УДК 62.534(031)

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МАЯТНИКА НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ОСНОВАНИИ

© 2014 С.П. Безгласный, Н.И. Кутырева

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 01.07.2014

Решена задача о построении асимптотически устойчивых произвольных программных движений маятника переменной длины на вращающемся основании. Управление получено в виде точного аналитического решения в классе непрерывных функций. Задача решена на основе прямого метода Ляпунова и метода предельных систем, позволяющего использовать функции Ляпунова со знакопостоянными производными.

Ключевые слова: программные движения, стабилизация, метод функций Ляпунова, предельные системы.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи по реализации управляемых пространственных движений механической системы имеют важное прикладное значение и широко рассматриваются авторами во многих работах, например [1–4]. В данной работе ставится и решается задача об управлении произвольно заданными неавтономными движениями маятника на вращающемся основании. Изучение движений маятников и маятниковых систем обнаруживает много качественных свойств динамики нелинейной системы и вызывает как самостоятельный интерес у современных исследователей, так и в прикладных задачах, когда плоские движения исследуемых систем и объектов при различных упрощениях моделируют математическим маятником. Так, например, в работе [5] изучены бифуркации равновесий и исследованы резонансы в задаче о колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании при больших частотах вибраций и малых амплитудах колебаний длины маятника и точки его подвеса. В [6] при помощи КАМ-теории проанализированы условно-периодические движения системы в задаче о движении двух одинаковых маятников, связанных линейной упругой пружиной, в окрестности их устойчивого вертикального положения равновесия. В работе [7] рассмотрена задача об управлении движением маятника переменной длины, являющегося двухмассовой моделью качелей, и ее авторами исследованы вопросы устойчивости, неустойчивости и стабилизации верхнего и нижнего положений. В [8] с помощью закона управления подвижной массой по принципу качелей, решены задачи о диаметральной переориентации и гравитационной стабилизации плоских движений спутника на круговой орбите.

Безгласный Сергей Павлович, кандидат физико-математических наук, доцент, докторант.
E-mail: bezglasnsp@rambler.ru
Кутырева Наталия Игоревна, студентка.
E-mail: kutyreva@gmail.com

В данной работе исследуется динамика неавтономных управляемых движений маятника на вращающемся основании. Похожая модель исследовалась в работе [9], в которой были выделены и изучены свойства управляемости только стационарных движений. Авторами этой работы построено многообразие программных и стабилизирующих управлений, реализующих асимптотически устойчивые произвольно заданные неавтономные движения маятника. Исследование программного движения сводится к анализу нулевого решения неавтономной системы уравнений возмущенного движения и проводится на основе прямого метода Ляпунова [1]. Использование метода предельных систем [10] позволяет при построении функций Ляпунова со знакопостоянными производными получить искомое управление в замкнутой аналитической форме в классе непрерывных функций.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим движение механической системы с двумя степенями свободы. Эта система представляет собой плоский маятник, совершающий колебания во вращающейся плоскости. Маятник состоит из невесомого стержня переменной длины $l = l(t)$, на конце которого находится масса m. Точка подвеса O_1 находится на расстоянии $a = const$ от оси вращения. $Oxyz$ – подвижная система координат, ось Oz неподвижна, ось Oy неизменно связана с маятником (рис. 1). Движение описывается двумя переменными: углом φ вращения вокруг вертикальной оси, углом θ от-

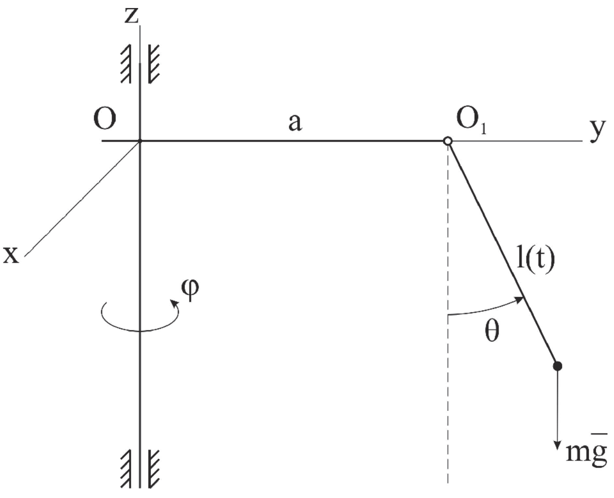

Рис. 1. Схема маятника

клонения от вертикали. Переменная длина маятника $l = l(t)$ является параметром – заданной функцией времени. Выберем вектор обобщенных координат $q = (\varphi, \theta)^T$.

