

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЕЙСТВИЯ ФРАКСИКОНА С БОЛЬШОЙ ГЛУБИНОЙ ФОКУСА В РАМКАХ ВОЛНОВОЙ МОДЕЛИ

© 2014 А.В. Устинов

Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара

Поступила в редакцию 04.10.2014

В ряде предшествующих работ проводилось исследование действия фраксикона в рамках различных моделей. Данная статья завершает этот цикл и посвящена рассмотрению фраксикона с показателем, большим двух. Показано, что такой оптический элемент не имеет теневой области, что позволяет получить очень большую глубину фокуса.

*Ключевые слова:* фраксикон; метод стационарной фазы; глубина фокуса.

### ВВЕДЕНИЕ

Первоначально [1] под аксиконом понимался *любой* оптический элемент с осесимметричной формой, который преобразует свет от точечного источника, расположенного на оптической оси, в отрезок на этой же оси. Позднее аксиконом (классическим) стал называться элемент, имеющий линейную зависимость фазовой функции от радиуса – конический аксикон [2]. Кроме него имеется много других осесимметричных оптических элементов, отличающихся свойствами формируемого светового отрезка.

Одним из таких оптических элементов, точнее, классом элементов, является *фраксикон* [3]. Понятие фраксикона появилось при анализе тандема из двух оптических элементов линзы и аксикона - линзакон [4, 5] – как дифракционного элемента, выполняющего аналогичное действие. В данном случае имеется в виду формирование вдоль оптической оси конического распределения интенсивности - сужающегося или расширяющегося при удалении от оптического элемента [6].

Фазовая функция фраксикона пропорциональна степенной функции от радиуса, причём показатель степени  $g$  может быть любым положительным числом, в том числе и дробным, чем и объясняется название элемента. Линейный аксикон и параболическая линза являются частными случаями. Мы употребили слово “класс”, так как действие фраксикона существенно зависит от диапазона, в котором лежит величина показателя.

Действие фраксикона ранее рассматривалось в ряде работ. В [7] проведён геометро-оптический анализ фраксикона; в [8] анализировалось действие фраксикона в волновой парааксиальной модели; в [9-12] были рассмотрены фраксиконы с показателями  $\gamma \leq 2$  в волновой непарааксиальной модели.

Таким образом, для логического завершения описания действия фраксикона осталось лишь рассмотреть в волновой непарааксиальной модели случай показателя  $\gamma > 2$ , что и будет сделано в настоящей статье. Геометро-оптический анализ показывает, что такой элемент имеет сколь угодно большую глубину фокуса (с тенью до начала фокального отрезка). Такая глубина обеспечивается парааксиальной областью оптического элемента, в то время как начальный, самый яркий участок фокального отрезка формируется его непарааксиальной областью.

Нужно отметить, что фазовые оптические элементы с высокими показателями степени используются для кодирования волнового фронта с целью увеличения глубины поля изображающей системы [13-16], а также для уменьшения влияния хроматических аберраций [17, 18].

### 1. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЙ АМПЛИТУДЫ НА ОПТИЧЕСКОЙ ОСИ

В непарааксиальном скалярном варианте амплитуда поля *на оси* при падении произвольного радиально-симметричного пучка вычисляется по формуле

$$U(0,0,z) = -z \int_0^R E_0(r) \frac{\exp\left(ik\sqrt{r^2+z^2}\right)}{r^2+z^2} \left(ik - \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right) r dr. \quad (1)$$

Функция пропускания фраксикона определяется формулой  $\exp(-iar^\gamma)$ , в которой  $k = 2\pi / \lambda$ ;  $\alpha = (k\alpha_0)^\gamma$ ,  $\alpha_0$  - безразмерный коэффициент, определяющий степень фокусировки. При падении на фраксикон плоской волны единичной амплитуды распределение на оси в приближении тонкого оптического элемента вычисляется по формуле (1) с  $E_0(r) = \exp(-iar^\gamma)$ . Для вычисления интегралов такого вида часто применяется метод стационарной фазы. Однако при

*Устинов Андрей Владимирович, ведущий программист лаборатории лазерных измерений. E-mail: andr@smr.ru*

