

УДК 535.42

**ПРОСТРАНСТВЕННО-СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ БИНАРНЫХ ДИФРАКЦИОННЫХ
ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ, КОДИРОВАННЫХ НА ОСНОВЕ
КОМПЛЕКСНОГО-СОПРЯЖЕННОГО ДОПОЛНЕНИЯ**

© 2014 С.Н. Хонина, А.В. Устинов

Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара
Самарский государственный аэрокосмический университет имени С.П. Королева
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 01.09.2014

В работе рассмотрено бинарное кодирование фазовых дифракционных оптических элементов на основе комплексного-сопряженного дополнения с целью удовлетворения технологическим требованиям изготовления оптических элементов. Выполнено аналитическое и численное исследование пространственного спектра кодированных элементов и формирование дополнительных дифракционных порядков. В параксиальном приближении исследовано формирование осевого распределения интенсивности на основе интерференции основного и дополнительных дифракционных порядков.
Ключевые слова: дифракционный оптический элемент, бинарное кодирование, дифракционные порядки

ВВЕДЕНИЕ

Дифракционная оптика является универсальным средством формирования в заданной области пространства практически любого распределения комплексной амплитуды [1-3].

Однако современные технологии изготовления дифракционных оптических элементов (ДОЭ) хорошо отработаны и обеспечивают высокую точность только при бинарной структуре рельефа.

Известно множество методов бинарного кодирования комплексной функции пропускания [4-8]. Наиболее быстрыми по времени расчета являются неитерационные методы, в частности, методы цифровой голографии [4, 5], их модификации и обобщения [1-3, 8].

Одним из наиболее простых методов бинарного кодирования непрерывной фазовой функции является использование комплексно-сопряженного дополнения [9-14]. В этом случае фактически используется суперпозиция рассеивающего и собирающего оптических элементов, которые являются комплексно-сопряженными по отношению друг к другу.

В данной работе проводится исследование пространственного спектра кодированных элементов и анализ формирования дополнительных дифракционных порядков.

Хонина Светлана Николаевна, ведущий научный сотрудник, доктор физико-математических наук.

E-mail: khonina@smr.ru

Устинов Андрей Владимирович, ведущий программист, аспирант. E-mail: andr@smr.ru

**1. АНАЛИЗ
ПРОСТРАНСТВЕННОГО СПЕКТРА**

Рассмотрим фазовую комплексную функцию пропускания в произвольной системе координат (ξ, η) :

$$\tau(\xi, \eta) = \exp[-i\Phi(\xi, \eta)]. \quad (1)$$

Дополнение этой функции комплексно-сопряженным слагаемым:

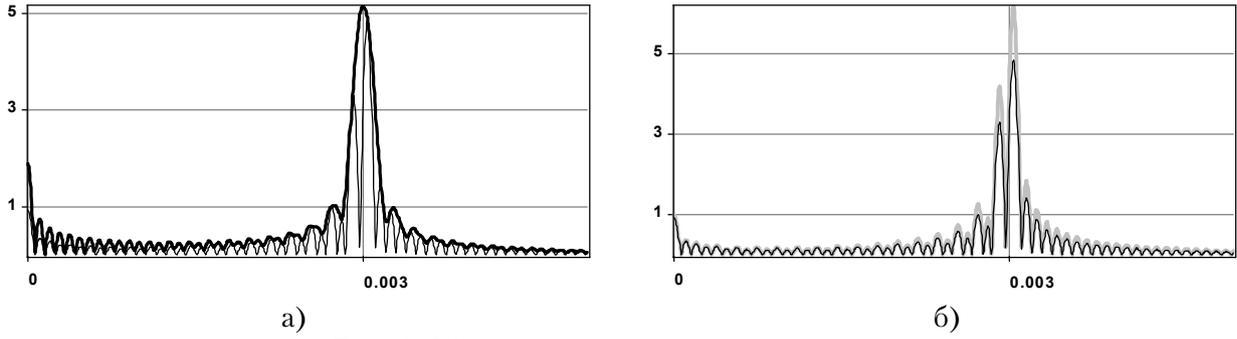
$$\tau_a(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \{ \exp[i\Phi(\xi, \eta)] + \exp[-i\Phi(\xi, \eta)] \} = \cos[\Phi(\xi, \eta)] \quad (2)$$

позволяет выполнить простое бинарное кодирование на основе метода киноформа [1, 2], игнорирующего амплитудную функцию:

$$\tau_b(\xi, \eta) = \exp\left\{ i \frac{\pi}{2} \left(1 - \operatorname{sgn} \left\{ \cos[\Phi(\xi, \eta)] \right\} \right) \right\}. \quad (3)$$

Игнорирование амплитудной зависимости позволяет в некоторых случаях, например при генерации мод лазерного излучения [15, 16], достичь эффективности 70-80% при погрешности около 15%. Высокая эффективность в данном случае обеспечивается за счет изначально бинарной фазовой структуры кодируемого поля. В общем случае теоретически дифракционная эффективность бинарного фазового элемента в полезном порядке не превышает 40,5% [1, 2].