Поставим задачу о реализации управляющими силами произвольно заданных (программных) движений маятника и о стабилизации этих движений.

Программным (желаемым) движением механической системы назовем ограниченную, дважды кусочно-непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $r(t) = (\varphi^*(t), \theta^*(t))^T$, описывающую некоторое заданное движение механической системы.

Уравнения движения маятника составим в форме уравнений Лагранжа второго рода. Запишем кинетическую T энергию рассматриваемой системы:

$$T = \frac{m}{2}(l^2\dot\theta^2 + (a + l\sin\theta)^2\dot\varphi^2 + \dot l^2).$$

Она представима в виде $T = T_2 + T_0$. Квадратичная по скоростям форма T_2 определяется симметричной положительно определенной ограниченной матрицей $A = \{a_{ij}\}$ с элементами

$$a_{11} = m(a + l\sin\theta)^2,\ a_{22} = ml^2,\ a_{12} = a_{21} = 0.$$

Потенциальная энергия системы:

$$\Pi = -mgl\cos\theta.$$

Тогда уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

можно переписать в виде

$$A\ddot q + M + \frac{\partial A}{\partial t}\dot q = Q_e + Q_u,$$

где через $M = M(q, \dot q)$ обозначен вектор-столбец с компонентами

$$M_i = \dot q^T \frac{\partial A_i}{\partial q}\dot q - \frac{1}{2}\dot q^T \frac{\partial A}{\partial q_i}\dot q, \quad i = \left(\overline{1,2}\right),$$

вычисляемыми по формуле

$$M_i = \sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot q_k \dot q_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot q_k \dot q_j, \quad i = \left(\overline{1,2}\right). \tag{1}$$

В скалярном виде уравнения движения системы принимают вид

$$\begin{cases} m(a + l\sin\theta)^2\ddot\varphi + 2m(a + l\sin\theta)(\sin\theta\cdot\dot l + l\cos\theta\cdot\dot\theta)\dot\varphi = 0, \\ ml^2\ddot\theta + 2ml\dot l\dot\theta - ml\cos\theta(a + l\sin\theta)\dot\varphi^2 = mgl\sin\theta. \end{cases} \tag{2}$$

Вектор обобщенных сил

$$Q = \left(Q_\varphi,\ Q_\theta\right)^T = Q_e + Q_u$$

представляет собой сумму внешних сил Q_e, действующих на механическую систему, и управляющих воздействий Q_u, определяемых в дальнейшем. Предполагаем, что движение происходит только под действием внешней силы тяжести.

В общем случае функция $r(t)$, описывающая программное движение тела, может не являться решением системы (2). Поэтому реализацию программных движений будем рассматривать как задачу о двухуровневом управлении, разделив управляющие воздействия на две группы:

$$Q_u = Q_{pr} + Q_{st},$$

где Q_{pr} – силы, реализующие программное движение, Q_{st} – силы, стабилизирующие его.

2. ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ОТКЛОНЕНИЯХ

Пусть необходимо, чтобы система совершала некоторое программное движение $r(t),\ \dot r(t)$. Прямой подстановкой функции $r(t)$ в систему (2) определим управляющие программные силы, реализующие это движение:

$$Q_{pr} = A(r)\ddot r + M(r, \dot r) + \frac{\partial A(r)}{\partial t}\dot r - Q_e(t, r, r), \tag{3}$$

где координаты вектора $M = M(r, \dot r)$ вычисляются по формулам, получающимся из формул (1) заменой q и $\dot q$ на r и $\dot r$ соответственно.