этом появляется (вполне объяснимое) неправильное поведение приближённого решения вблизи плоскости элемента: нарушение равенства  $\lim(z \rightarrow 0)U(0, 0, z) = E_0(0)$ . Такого неприятного эффекта можно избежать, если произвести в (1) интегрирование по частям, что в результате даёт [9]:

$$U(0, 0, z) = E_0(0) \exp(ikz) - E_0(R) \exp(ik\sqrt{R^2 + z^2}) \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} + z \int_0^R E_0'(r) \frac{\exp(ik\sqrt{r^2 + z^2})}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr. \quad (2)$$

Здесь предельное равенство выполняется независимо от погрешности вычисления интеграла. При  $E_0(r) = const$  получаем известное точное решение [19]. Для случая  $E_0(r) = \exp(-i\alpha r^\gamma)$  получим [12]:

$$U(0, 0, z) = \exp(ikz) - \exp\left[-i(k\alpha_0 R)^\gamma + ik\sqrt{R^2 + z^2}\right] \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - i\gamma(k\alpha_0)^\gamma z \int_0^R \frac{\exp\left[-i(k\alpha_0 r)^\gamma + ik\sqrt{r^2 + z^2}\right]}{\sqrt{r^2 + z^2}} r^{\gamma-1} dr. \quad (3)$$

Формула (3) верна при любом значении  $\gamma$ , но при вычислении по методу стационарной фазы начинает проявляться различие свойств подынтегральной функции в разных диапазонах значений  $\gamma$ . Элемент с показателем, не большим двух уже рассматривался ранее [9-12]. При вычислениях использовались свойства *неявной* функции зависимости стационарной точки от расстояния. Само уравнение одно и то же для любого  $\gamma$ , но свойства функции в разных диапазонах различны. Функция  $z(r_0)$  имеет вид:

$$z^2 = \frac{k^{2-2\gamma}}{\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma}} r_0^{4-2\gamma} - r_0^2. \quad (4)$$

Так как  $4 - 2\gamma < 0$ , вид графика *существенно* отличается от диапазонов  $0 < \gamma < 1$  и  $1 < \gamma < 2$  (рис. 1). При заданном  $z$  всегда есть одна стационарная точка  $r_0$ , поэтому *естественной* тени нет, что содержит противоречие с геометро-оптической теорией, где естественная тень появляется на границе полного отражения [7]. Отметим, что в диапазоне  $1 < \gamma < 2$  такое противоречие отсутствует. Величина стационарной точки не превосходит величины  $(r_0)_{\max}$ , соответствующей  $z = 0$ :

$$(r_0)_{\max} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(\gamma \alpha_0^\gamma)^{1/(\gamma-1)}}. \quad (5)$$

Если  $(r_0)_{\max} > R$ , то вблизи оптического элемента вплоть до  $z = R \cdot \sqrt{\frac{(kR)^{2-2\gamma}}{\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma}} - 1}$  будет тень от наличия входного зрачка.

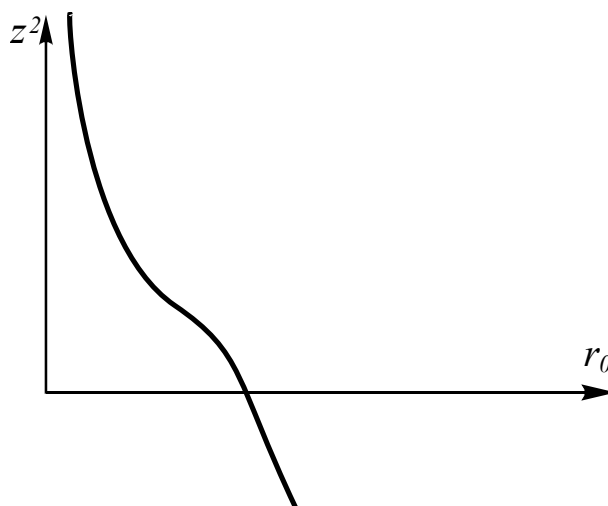


Рис. 1. Функция зависимости стационарной точки  $r_0$  и расстояния  $z$

## 2. ЧАСТНЫЕ ПРИМЕРЫ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ БОЛЬШИХ И МАЛЫХ РАССТОЯНИЙ ОТ ОПТИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА

Для более точного представления о поведении амплитуды желательно иметь (хотя бы приближённое) явное решение уравнения (4). В области  $\gamma > 2$  оно разрешимо алгебраически при двух значениях:  $\gamma = 2,5$  и  $\gamma = 3$ .