На рис. 1 показано сравнение пространственных спектров для радиальных функций


Рис. 1. Модули пространственных спектров:

(а) для аксикона (толстая линия) и радиального косинуса (тонкая линия)
и (б) для бинарного аксикона (толстая серая линия) и радиального косинуса (тонкая линия)

$\tau_{ax}(r) = \exp(-ik\alpha_0 r)$ (дифракционный аксикон), $\tau_{cos}(r) = \cos(k\alpha_0 r)$ (радиальный косинус)
 $\tau_{bax}(r) = \exp\left\{i\frac{\pi}{2}\left\{1 - \text{sgn}[\cos(k\alpha_0 r)]\right\}\right\}$ (бинарный аксикон), где $k = 2\pi/\lambda$, $\lambda = 0,000532$ мм, $\alpha_0 = 0,003$, радиус апертуры $R = 3$ мм.

Как видно из рис. 1, бинарный аксикон и радиальный косинус имеют очень похожие пространственные спектры. Чтобы объяснить расщепление спектрального максимума на пространственной частоте α_0 , проведем анализ спектра для входного поля $A_0(r) = \cos(k\alpha_0 r)$, ограниченного радиусом R . Его пространственный спектр без масштабного (нормирующего) множителя равен

$$S(\sigma) = \int_0^R \cos(k\alpha_0 r) J_0(k\sigma r) r dr. \quad (4)$$

На нулевой частоте значение $S(0)$ вычисляется точно:

$$S(0) = \int_0^R \cos(k\alpha_0 r) r dr = \frac{R \sin(k\alpha_0 R)}{k\alpha_0} + \frac{\cos(k\alpha_0 R)}{(k\alpha_0)^2} - \frac{1}{(k\alpha_0)^2}. \quad (5)$$

В выражении (5), как правило, преобладает первое слагаемое, поэтому его максимум по модулю будет достигаться при $\sin(k\alpha_0 R) = -1$ (при $\sin(k\alpha_0 R) = 1$ значение будет чуть меньше). В нулевом порядке энергия будет отсутствовать $S(0) = 0$ при условии $\sin(k\alpha_0 R) = 0$ и $\cos(k\alpha_0 R) = 1$ (при $\cos(k\alpha_0 R) = -1$ значение мало, но не равно нулю). Для достижения абсолютного нуля нужно использовать равенство:

$$\alpha_0 R = n\lambda, \quad (6)$$

где n – целое число.

Для оценки выражения (4) в общем случае учтем поведение функции Бесселя. Можно убедиться, что основной вклад даёт область вблизи

верхнего предела. Поэтому, если радиус R достаточно большой, а частота s не очень мала по сравнению с α_0 , то функцию Бесселя можно заменить её асимптотическим приближением.

Используя приближение

$$J_0(x) \approx \sqrt{2/(\pi x)} \cdot \cos(x - \pi/4)$$

и преобразование произведения косинусов к сумме, получим:

$$S(\sigma) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi k\sigma}} (S_1(\sigma) + S_2(\sigma)),$$

$$S_1(\sigma) = \int_0^R \cos(kr(\alpha_0 + \sigma) - \pi/4) \sqrt{r} dr, \quad (7)$$

$$S_2(\sigma) = \int_0^R \cos(kr(\alpha_0 - \sigma) + \pi/4) \sqrt{r} dr.$$

Строго говоря, вблизи нижнего предела приближение функции Бесселя неприменимо, но вклад этой области мал. Оба интеграла не вычисляются точно, но интегрированием по частям можно найти их приближённое значение:

$$S_1(\sigma) \approx \frac{\sqrt{R} \sin(kR(\alpha_0 + \sigma) - \pi/4)}{k(\alpha_0 + \sigma)},$$

$$S_2(\sigma) \approx \frac{\sqrt{R} \sin(kR(\alpha_0 - \sigma) + \pi/4)}{k(\alpha_0 - \sigma)}. \quad (8)$$

Вблизи $\sigma = \alpha_0$ приближение для $S_2(\sigma)$ неприменимо, но оно показывает, что в этой области $S_2(\sigma)$ явно больше $S_1(\sigma)$ и, поэтому можно ограничиться рассмотрением только его.

Непосредственно в точке $\sigma = \alpha_0$ значение вычисляется по (7):

$$S_2(\alpha_0) = \int_0^R \cos(\pi/4) \sqrt{r} dr = (\sqrt{2}/3) R^{3/2}, \quad (9)$$

однако численный расчёт интеграла (4) показывает, что это не есть максимум (рис. 1).

В окрестности $\sigma = \alpha_0$ можно качественно представить вид функции $S_2(\sigma)$ при помощи следующих рассуждений. Подынтегральная функция в (7) на правом конце отрезка равна $\sqrt{R} \cos(kR(\alpha_0 - \sigma) + \pi/4)$. Благодаря низкой частоте лепестки достаточно широкие, и основной вклад вносит самый правый лепесток. Рассмотрим значения косинуса на правом конце отрезка интегрирования $[0, R]$:

$$\cos[kR(\alpha_0 - \sigma) + \pi/4] = \begin{cases} 1, & \text{при } \sigma = \alpha_0 + \pi/(4kR), \\ 0, & \text{при } \sigma = \alpha_0 - \pi/(4kR), \\ -1, & \text{при } \sigma = \alpha_0 - 3\pi/(4kR). \end{cases} \quad (10)$$

Отсюда можно утверждать следующее: максимум $S_2(\sigma)$ будет в точке $\sigma = \alpha_0 + \pi/(4kR)$; минимум (отрицательный максимум) в точке $\sigma = \alpha_0 - 3\pi/(4kR)$; переход через нуль между $\alpha_0 - 3\pi/(4kR)$ и $\alpha_0 - \pi/(4kR)$. То есть, имеет место *расщепление* предполагавшегося максимума $\sigma = \alpha_0$, причём оно несимметричное – смещение максимума в три раза меньше, чем смещение минимума. Правда, наше упрощённое рассуждение не даёт возможности предсказать высоту пиков, кроме того факта, что положительный максимум будет выше отрицательного - его лепесток при одинаковой высоте имеет меньшую длину из-за того, что частота больше.