Или явно

$$\begin{cases} Q_{pr_\varphi} = 2m(a + l\sin\theta^*)(\dot l\sin\theta^* + l\dot\theta^*\cos\theta^*)\dot\varphi^* + m(a + l\sin\theta^*)^2\ddot\varphi^*, \\ Q_{pr_\theta} = 2ml\dot l\dot\theta^* + ml^2\ddot\theta^* - ml\cos\theta^*(a + l\sin\theta^*)(\dot\varphi^*)^2 + mgl\sin\theta^*. \end{cases}$$

Сведем решение задачи о стабилизации программных движений к задаче о стабилизации решения неавтономной лагранжевой системы. Это позволит, как и в [3], применить к задаче о стабилизации программных движений методы и результаты [10], разработанные для исследования устойчивости и стабилизации нулевого положения равновесия неавтономных систем.

Введем новые обобщенные координаты (отклонения) по правилу $x = q - r(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dot{\varphi}^* + \dot{x}_1, \\ \theta = \theta^* + x_2, \\ \dot{\theta} = \dot{\theta}^* + \dot{x}_2. \end{cases}$$

В силу линейности замены и линейности оператора дифференцирования структура уравнений Лагранжа при переходе к уравнениям в отклонениях не изменится. Кинетическая энергия системы примет вид

$$T = \frac{m}{2}(l^2(\dot{\theta}^* + \dot{x}_2)^2 + (a + l\sin(\theta^* + x_2))^2(\dot{\varphi}^* + \dot{x}_1)^2 + \dot{l}^2) =$$

$$= \frac{m}{2}[l^2(\dot{\theta}^*)^2 + l^2(\dot{x}_2)^2 + 2l\dot{\theta}^*\dot{x}_2 + (a + l\sin(\theta^* + x_2))^2(\dot{\varphi}^*)^2 +$$

$$+ 2(a + l\sin(\theta^* + x_2))^2\dot{\varphi}^*\dot{x}_1 + (a + l\sin(\theta^* + x_2))^2(\dot{x}_1)^2 + \dot{l}^2] =$$

$$= \frac{1}{2}[ml^2(\dot{x}_2)^2 + m(a + l\sin(\theta^* + x_2))^2(\dot{x}_1)^2] +$$

$$+ [ml\dot{\theta}^*\dot{x}_2 + m(a + l\sin(\theta^* + x_2))^2\dot{\varphi}^*\dot{x}_1] +$$

$$+ \frac{m}{2}[l^2(\dot{\theta}^*)^2 + (a + l\sin(\theta^* + x_2))^2(\dot{\varphi}^*)^2 + \dot{l}^2].$$

Вычислив производные

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = A\ddot{x} + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x}\right)\dot{x} + A\ddot{r} + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x}\right)\dot{r},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2}\dot{x}^T\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x} + \dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{r}^T\frac{\partial A}{\partial x}\dot{r},$$

запишем уравнения движения в отклонениях:

$$A\ddot{x} + M + M' + A\ddot{r} + M'' + \frac{\partial A}{\partial t}\dot{x} + \frac{\partial A}{\partial t}\dot{r} = Q_e + Q_u, \quad (4)$$

где $Q_e = Q_e(t, r + x, \dot{r} + \dot{x})$, $M = M(x, \dot{x})$ обозначает вектор-столбец, компоненты которого M_i определены равенствами

$$M_i = \sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{x}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{x}_j, \quad i = \left(\overline{1,2}\right),$$

M' – вектор-столбец с компонентами

$$M'_i = \sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{r}_j - \sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{r}_j + \sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{r}_k\dot{x}_j, \quad i = \left(\overline{1,2}\right),$$

M'' – вектор-столбец с компонентами

$$M''_i = \sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{r}_k\dot{r}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{r}_k\dot{r}_j, \quad i = \left(\overline{1,2}\right).$$

