\,u, \quad (1)$$

где $x$ – $n$-мерный вектор переменных состояния системы, $A$ и $C$ – известные квадратные симметричные матрицы, $\varepsilon$ – малый параметр задачи, $Q\left(x,\frac{dx}{dt}\right)$ – вектор-функция возмущений, действующих на систему; $m$ – матрица, определяющая структуру управляющего устройства в конкретной задаче; $u$ – скалярное управление.

Предполагается, что для системы (1) выполнены условия управляемости и наблюдаемости [3].

Решается задача определения оптимального управления системой (1) $u^0$ с целью демпфирования колебаний, то есть решается задача о переводе системы в начало координат. Причем оптимальность управления $u$ понимается в смысле минимума квадратичного функционала

$$J=\varepsilon\int_0^{t_k}\left(K^T a\,K+cu^2\right)dt, \quad (2)$$

где $a$ - положительно определенная матрица весовых коэффициентов для ошибок управления, $\tilde{n}>0$ – весовой коэффициент для управления, $K$ – вектор амплитуд колебаний, $\left(^T\right)$ – знак транспонирования, $t_k$ – время перехода.

Применение метода усреднения к системе (1) предполагает замену переменных в этой системе в соответствии с формулами

$$x=\sum_{i=1}^{n}K_iV^{(i)}\cos(\varphi_i),$$

$$\frac{dx}{dt}=-\sum_{i=1}^{n}K_i\omega_iV^{(i)}\sin(\varphi_i), \quad (3)$$

где $\varphi$ - вектор фаз колебаний.

Применяя стандартную процедуру перехода к переменным “амплитуды – фазы”, получим дифференциальные уравнения для новых переменных

$$\frac{dK}{dt}=\varepsilon\,X(K,\varphi)+\varepsilon Y(\varphi)\,u, \quad (4)$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega+\varepsilon\,\Phi(K,\varphi)+\varepsilon\,\Psi(K,\varphi)u, \quad (5)$$

где вид функций известен.

Согласно принципу динамического программирования Беллмана, сформулированному для непрерывных динамических систем, оптимальное управление определяется из условия [1]

*Заболотнов Юрий Михайлович, доктор технических наук, профессор. E-mail: yumz@yandex.ru.*
*Лобанков Антон Алексеевич, аспирант.*
*E-mail: mart1989@mail.ru*

$$\min_u \left[ \begin{array}{l} \varepsilon\left(K^T a K + c u^2\right) + \left(\dfrac{\partial W}{\partial K}\right)^T \dfrac{dK}{dt} + \\ + \left(\dfrac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^T \dfrac{d\varphi}{dt} \end{array} \right] = 0, \quad (6)$$

где $W(K, \varphi)$ – производящая функция.

Подставляя систему (4), (5) в условие (6) и собирая вместе слагаемые, зависящие от управления, получим функцию

$$\mathrm{H}(u) = \varepsilon c u^2 + \\ + \varepsilon u \left[ \left(\frac{\partial W}{\partial K}\right)^T Y(\varphi) + \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^T \Psi(K, \varphi) \right]. \quad (7)$$

Из условия минимума этой функции $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$ нетрудно определить оптимальное управление

$$u^0 = -\frac{1}{2c} \left[ \begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial W}{\partial K}\right)^T Y(\varphi) + \\ + \left(\dfrac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^T \Psi(K, \varphi) \end{array} \right]. \quad (8)$$

Оптимальное управление $u^0$ найдено с точностью до производящей функции $W(K, \varphi)$. Для определения дифференциального уравнения для этой функции необходимо подставить выражение (8) в условие (6), тогда

$$\varepsilon K^T a K + \varepsilon \left(\frac{\partial W}{\partial K}\right)^T X(K, \varphi) + \\ + \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^T [\omega + \varepsilon \Phi(K, \varphi)] - \\ - \frac{\varepsilon}{4c} \left[ \left(\frac{\partial W}{\partial K}\right)^T Y(\varphi) + \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^T \Psi(K, \varphi) \right]^2 = 0. \quad (9)$$

Для решения уравнения (9) предлагается применить метод усреднения, который заключается в поиске решения в виде асимптотических рядов. Подставляя известные формулы метода усреднения в уравнение (9) и усредняя это уравнение по фазам $\varphi_i^0$ ($i = 1, \ldots n$) и удерживая слагаемые только порядка $\varepsilon$, получим

$$(K^0)^T a K^0 + \frac{\partial W_0}{\partial K^0} \cdot \left\langle X\left(K^0, \varphi^0\right) \right\rangle - \\ - \frac{1}{4c} \left\langle \left[ \left(\frac{\partial W_0}{\partial K^0}\right)^T Y\left(\varphi^0\right) \right]^2 \right\rangle = 0. \quad (10)$$

где оператор $\langle \ldots \rangle$ есть стандартный оператор усреднения.