Сравнение с результатами численного интегрирования по (4) показывает достаточную степень согласия с нашими предсказаниями (рис. 1б): правый пик больше левого; соотношение смещений пиков (в три раза) совпало с предсказанным: $\Delta\sigma_{lc} = 0,003 - 0,00291 = 0,00009$ (левый) и $\Delta\sigma_{rc} = 0,00303 - 0,003 = 0,00003$ (правый). Однако сами смещения оказались на 36% больше предсказанных теоретически, что связано с приближенностью расчетов.

Замена функции Бесселя её приближением и игнорирование слагаемого $S_1(\sigma)$ не основной источник ошибки. Большой своей частью ошибка происходит от того, что благодаря наличию возрастающего множителя \sqrt{r} максимум площади лепестка достигается не тогда, когда на правом конце косинус равен единице, а когда он немного меньше единицы на нисходящей ветви. Аналогичное рассуждение имеет место и для отрицательного максимума. Сделаем более точные оценки.

Используя (10), как некоторое начальное приближение, найдём площадь лепестков в явном виде. Сначала найдём максимум пространственного спектра. Исходя из (10), представим частоту в виде: $\sigma = \alpha_0 + \delta/kR$, $\pi/4 < \delta < 3\pi/4$. Подынтегральная функция в (7) будет равна $\sqrt{r} \cos(\pi/4 - \delta r/R)$. От этой функции нет элементарной первообразной. Поэтому для вычисления

интеграла надо сделать удобное приближение косинуса. Его максимум, равный 1, достигается при $r = r_{\max} = \pi R/4\delta$. Хорошим приближением является разложение косинуса в ряд Тейлора с центром в этой точке, что даст:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta r}{R}\right) \approx 1 - \frac{\delta^2}{2R^2}(r - r_{\max})^2. \quad (11)$$

Подставив это приближение в (7), получим

$$S_2\left(\sigma = \alpha_0 + \frac{\delta}{kR}\right) = R^{3/2} \cdot \left(\frac{2}{3}(1 - \pi^2/32) + \frac{\pi\delta}{10} - \frac{\delta^2}{7}\right). \quad (12)$$

Эта величина достигает максимума при $\delta = 7\pi/20$, то есть максимум $S_2(\sigma)$ будет в точке $\sigma = \alpha_0 + 7\pi/(20kR)$. Его значение равно 0,634, что превышает значение спектра при $\sigma = \alpha_0$ (9) в 1,346 раза.

Подобным образом найдём и отрицательный (левый) максимум - представим частоту в виде: $\sigma = \alpha_0 - \delta/kR$, $3\pi/4 < \delta < 5\pi/4$, а подынтегральная функция в (7) станет $\sqrt{r} \cos(\pi/4 + \delta r/R)$. Здесь придётся использовать другое приближение косинуса. Он равен нулю при $r = r_0 = \pi R/4\delta$ и имеет минимум, равный -1 при $r = 3r_0$. Имеем два лепестка, каждый из которых приближаем параболой: положительный лепесток (от нуля до r_0) кривой

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\delta r}{R}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad (13a)$$

а отрицательный лепесток (от r_0 до R) кривой

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\delta r}{R}\right) \approx -1 + \left(\frac{r - 3r_0}{2r_0}\right)^2. \quad (13b)$$

Подставив в (7), получим

$$S_2\left(\sigma = \alpha_0 - \frac{\delta}{kR}\right) = R^{3/2} \cdot \left(-\frac{\pi^{3/2}}{228\delta^{3/2}} + \frac{5}{6} - \frac{12\delta}{5\pi} + \frac{8\delta^2}{7\pi^2}\right). \quad (14)$$

Первое слагаемое в скобках меньше $\pi^{3/2}/228(3\pi/4)^{3/2} \approx 0,0068$, поэтому для упрощения его опустим. Оставшаяся величина достигает минимума при $\delta = 21\pi/20$, то есть минимум $S_2(\sigma)$ будет в точке $\sigma = \alpha_0 - 21\pi/(20kR)$. Его значение равно $-32/75 = -0,427$. Таким образом, максимум больше модуля минимума в 1,485 раза.

Новые скорректированные значения сохраняют соотношение смещений пиков в три раза и намного лучше согласуются с численными расчётами. Смещения всего на 3,2% меньше предсказанных теоретически.

Найденное выражение (14) позволяет также оценить положение нулевого значения спектра вблизи α_0 . Первое слагаемое в (14) в скобках меньше $\pi^{3/2}/228(\pi/4)^{3/2} \approx 0,035$, поэтому им можно пренебречь. Решая получившееся уравнение, получим два корня $\delta_{1,2} = 7\pi/16(2,4 \pm 1,4)$. Меньший корень дает положение нуля при $\sigma = \alpha_0 - 7\pi/(16kR)$, что на 3,1% отличается от численных результатов ($\sigma_0 = 0,00296$).

Как видно из рис. 1б, бинарный аксикон оказывается лишь немного эффективнее амплитудного косинусного элемента. Это связано с формированием дополнительных дифракционных порядков при использовании бинарного элемента.