Подставляя в уравнения движения (2) введенные отклонения и добавляя программные и стабилизирующие силы, получим уравнения возмущенного движения управляемой системы:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1, \\ \frac{d\dot{x}_1}{dt} = -\ddot{\varphi}^* - \frac{1}{m\left[a + l\sin\left(\theta^* + x_2\right)\right]^2} \cdot \left\{2m\left[a + l\sin\left(\theta^* + x_2\right)\right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\sin\left(\theta^* + x_2\right)\dot{l} + l\cos\left(\theta^* + x_2\right) \cdot \left(\dot{\theta}^* + \dot{x}_2\right)\right]\left(\dot{\varphi}^* + \dot{x}_1\right) + Q_{pr_\varphi} + Q_{st_\varphi}\right\}, \\ \frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2, \\ \frac{d\dot{x}_2}{dt} = -\ddot{\theta}^* - \frac{1}{ml^2}\left\{2ml\dot{l}\left(\dot{\theta}^* + \dot{x}_2\right) - ml\cos\left(\theta^* + x_2\right) \cdot \left[a + l\sin\left(\theta^* + x_2\right)\right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(\dot{\varphi}^* + \dot{x}_1\right)^2 + mgl\sin\left(\theta^* + x_2\right) + Q_{pr_\theta} + Q_{st_\theta}\right\}. \end{cases} \quad (5)$$

3. ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть C – неисчезающая ограниченная диагональная матрица, удовлетворяющая условиям:

$$c_0 E \le C = const \le c_1 E, \ (0 < c_0 < c_1 - const), \quad (6)$$

где E – единичная матрица.

Рассмотрим положительно определенную, допускающую бесконечно малый высший предел функцию Ляпунова

$$V(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2}x^T C x + \frac{1}{2}\dot{x}^T A\dot{x}. \quad (7)$$

Или

$$2V = m\left[a + l\sin\left(\theta^* + x_2\right)\right]^2\dot{x}_1^{\,2} + ml^2\dot{x}_2^{\,2} + c_{11}x_1^{\,2} + c_{22}x_2^{\,2},$$

где $c_{11} = const > 0$, $c_{22} = const > 0$ – элементы матрицы C, и $c_{12} = c_{21} = 0$.

Тогда ее полная производная по времени будет иметь вид

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T\dot{x} + \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)^T\ddot{x} =$$

$$= \dot{x}^T C x + \dot{x}^T A\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^T\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x}\right)\dot{x}$$

и в силу системы (4) получим

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}^T\left(-M - M' - A\ddot{r} - M'' - \frac{\partial A}{\partial t}\dot{x} - \frac{\partial A}{\partial t}\dot{r} + Q_e + Q_u\right) +$$

$$+ \dot{x}^T C x + \frac{1}{2}\dot{x}^T\left(\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{r}\right)\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^T\left(\frac{\partial A}{\partial x^T}\dot{x}\right)\dot{x}.$$

В явном виде:

$$\begin{gathered}\frac{dV}{dt}=-\dot{x}_1^{\,2}\Big\{m\dot{l}\sin\left(\theta^*+x_2\right)\left[a+l\sin\left(\theta^*+x_2\right)\right]+ \\ +2ml\dot{\theta}^*\cos\left(\theta^*+x_2\right)\left[a+l\sin\left(\theta^*+x_2\right)\right]\Big\}- \\ -\dot{x}_2^{\,2}\left[-ml\dot{l}\right]+x_1\dot{x}_1c_{11}+x_2\dot{x}_2c_{22}+ \\ +\dot{x}_1\Big\{-2ml\dot{l}\dot{\varphi}^*\sin\left(\theta^*+x_2\right)\left[a+l\sin\left(\theta^*+x_2\right)\right]- \\ -2ml\cos\left(\theta^*+x_2\right)\left[a+l\sin\left(\theta^*+x_2\right)\right]\dot{\varphi}^*\dot{\theta}^*+ \\ +2m\left(\dot{l}\dot{\varphi}^*\sin\theta^*+l\dot{\varphi}^*\dot{\theta}^*\cos\theta^*\right)\left[a+l\sin\theta^*\right]+Q_{st_\varphi}\Big\}+ \\ +\dot{x}_2m\Big\{l\dot{\varphi}^{*2}\cos\left(\theta^*+x_2\right)\left[a+l\sin\left(\theta^*+x_2\right)\right]-gl\sin\left(\theta^*+x_2\right)- \\ -l\cos\theta^*\left[a+l\sin\theta^*\right]\left(\dot{\varphi}^*\right)^2+gl\sin\theta^*+m^{-1}Q_{st_\theta}\Big\}\end{gathered}$$

Пусть существует положительно определенная матрица D, такая, что выполняется условие

$$2D+\frac{\partial A}{\partial t}\geq\alpha_0E,\ (0<\alpha_0-const). \qquad (8)$$