Уравнение (10) существенно проще исходного уравнения (9), так как слагаемые в него входящие зависят только от амплитуд и не зависят от фаз, причем, то же самое справедливо и для производящей функции $W_0\left(K^0\right)$.

Для обеспечения динамической устойчивости точки равновесия колебательной системы $x = \dfrac{dx}{dt} = 0$ функция $W_0\left(K^0\right)$, удовлетворяющая уравнению (10), должна быть положительно определенной. В этом случае функцию $W_0\left(K^0\right)$ можно рассматривать как функцию Ляпунова, обеспечивающую устойчивость решения $K^0 = 0$ для усредненной системы [4].

Здесь надо отметить, что с учетом соотношений (8) и (10) оптимальное управление в первом приближении можно записать в виде

$$u^0 = -\frac{1}{2c} \left[ \left(\frac{\partial W_0}{\partial K^0}\right)^T Y\left(\varphi^0\right) \right] + \varepsilon \ldots, \quad (11)$$

то есть слагаемые пропорциональные $\varepsilon$ можно не учитывать, так как при подстановке (11) в уравнение для амплитуд (4) эти члены изменяют только второе приближение метода усреднения.

Рассмотрим колебательную систему в форме (1) с двумя степенями свободы при наличии линейных возмущений, т.е когда $n = 2$ и $Q = R\dfrac{dx}{dt}$. Усреднение двухчастотной системы позволяет представить результаты анализа колебаний в наглядной форме с помощью метода фазовой плоскости в координатах $\left(K_1^0, K_2^0\right)$[5].

Из приближенного уравнения для производящей функции $W_0\left(K^0\right)$ следует, что для ее определения в первом приближении достаточно рассмотреть только уравнения амплитуд (4). Эти уравнения для случая $n = 2$ имеют вид

$$\frac{dK_1}{dt}=-\varepsilon\left[N_4\left(Q_1+m_1u\right)-N_2\left(Q_2+m_2u\right)\right]\cdot \cdot\sin\varphi_1. \tag{12}$$

$$\frac{dK_2}{dt}=\varepsilon\left[N_3\left(Q_1+m_1u\right)-N_1\left(Q_2+m_2u\right)\right]\cdot \cdot\sin\varphi_2. \tag{13}$$

где $N_1=\dfrac{A_{11}+A_{12}\chi_1}{\omega_2\left(\chi_2-\chi_1\right)\left(A_{11}A_{22}-A_{12}^2\right)}$,

$$N_2=\frac{A_{11}+A_{12}\chi_2}{\omega_1\left(\chi_2-\chi_1\right)\left(A_{11}A_{22}-A_{12}^2\right)},$$

$$N_3=\frac{A_{12}+A_{22}\chi_1}{\omega_2\left(\chi_2-\chi_1\right)\left(A_{11}A_{22}-A_{12}^2\right)},$$

$$N_4=\frac{A_{12}+A_{22}\chi_2}{\omega_1\left(\chi_2-\chi_1\right)\left(A_{11}A_{22}-A_{12}^2\right)}.$$

Здесь матрица собственных векторов невозмущенной системы представлена в виде $V=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \chi_1 & \chi_2\end{pmatrix}$, где $\chi_{1,2}$ – коэффициенты форм колебаний. Полное преобразование к переменным “амплитуды – фазы” для двухчастотной системы вида (1) приводится в [5].