В работе [17] было показано, что пропускающую комплексную функцию оптического элемента с квантованной фазой можно представить в виде следующего разложения:

$$\begin{aligned} \tau_b(\xi, \eta) &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p \exp[ip\Phi(\xi, \eta)] = \\ &= c_0 + \sum_{p=1}^{\infty} c_p \cos[p\Phi(\xi, \eta)]. \end{aligned} \quad (15)$$

где $\Phi(\xi, \eta)$ – исходная непрерывная фаза, а само разложение по косинусам означает совместное рассмотрение собирающего элемента (с отрицательным значением p) и рассеивающего элемента (с положительным значением p).

В частности, при кодировании аксикона с определенной частотой α_0 ряд (15) будет иметь следующий вид:

$$\tau_{bax}(r) = c_0 + \sum_{p=1}^{\infty} c_p \cos(k\alpha_p r), \quad (16)$$

т.е. бинарный аксикон представляет собой суперпозицию радиальных косинусов с кратными частотами $\alpha_p = \alpha_0 p$.

В работах [11, 18] выполнен пространственно-

спектральный анализ бинарного аксикона и бинарной линзы на основе разложения комплексной функции пропускания такого элемента в ряд Фурье.

Для бинарного аксикона функция (3) является периодической с периодом $T = 2\pi/(k\alpha_0)$, поэтому ее можно разложить в ряд Фурье. На отдельном периоде она записывается следующим образом:

$$\tau_T(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r < T/4, \\ -1, & T/4 \leq r \leq 3T/4, \\ 1, & 3T/4 < r \leq T. \end{cases} \quad (17)$$

Тогда коэффициенты в (16) для бинарного аксикона вычисляются по формуле:

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{2}{T} \int_0^T \tau_T(r) \cos\left(\frac{2\pi}{T} pr\right) dr = \\ &= \begin{cases} 0, & p - \text{четное}, \\ (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{4}{\pi p}, & p - \text{нечетное}. \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

В частности, $c_1 = 4/\pi$, $c_3 = -4/(3\pi)$, $c_5 = 4/(5\pi)$. Квадрат первого коэффициента $|c_1|^2 \approx 1,62$ показывает энергетический выигрыш фазового бинарного аксикона по сравнению с амплитудным радиальным косинусом.

На рис. 2 показан пространственный спектр бинарного аксикона, демонстрирующий наличие кратных дифракционных порядков. Радиус аксикона выбран из условия (6) отсутствия энергии в нулевом порядке – $R=3,5467$. Основная пространственная частота аксикона равна $\alpha_0 = 0,003$. Из рис. 2 видно, что при кодировании вида (3) формируются только нечетные порядки $p = 1, 3, 5, \dots$, т.е. присутствует энергия на пространственных частотах $\alpha_p = \alpha_0 p$.

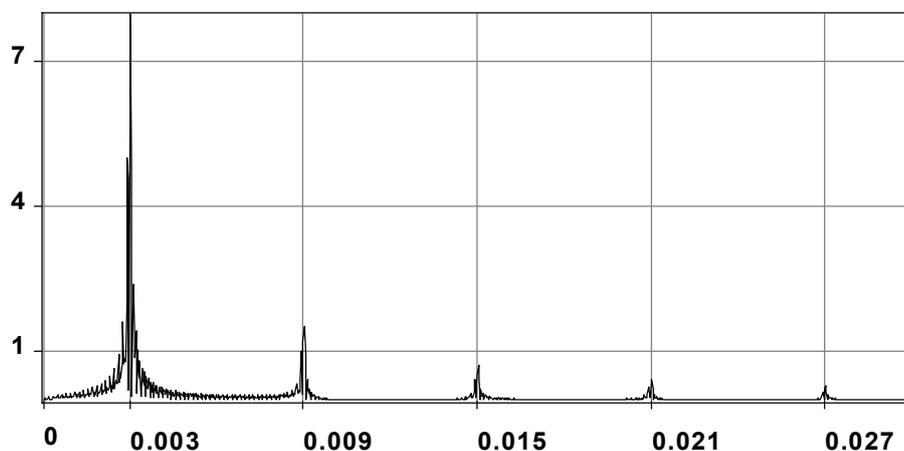


Рис. 2. Пространственный спектр бинарного аксикона с дифракционными порядками $p = 1, 3, 5, \dots$ (нулевой порядок отсутствует в связи с выбором радиуса R по условию (6))

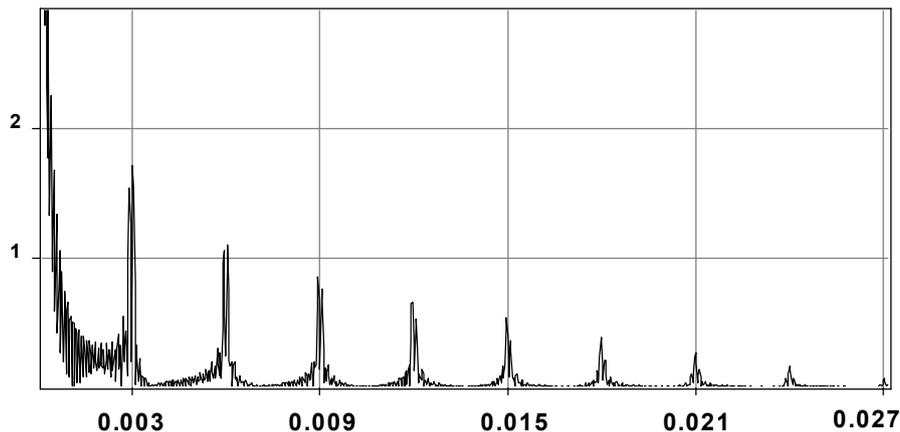


Рис. 3. Пространственный спектр предсказанного бинарного аксикона с дифракционными порядками $p = 0, 1, 2, \dots$