При  $\gamma = 2,5$  имеем уравнение  $r_0^3 + z^2 r_0 = \frac{1}{6,25 \alpha_0^3 k^3}$ .

Оно проще, чем аналогичное уравнение при  $\gamma = 0,5$ , так как уже имеет каноническую форму кубического уравнения, но решение всё равно громоздко. Поэтому для уяснения свойств решения ограничимся значением  $\gamma = 3$ , при котором будет более простое уравнение.

При  $\gamma = 3$  имеем уравнение

$$r_0^4 + z^2 r_0^2 = \frac{1}{9 \alpha_0^6 k^4}, \quad (6)$$

имеющее решение

$$2r_0^2 = \sqrt{z^4 + 4 / (9 \alpha_0^6 k^4)} - z^2. \quad (7)$$

В выражения других величин, используемых в методе стационарной фазы:

$$A(r_0) = \frac{r_0^2}{\sqrt{r_0^2 + z^2}}, \quad (8)$$

$$f''(r_0) = 6(k\alpha_0)^3 r_0 - \frac{kz^2}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}},$$

по причине громоздкости значение стационарной точки подставлять в общем случае не будем (подставим только в приближениях, позволяющих упростить формулы).

Подставив в (3)  $\gamma = 3$ , по методу стационарной фазы получим:

$$U(0,0,z) = U_{sp} - 3i(k\alpha_0)^3 z \cdot$$

$$\cdot A(r_0) \exp[-if(r_0)] \sqrt{2/|f''(r_0)|} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \exp(it^2) dt. \quad (9)$$

Следует отдельно упомянуть о правомерности применения метода стационарной фазы, *особенно классического*, в данном диапазоне  $\gamma > 2$ . Дело в том, что модуль подынтегральной функции в (3) возрастает с увеличением  $r$ . Но можно доказать, что ширина лепестков убывает быстрее, чем увеличивается их высота. При замене переменной  $r^\gamma = y$  факт сходимости интеграла в бесконечных пределах становится очевидным, поэтому все наши рассуждения корректны.

При определённых приближениях формулы (7), (8) можно упростить. Это возможно в двух случаях. Заметим, однако, что окрестность максимума амплитуды не попадает в области применимости этих случаев.

**Случай I.** Если  $z$  не слишком мало, по крайней мере, если  $4/(9\alpha_0^6 k^4 z^4) \ll 1/2$ , что эквивалентно  $kz > \sqrt[4]{8}/\sqrt{3}\alpha_0^{3/2}$  (при  $\alpha_0 = 0,01$   $z > 154,5\lambda$ , при  $\alpha_0 = 0,001$   $z > 4886\lambda$ ), имеем следующие приближения:

$$\begin{aligned} r_0^2 &\approx 1/(9\alpha_0^6 k^4 z^2), \\ A(r_0) &\approx 1/(9\alpha_0^6 k^4 z^3), \\ f''(r_0) &\approx k/z. \end{aligned} \quad (10)$$

$$U(0,0,z) \approx U_{sp} - i \exp[-if(r_0)] \cdot \frac{\sqrt{2}}{3\alpha_0^3 (kz)^{3/2}} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \exp(it^2) dt, \quad (11)$$

$$\text{где } t_1 \approx -\frac{1}{3\sqrt{2}\alpha_0^3 (kz)^{3/2}} \quad t_2 \approx R\sqrt{\frac{k}{2z}}.$$

**Случай II.** Теперь, наоборот, пусть  $z$  достаточно мало, тогда более точно должно выполняться неравенство  $9\alpha_0^6 k^4 z^4 / 4 \ll 1/2$ , что эквивалентно  $(kz) < \sqrt[4]{2}/\sqrt{3}\alpha_0^{3/2}$  (при  $\alpha_0 = 0,01$  это даёт  $z < 109,3\lambda$ ). В этом случае формулы (7), (8) также можно упростить:

$$\begin{aligned} r_0^2 &\approx 1/(3\alpha_0^3 k^2) - z^2/2, \\ A(r_0) &\approx 1/(\sqrt{3}\alpha_0^{3/2} k) - kz^2 \cdot (3\sqrt{3}/4)\alpha_0^{3/2}, \\ f''(r_0) &\approx 2\sqrt{3}\alpha_0^{3/2} k^2 - k^4 z^2 \cdot (3\sqrt{3}/4)\alpha_0^{9/2} \cdot (1 + \sqrt{2}). \end{aligned} \quad (12)$$