Выберем стабилизирующее управление в виде

$$Q_{st}=-Cx-D\dot{x}+M''+\frac{\partial A}{\partial t}\dot{r}+A\ddot{r}+M'-Q_{pr}-Q_e. \qquad (9)$$

Или в скалярном виде

$$\begin{cases}\begin{gathered}Q_{st_\varphi}=-c_{11}x_1-d_{11}\dot{x}_1-\Big\{2ml\dot{l}\sin\theta^*\left[a+l\sin\theta^*\right]\dot{\varphi}^*- \\ -2ml\dot{\varphi}^*\left[a+l\sin\left(\theta^*+x_2\right)\right]\left(\dot{\theta}^*\cos\left(\theta^*+x_2\right)+\dot{l}\sin\left(\theta^*+x_2\right)\right) \\ +2ml\dot{\varphi}^*\dot{\theta}^*\cos\theta^*\left[a+l\sin\theta^*\right]\Big\},\end{gathered} \\ \begin{gathered}Q_{st_\theta}=-\Big\{ml\dot{\varphi}^{*2}\cos\left(\theta^*+x_2\right)\left[a+l\sin\left(\theta^*+x_2\right)\right]-mgl\sin\left(\theta^*+x_2\right)- \\ -c_{22}x_2-d_{22}\dot{x}_2-ml\dot{\varphi}^{*2}\cos\theta^*\left[a+l\sin\theta^*\right]+mgl\sin\theta^*\Big\},\end{gathered}\end{cases}$$

где условия (8) на элементы $d_{11}=const>0,\ d_{22}=const>0$ матрицы D ($d_{12}=d_{21}=0$) будут определены позже.

При управлении (9) полная производная от функции (7) по времени в силу системы (4) имеет вид

$$\frac{dV}{dt}=-\dot{x}^T\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial t}+D\right)\dot{x}+\dot{x}^T\frac{1}{2}N, \qquad (10)$$

символом N обозначен n-вектор-столбец с компонентами

$$N_i=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{x}_j-\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{x}_j.$$

Последнее слагаемое в (10) является функцией третьего порядка малости относительно скоростей $\dot{x}$. При управлении (9) и малых скоростях (т.е. в окрестности тривиального решения $x=\dot{x}=0$) производная (10), согласно условию (8), будет иметь оценку

$$\frac{dV}{dt}\approx-\dot{x}^T\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial t}+D\right)\dot{x}\leq-\frac{\alpha_0}{2}\left\|\dot{x}\right\|^2\leq 0$$

при выполнении условий

$$\begin{cases}d_{11}>-m\cdot\left[a+l\sin\left(\theta^*+x_2\right)\right]\left(\dot{l}\sin\left(\theta^*+x_2\right)+2l\dot{\theta}^*\cos\left(\theta^*+x_2\right)\right), \\ d_{22}>ml\dot{l}.\end{cases}$$

Тем самым будет отрицательно определенной по скоростям функцией. Вектор-функции M и M' удовлетворяют условию Липшица равномерно по x относительно t, и предельная система к системе (5) в смысле [10] существует, имеет аналогичный (5) вид. Множество $\{\dot{x}=0\}$ не содержит решений предельной системы, кроме $x=\dot{x}=0$. Поэтому на основе теоремы из [10] об асимптотической устойчивости нулевого решения неавтономной системы можно сделать вывод, что управление (9) при выполнении условий (8) решает задачу стабилизации программного движения $x=\dot{x}=0$ системы (4). При этом устойчивость равномерная асимптотическая.

4. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Для иллюстрации полученных результатов численно проинтегрируем и представим графики величин $x_1(t),\ x_2(t),\ \dot{x}_1(t),\ \dot{x}_2(t)$ для исследуемой системы – маятника на вращающемся основании. Зададим параметры системы:

$m=1$ *кг*, $a=0{,}5$ *м*, $l_0=1$ *м*,
$c_{11}=c_{22}=1$ *Н·м*,
$d_1=1$ *Дж·с*, $d_2=1$ *Дж·с*.