Способ кодирования можно изменить так, чтобы формировались другие порядки (рис. 3). Дополнительное предсказание $\Phi(\xi, \eta)$ позволяет управлять энергией, идущей в заданные дифракционные порядки [17]. Также менять коэффициенты в (16) можно при изменении относительного заполнения на периоде решетки [18].

Возникновение дополнительных дифракционных порядков при бинаризации соответствует формированию сложной картины, связанной с суперпозицией в (15) высокочастотных слагаемых. Для бинарного аксикона это набор радиальных косинусов (16) с более высокими кратными частотами, для бинарной линзы, соответственно, это набор линз с более короткими фокусными расстояниями.

Наиболее наглядно появление дополнительных дифракционных порядков при бинаризации фазы наблюдается для дифракционной линзы:

$$\begin{aligned} \tau_{blens}(\xi, \eta) &= \sum_p c_p \exp\left(-ipk \frac{\xi^2 + \eta^2}{2f}\right) = \\ &= \sum_p c_p \exp\left[-ik \frac{\xi^2 + \eta^2}{2(f/p)}\right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Как следует из выражения (19), наличие дополнительных порядков проявляется в формировании дополнительных фокусов на оптической оси. Далее рассмотрим влияние дополнительных дифракционных порядков на картину интенсивности вдоль оптической оси.

2. АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ОПТИЧЕСКОЙ ОСИ ДЛЯ РАДИАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

При бинаризации радиальной фазовой функции $\Phi_r(r)$ позиции фазовых скачков между

значениями 0 и π фазового элемента вычисляются из выражения:

$$\sin[\Phi_r(r)] = 0 \Rightarrow \Phi_r(r_n) = \pi n. \quad (20)$$

В работе [19] исследовалось комплексное распределение, создаваемой на оптической оси радиально симметричным бинарным фазовым элементом, и было получено следующее выражение:

$$F_{bin}(0, z) = \exp(ikz) \times \left\{ -\exp\left(\frac{ikr_0^2}{2z}\right) + (-1)^{N+1} \exp\left(\frac{ikr_N^2}{2z}\right) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \exp\left(\frac{ikr_n^2}{2z}\right) \right\}, \quad (21)$$

где r_n – границы колец бинарного элемента.

В частности, для обобщенной линзы (или фраксикона) [20]:

$$\Phi_{frac}(r) = -(k\alpha_0 r)^\gamma, \quad (22)$$

где γ – положительное действительное число, радиусы колец определяются следующим выражением:

$$r_n = \frac{(\pi n)^{1/\gamma}}{k\alpha_0}. \quad (23)$$

Если число колец на оптическом элементе не очень мало, то можно ограничиться в (20) ана-

лизом суммы $S = 2 \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \exp\left(\frac{ikr_n^2}{2z}\right)$.

При подстановке (20) получаем следующую оценку для комплексного распределения на оптической оси:

$$S_{frac} = 2 \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \exp\left(\frac{i(\pi n)^{2/\gamma}}{2k\alpha_0^2 z}\right). \quad (24)$$

Рассмотрим свойства этого выражения. Минимальное (по модулю) значение этой суммы равно 0 или 2, максимальное $2(N-1)$. Минимум

получается, если все экспоненциальные множители равны единице, а максимум, если равны $(-1)^n$. Чтобы это было возможно, необходимо выполнение следующего условия: чётность $n^{2/\gamma}$ должна совпадать с чётностью n , что возможно, только если $2/\gamma$ является целым числом. Пусть это требование выполнено. Тогда минимум достигается при $\pi^{2/\gamma}/2k\alpha_0^2 z = 2\pi p$, т.е.

$$z_p = \frac{\lambda \pi^{(2/\gamma)-2}}{8p\alpha_0^2}, \quad (25)$$

а максимум при $\pi^{2/\gamma}/2k\alpha_0^2 z = \pi + 2\pi p$, т.е.

$$z_{p+1/2} = \frac{\lambda \pi^{(2/\gamma)-2}}{8(p+1/2)\alpha_0^2}. \quad (26)$$