После перехода к переменным “амплитуды-фазы”, формула для определения управления примет вид

$$U^0=\frac{1}{c}A_{11}\cdot K_1^0(N_4\cdot m_1-N_2\cdot m_2)\sin(\varphi_1)- -\frac{1}{c}A_{22}\cdot K_2^0(N_3\cdot m_1-N_1\cdot m_2)\sin(\varphi_2), \tag{14}$$

где коэффициенты $A_{11}$ и $A_{22}$ будут положительными корнями уравнений

$$b_{11}-A_{11}\cdot\omega_1\cdot(-N_4\cdot\mu_{11}-N_4\cdot\mu_{12}\cdot\chi_1+ +N_2\cdot\mu_{21}+N_2\cdot\mu_{22}\cdot\chi_1)- -\frac{1}{2c}A_{11}{}^2(N_4\cdot m_1-N_2\cdot m_2)^2=0, \tag{15}$$

$$b_{22}-A_{22}\cdot\omega_2\cdot(N_3\cdot\mu_{11}+N_3\cdot\mu_{12}\cdot\chi_2- -N_1\cdot\mu_{21}-N_1\cdot\mu_{22}\cdot\chi_2)- -\frac{1}{2c}A_{22}{}^2(N_4\cdot m_1-N2\cdot m_2)^2=0, \tag{16}$$

полученных путем подстановки функции Ляпунова $W_0\left(K^0\right)$ в уравнение (10) и приравнивании к нулю коэффициентов при $K_1^2$, $K_2^2$, $K_1K_2$, а коэффициенты $\mu_{11}$, $\mu_{12}$, $\mu_{21}$, $\mu_{22}$ определяются из вида возмущающей функции $Q$. Нетрудно показать, что $A_{12}=0$. При использовании положительных корней уравнений (15), (16) для $A_{11}$ и $A_{22}$ будут выполняться условия Сильвестра, что обеспечивает асимптотическую устойчивость усредненной системы.

В итоге усредненная система примет вид

$$\begin{aligned}\frac{dK_1^0}{dt}&=-\frac{\varepsilon}{2}A_{11}\cdot K_1^0\,\frac{(N_4\cdot m_1-N_2\cdot m_2)^2}{c},\\ \frac{dK_2^0}{dt}&=-\frac{\varepsilon}{2}A_{22}\cdot K_2^0\,\frac{(N_3\cdot m_1-N_1\cdot m_2)^2}{c}.\end{aligned} \tag{17}$$

Учитывая, что

$$K_1\sin(\varphi_1)=\frac{-\chi_2}{\omega_1\left(\chi_2-\chi_1\right)}\dot{x}_1+ +\frac{1}{\omega_1\left(\chi_2-\chi_1\right)}\dot{x}_2,$$

$$K_2\sin(\varphi_2)=\frac{\chi_1}{\omega_2\left(\chi_2-\chi_1\right)}\dot{x}_1- -\frac{1}{\omega_2\left(\chi_2-\chi_1\right)}\dot{x}_2,$$

запишем управление в исходных координатах

$$U^0=p_1\dot{x}_1+p_2\dot{x}_2, \tag{18}$$

где коэффициенты

$$p_1=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\chi_2}{\omega_1\left(\chi_2-\chi_1\right)}A_{11}\cdot(N_4\cdot m_1-N_2\cdot m_2) --\frac{1}{c}\cdot\frac{\chi_1}{\omega_2\left(\chi_2-\chi_1\right)}A_{22}\cdot(N_3\cdot m_1-N_1\cdot m_2)$$

$$p_2 = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\omega_1(\chi_2 - \chi_1)} A_{11} \cdot (N_4 \cdot m_1 - N_2 \cdot m_2) +$$
$$+ \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\omega_2(\chi_2 - \chi_1)} A_{22} \cdot (N_3 \cdot m_1 - N_1 \cdot m_2).$$

Таким образом, применение метода усреднения в сочетании с методом динамического программирования Беллмана позволило получить аналитическое решение (18) для оптимального управления системой (1).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 360 с..
2. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
3. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
4. *Хапаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости. М.: Наука, 1986. 191с.
5. *Заболотнов Ю.М.* Теория колебаний. Самара: СГАУ, 1999. 168 с.


## ANALYTICAL METHOD OF CALCULATING REGULATOR FOR THE OSCILLATORY SYSTEM WITH TWO DEGREES OF FREEDOM


© 2014 Yu.M. Zabolotnov, A.A. Lobankov

Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolev
(National Research University)



The technique of construction of approximately-optimum controls is developed for oscillatory dynamic systems with several degrees of freedom. Analytical calculation of an approximately-optimum regulator for oscillatory system with two degrees of freedom is carried out.



*Keywords:* oscillatory systems, dynamic programming, method of averaging, stability, optimal control.



*Yurii Zabolotnov, Doctor of Technical Sciences, Professor.*
*E-mail: yumz@yandex.ru*
*Anton Lobankov, Graduate Student. E-mail: mart1989@mail.ru*