В качестве программного движения зададим равномерное вращение маятника вокруг вертикальной оси с периодически изменяющимся углом наклона и изменяющейся по периодическому закону длиной стержня:

$$\begin{cases}\varphi^*(t)=3t, \\ \theta^*(t)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\sin\left(0{,}2t\right), \\ l(t)=l_0+0{,}5\sin\left(0{,}1t\right).\end{cases}$$

На рис. 2-3 изображены зависимости отклонений $x_1(t),\ x_2(t)$ от времени при следующих начальных условиях: $x_1(0)=0.3,\ x_2(0)=0.3,\ \dot{x}_1(0)=0.3,\ \dot{x}_2(0)=0.3$. На рисунках 4-5 изображены зависимости величин $\dot{x}_1(t),\ \dot{x}_2(t)$ от времени при тех же начальных условиях.

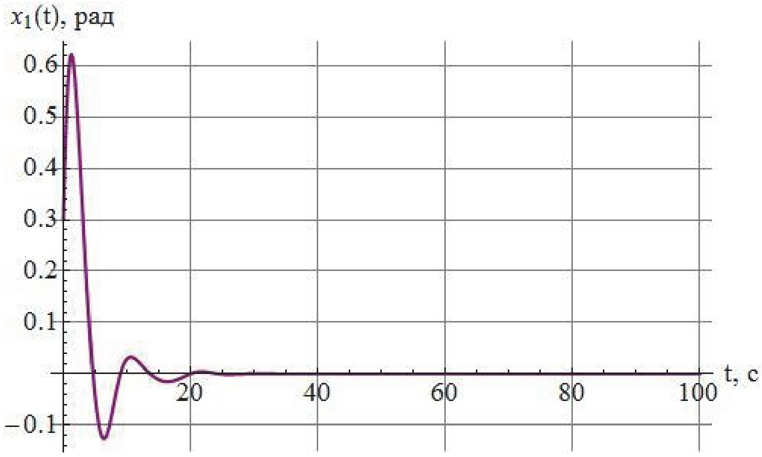

Рис. 2. График поведения отклонения $x_1(t)$

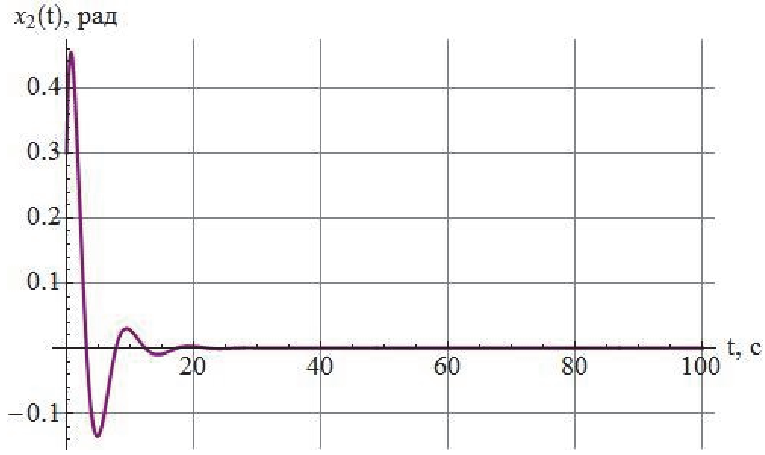

Рис. 3. График поведения отклонения $x_2(t)$

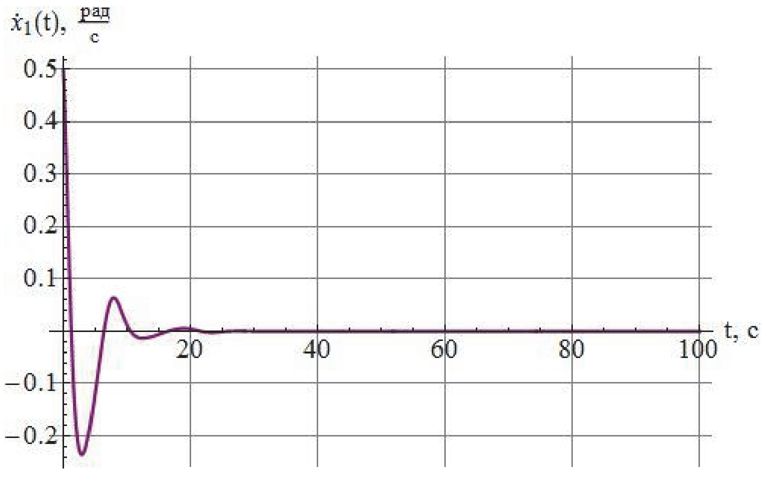

Рис. 4. График поведения скорости отклонения $\dot{x}_1(t)$

Поведение решений иллюстрирует асимптотическую устойчивость реализованного программного нестационарного движения.