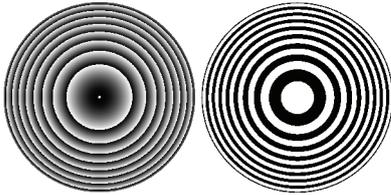
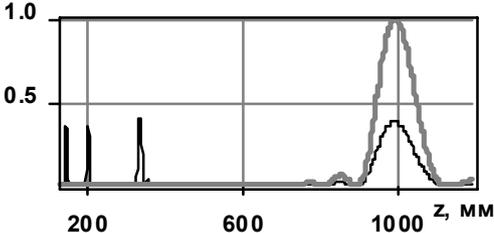
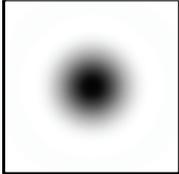
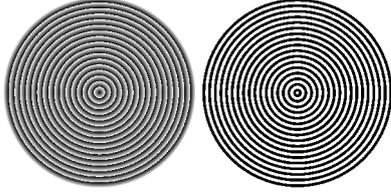
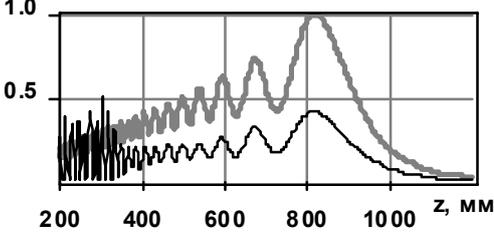
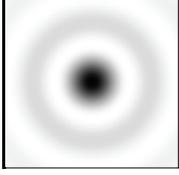
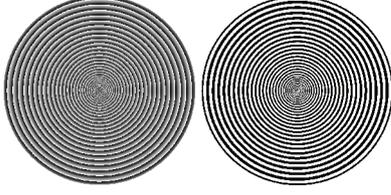
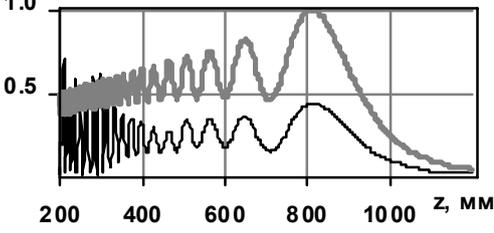
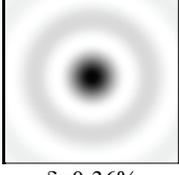
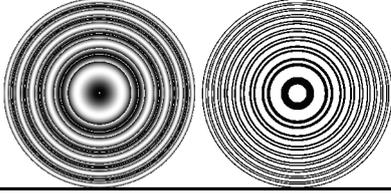
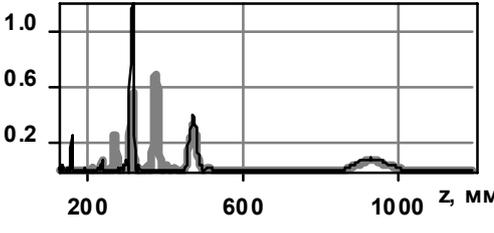
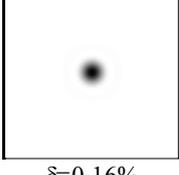
Расстояния (26) можно назвать локальными фокусами. Зависимость положения фокусов от их

номера одинаковая для всех допустимых значений параметра γ , который влияет только на масштаб.

Условие того, что число $2/\gamma$ должно быть целым, накладывает жёсткое ограничение на величину g : можно использовать только $\gamma=2$ (линза), $\gamma=1$ (аксикон) и бесконечный ряд значений γ , меньших единицы (фраксикон). Если же это условие не выполнено, то мы не сможем синхронизировать фазы всех слагаемых в сумме (24), что приведёт к падению контраста картины: минимумы будут больше нуля, а максимумы меньше $2(N-1)$. Таким образом, формулы (25) и (26) описывают далеко не все возможные экстремумы даже для целых $2/\gamma$.

В табл. 1 приведены распределения интенсивности на оптической оси для некоторых дифракционных оптических элементов и их бинарных аналогов.

Таблица 1. Распределения интенсивности на оптической оси для некоторых дифракционных оптических элементов (серые линии на графиках) и их бинарных аналогов (черные линии на графиках)

Тип ДОО, $R=3$ мм	Распределение интенсивности на оптической оси	Интенсивность в плоскости максимума ($R=0,15$ мм)
Линза: $\Phi_{\text{лин}}(r) = kr^2/2f$, $f=1000$ мм 		 $\delta=0,16\%$
Аксикон: $\Phi_{\text{ак}}(r) = k\alpha_0 r$, $\alpha_0 = 0,003$ 		 $\delta=0,41\%$
Фраксикон: $\Phi_{\text{фак}}(r) = \sqrt{k\alpha_0} r$, $\alpha_0 = 0,01$ 		 $\delta=0,36\%$
Тригонометрическая линза: $\Phi_{\text{тлин}}(r) = k \sin(\pi r^2)/2f$, $f=1000$ мм 		 $\delta=0,16\%$

Так как аксикон и фраксикон [20], в отличие от линзы, формируют протяженный фокус, то результат появления дополнительных дифракционных порядков не столь очевиден. Можно наблюдать (строка 2 и 3 табл. 1) появление сложной интерференционной картины на оптической оси вблизи оптического элемента, где высокочастотные дифракционные порядки накладываются друг на друга.

Влияние дополнительных порядков дифракции на осевое распределения интенсивности, формируемого бинарным аксиконом, обсуждалось в работах [11, 21]. Рассмотрим более детально положения экстремумов в области интерференции основного и дополнительных дифракционных порядков.

В статье [22] получено выражение для амплитуды, формируемой на оптической оси аксиконом в параксиальном приближении:

$$U(z) \approx \alpha_0 \sqrt{\pi k z} \exp\left(-i \frac{k z \alpha_0^2}{2}\right) F(z, \alpha_0, R), \quad (27)$$

где $F(z, \alpha_0, R)$ – медленно меняющаяся от z функция. В частности, в геометрооптическом приближении $F(z, \alpha_0, R) = 1 + i$ при $z < R/\alpha_0$, где R – радиус оптического элемента.

Рассмотрим интерференцию высокочастотного p -го и основного дифракционных порядков, возникающих от бинарного аксикона, на оптической оси на интервале $z_{p+2} = R/((p+2)\alpha_0) < z < z_3 = R/3\alpha_0$:

$$U_1(z) + U_p(z) \approx \alpha_0 \sqrt{\pi k z} F(z, \alpha_0, R) \cdot$$

$$\left[c_1 \exp\left(-i \frac{k z \alpha_0^2}{2}\right) + c_p p \exp\left(-i \frac{k z p^2 \alpha_0^2}{2}\right) \right]. \quad (28)$$

На основе выражения (28) получаем распределение интенсивности:

$$|U_1(z) + U_p(z)|^2 \approx \alpha_0^2 \pi k z |F(z, \alpha_0, R)|^2 \cdot$$

$$\left\{ c_1^2 + (c_p p)^2 + 2 p c_1 c_p \cos\left[\frac{k z \alpha_0^2}{2} (p^2 - 1)\right] \right\}. \quad (29)$$

Формулы (28), (29) верны для любой суперпозиции входных полей вида $c_1 \exp(-i k \alpha_0 r) + c_p \exp(-i k p \alpha_0 r)$ (p – действительное положительное число). Далее будем считать, что $c_1 > 0$.

Если $p=3$, то на интервале $R/(5\alpha_0) < z < R/(3\alpha_0)$ будем наблюдать множество локальных экстремумов в соответствии с

выражением в фигурных скобках. Учитывая (18),

$$\text{получаем } p c_p = \frac{4}{\pi} = \text{const}, \text{ что предсказывает}$$

одинаковую величину экстремумов.

Положения экстремумов определяются по следующим формулам:

$$\text{максимумы: } z_{m+1/2} = \frac{(m+1/2)\lambda}{4\alpha_0^2}, \text{ если } c_p < 0, \quad (30a)$$

$$\text{минимумы: } z_m = \frac{m\lambda}{4\alpha_0^2}, \text{ если } c_p < 0 \text{ и } p|c_p|/c_1 \leq 1. \quad (30б)$$

В случае $c_p > 0$ экстремумы поменяются местами, т.е. (30a) будет соответствовать минимумам при одновременном выполнении условия

$$p|c_p|/c_1 \leq 1, \text{ а (30б) – максимумам.}$$

В рассматриваемом случае $p c_p / c_1 = 3 c_3 / c_1 = -1$, поэтому минимумы (30б) равны нулю.

Заметим, что если рассматривать произвольную суперпозицию двух кратных аксиконов при условии $p|c_p|/c_1 > 1$, то в позициях минимумов будут дополнительные максимумы, а минимумы, равные нулю, будут наблюдаться в точках, удовлетворяющих уравнению:

$$\cos(4kz\alpha_0^2) = -\frac{(p c_p)^2 + c_1^2}{2 p c_1 c_p}. \quad (31)$$

В соответствии с выражением (30a) расстояние между интерференционными максимумами равно $\Delta z = \lambda/4\alpha_0^2$. Для рассмотренных параметров аксикона (табл. 1, строка 2): $R=3$ мм, $\lambda = 0,000532$ мм, $\alpha_0 = 0,003$, на интервале $200 \text{ мм} < z < 333 \text{ мм}$ должны формироваться максимумы, разделенные расстоянием $\Delta z \approx 15$ мм. Это вполне соответствует численному расчету, приведенному в табл. 1: на интервале $200 \text{ мм} < z < 333 \text{ мм}$ появилось 9 максимумов, связанных с интерференцией первого и третьего порядков дифракции.

По результатам, приведенным в табл. 1, можно также наблюдать перераспределение энергии между локальными фокусами для тригонометрической линзы $\Phi_{\text{tens}}(r) = k\alpha_0 \sin(\pi r^2)$ (строка

4 табл. 1). В отличие от параболической линзы, тригонометрическая линза изначально формирует несколько локальных фокусов различной интенсивности, а после бинаризации происходит дополнительное перераспределение энергии с исчезновением некоторых фокусов.

В последней колонке табл. 1 показано распределение интенсивности в плоскости основного максимума, которое незначительно меняется при

замене многоуровневого оптического элемента на бинарный аналог (погрешность не более 1%).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выполнено аналитическое и численное исследование пространственного спектра кодированных на основе комплексного-сопряженного дополнения бинарных дифракционных оптических элементов.

Для бинарного аксикона показано не только появление дополнительных дифракционных порядков, но и расщепление каждого из них.

Для бинарной линзы возникновение дополнительных дифракционных порядков сказывается в перераспределении энергии из основного фокуса в локальные фокусы, расположенные ближе к оптическому элементу. Для аксикона и фразикона влияние дополнительных порядков более сложное, так как связано с протяженной вдоль оптической оси интерференционной картиной.

Теоретический анализ формирования осевого распределения интенсивности на основе интерференции основного и дополнительных дифракционных порядков в парааксиальном приближении показал хорошую согласованность с численным расчетом.