В работе синтезированы произвольные асимптотически устойчивые программные движения маятника переменной длины на вращающемся основании с помощью активного двухуровневого управления. Управление получено в виде точного аналитического решения в классе непрерывных функций. Задача решена на основе прямого метода Ляпунова и метода предельных систем, позволяющего использовать функции Ляпунова со знакопостоянными производными.

Результаты работы развивают соответствующие результаты из [3, 4, 9].

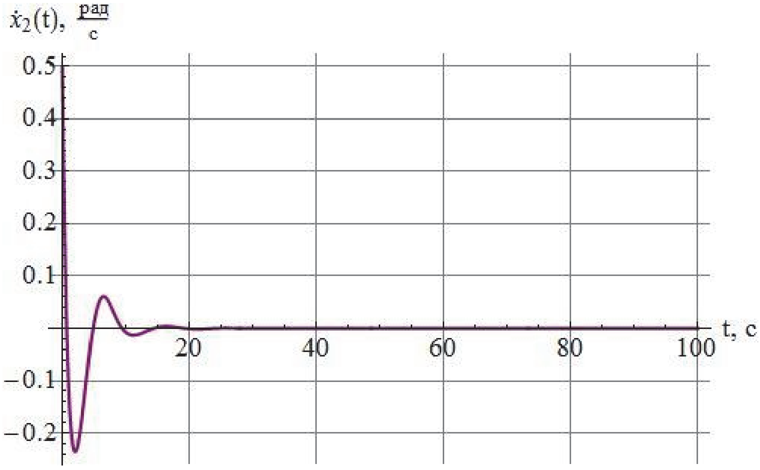

Рис. 5. График поведения скорости отклонения $\dot{x}_2(t)$

Представленные результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России №9.540.2014/К.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1989. 447 с.
2. *Летов А.М.* Динамика полета и управления. М.: Наука, 1969. 359 с.
3. *Bezglasnyi S.P.* The stabilization of program motions of controlled nolinear mechanical systems // Korean J. Comput. and Appl. Math. 2004. V. 14. № 1-2. P. 251-266.
4. *Безгласный С.П., Мысина О.А.* О реализации одноосной и трехосной ориентации системы двух тел // Вестник Самарского государственного университета. 2011. № 83. С. 80-90.
5. *Красильников П.С.* О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 36–51.
6. *Маркеев А.П.* Нелинейные колебания симпатических маятников // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. № 3. С. 605–622.
7. *Асланов В.С., Безгласный С.П.* Устойчивость и неустойчивость управляемых движений двухмассового маятника переменной длины // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 3. С. 32–46.
8. *Асланов В.С., Безгласный С.П.* Гравитационная стабилизация спутника с помощью подвижной массы // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 563–573.
9. *Акуленко Л.Д.* Управление относительными движениями маятника на вращающемся основании // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 204–216.
10. *Андреев А.С.* Об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 388–396.

STABILIZATION OF THE NONSTATIONARY MOTION OF THE PENDULUM ON THE ROTATING BASE

Samara State Aerospace University named after Academician S.P. Korolyov
(National Research University)

We solve the problem of construction asymptotically stability program motion of the variable-length pendulum on the rotating base. Control is received in the form the analytical solution. We solve the problem of stabilization by the direct Lyapunov's method and the method of limiting functions and systems. In this case we can use the Lyapunov's functions having constant signs derivatives.
Key words: programm motions, stabilization, the method of Lyapunov's functions, limiting systems.

Sergey Bezglasnyi, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Doctoral Candidate.
E-mail: bezglasnsp@rambler.ru
Nataliya Kutyreva, Student. E-mail: kutyreva@gmail.com