Численный расчет показал, что распределение интенсивности в плоскости основного максимума незначительно меняется при замене многоуровневого оптического элемента на бинарный аналог (погрешность не более 1%). Таким образом, перераспределение энергии в дополнительные дифракционные порядки практически не искажает картину, связанную с основным порядком.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гран-ты РФФИ 13--07-00266- и 13--07-97004-р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методы компьютерной оптики / А.В. Волков, Д.Л. Головашкин, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, В.В. Котляр, В.С. Павельев, Р.В. Скиданов, В.А. Соيفер, В.С. Соловьев, Г.В. Успенев, С.И. Харитонов, С.Н. Хонина [под ред. В.А. Соифера], издание 2-е, исправленное. Учебник, М.: Физматлит, 2003, 688 с.
2. Дифракционная компьютерная оптика / Д.Л. Головашкин, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, В. В. Котляр, В.С. Павельев, Р.В. Скиданов, В.А. Соифер, С.Н. Хонина [под ред. В.А. Соифера]. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 736 с.
3. Дифракционная нанофотоника / А.В. Гаврилов, Д.Л. Головашкин, Л.Л. Досколович, П.Н. Дьяченко, А.А. Ковалев, В.В. Котляр, А.Г. Налимов, Д.В. Нестеренко, В.С. Павельев, Р.В. Скиданов, В.А. Соифер, С.Н. Хонина, Я.О. Шушупова // под ред. В.А. Соифера, М., Физматлит, 2011, 680 с.
4. Kirk J.P. and Jones A.L. Phase-only complex-valued spatial filters // J. Opt. Soc. Am. 611023 (1971).
5. Chu D.C. and Fienup J.R. Recent approach to computer-generated holograms // Opt. Eng. 13189 (1974).
6. Bryngdahl O. and Wyrowski F. Digital holography—computer-generated holograms // Prog. Opt. 28 (1990).
7. Soifer V.A., Kotlyar V.V. and Doskolovich L.L. Iterative Methods for Diffractive Optical Elements Computation // London: Taylor and Francis, 1997.
8. Котляр В.В., Хонина С.Н., Соифер В.А. Метод частичного кодирования для расчета фазовых формирователей мод Гаусса-Эрмита // Автометрия, 6, 74-83 (1999).
9. Heckenberg N.R., McDuff R., Smith C.P., White A.G. Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms // Optics Letters V. 17, pp. 221 – 223 (1992).
10. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Shinkarev M.V., and Uspleniev G.V. Trochoston // Opt. Commun. V. 91, pp. 158 – 162 (1992).
11. Davis J.A., Carcole E., and Cottrell D.M. Intensity and phase measurements of nondiffracting beams generated with a magneto-optic spatial light modulator // Applied Optics, Vol. 35, No. 4, pp. 593-598 (1996).
12. Kotlyar V.V., Khonina S.N., Soifer V.A. Light field decomposition in angular harmonics by means of diffractive optics // Journal of modern optics, V. 45, No. 7, pp.1495-1506 (1998)
13. Churin E.G. Diffraction-limited laser beam shaping by use of computer-generated holograms with dislocations // Optics Letters, V. 24, No. 9, pp. 620-621 (1999).
14. Huguenin J.A.O., Santos B.C. dos, Santos P.A.M. dos, Khoury A.Z. Topological defects in moiré fringes with spiral zone plates // J. Opt. Soc. Am. A Vol. 20, No. 10, pp. 1883-1889 (2003).
15. Хонина С.Н., Котляр В.В., Соифер В.А. Дифракционные оптические элементы, согласованные с модами Гаусса-Лагерра // Компьютерная оптика, 17, 25-31 (1997).
16. Хонина С.Н. Формирование мод Гаусса-Эрмита с помощью бинарных ДОО. II. Оптимизация апертурной функции // Компьютерная оптика, 18, 28-36 (1998).
17. Досколович Л.Л., Казанский Н.Л., Харитонов С.И. Метод оценки энергетической эффективности ДОО // Компьютерная оптика, с. 47-50 (1996).
18. Davis J. A., Sigarlaki S. P., Craven J. M., and Calvo M. L. Fourier series analysis of fractal lenses: theory and experiments with a liquid-crystal display // Applied Optics, Vol. 45, No. 6, 1187-1192 (2006).
19. Хонина С.Н., Устинов А.В., Скиданов Р.В. Бинарная линза: исследование локальных фокусов // Компьютерная оптика, Т. 35, № 3, с. 339-346 (2011).
20. Хонина С.Н., Волоотовский С.Г. Фраксикон – дифракционный оптический элемент с конической фокальной областью, Компьютерная оптика, Т. 33, № 4, с. 401-411 (2009).
21. Niggel L., Lanzl T., and Maier M. Properties of Bessel beams generated by periodic gratings of circular symmetry // J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 14, No. 1, pp. 27-33 (1997).
22. Устинов А. В., Карсаков А. В., Хонина С. Н. Сравнительный анализ параболической линзы и аксикона в моделях геометрической и скалярной парааксиаль-

ной оптики // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика

С.П. Королёва (национального исследовательского университета), №4(35), с. 230-239 (2012).

SPATIALLY-SPECTRAL ANALYSIS OF BINARY DIFFRACTIVE OPTICAL ELEMENTS CODED USING THE COMPLEX-CONJUGATED ADDITION

© 2014 S.N. Khonina, A.V. Ustinov

Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara
Samara State Aerospace University named after Academician S.P. Korolyov
(National Research University)

The binary coding of diffractive optical elements using the complex-conjugated addition to satisfy technology requirements of manufacturing of optical elements is considered. Analytical and numerical investigation of a spatial spectrum of the coded elements and formation of additional diffractive orders is executed. Creation of the axial distribution of intensity on the basis of an interference of the main and additional diffractive orders is investigated in paraxial approach.

Keywords: diffractive optical elements, binary coding, diffractive orders.