Как видим, выражения всё же достаточно длинные. Но при более жёстких условиях их можно ещё упростить. Так как перед интегралом в (3) и (9) уже есть множитель  $z$ , заменим все величины в (12) значениями, получающимися при  $z = 0$ ; это можно сделать при  $kz < 1/\sqrt{6}\alpha_0^{3/2}$  (при  $\alpha_0 = 0,01$   $z < 65\lambda$ , при  $\alpha_0 = 0,001$   $z < 2055\lambda$ ). Подставив в (11), получим

$$U(0,0,z) \approx U_{sp} - i \exp[-if(r_0)] \cdot \sqrt[4]{3}\alpha_0^{3/4} (kz) \cdot \int_{t_1}^{t_2} \exp(it^2) dt, \quad (13)$$

$$\text{где } t_1 \approx -\frac{1}{\sqrt[4]{3}\alpha_0^{3/4}} \quad t_2 \approx \left(R - \frac{1}{\sqrt{3}\alpha_0^{3/2} k}\right) \cdot \sqrt[4]{3}\alpha_0^{3/4} k$$

являются постоянными числами. То есть величина добавки к  $U_{sp}$  пропорциональна  $(kz)$ .

Последнее, применённое в (13), приближение верно и для произвольного  $\gamma$ . При  $z = 0$  уравнение (4) легко решается (см. (5)) при любом  $\gamma$ ; граница малости  $z$ , аналогичная  $kz < 1/\sqrt{6}\alpha_0^{3/2}$  приводится ниже.

Выпишем требуемые для вычисления величины в явном виде:

$$\begin{aligned} r_0 &\approx \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(\gamma\alpha_0^\gamma)^{1/(\gamma-1)}}, \\ A(r_0) &\approx r_0^{\gamma-2}, \\ f''(r_0) &\approx \gamma(\gamma-1)(k\alpha_0)^\gamma r_0^{\gamma-2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда можно получить выражение, обобщающее (13):

$$U(0,0,z) \approx U_{sp} - i \exp[-if(r_0)] \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} (\gamma\alpha_0^\gamma)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}} (kz) \cdot \int_{t_1}^{t_2} \exp(it^2) dt, \quad (15)$$

формулы для  $t_1, t_2$  писать не будем, важно, что это постоянные числа.

Посмотрим теперь, можно ли обобщить приближение не очень малого  $z$ , применённое в (10), (11). Можно показать, что (10) можно получить, не имея точного решения, а выбросив в исходном уравнении (4) слагаемое  $r_0^2$ . Если мы сделаем это при произвольном  $\gamma$ , то получим обобщение (11). Ниже мы приведём границу большого  $z$ , аналогичную  $kz > \sqrt[4]{8}/\sqrt{3}\alpha_0^{3/2}$ . В результате получим

$$\begin{aligned} r_0^{\gamma-2} &\approx 1/(\gamma\alpha_0^\gamma k^{\gamma-1} z), \\ A(r_0) &\approx r_0^{\gamma-1} / z, \\ f''(r_0) &\approx k(\gamma-2) / z. \end{aligned} \quad (16)$$

$$U(0,0,z) \approx U_{sp} - i \exp[-if(r_0)] \cdot$$

$$\cdot \frac{\sqrt{2}}{(\gamma\alpha_0^\gamma)^{1/(\gamma-2)}} \cdot \frac{1}{(kz)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-2)}}} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \exp(it^2) dt, \quad (17)$$

$$\text{где } t_1 \approx -\sqrt{\frac{\gamma-2}{2}} \frac{1}{(\gamma\alpha_0^\gamma)^{1/(\gamma-2)}} \cdot \frac{1}{(kz)^{\gamma/(2(\gamma-2))}}, \quad t_2 \approx R\sqrt{\frac{k}{2z}} (\gamma-2).$$

Всё слагаемое с интегралом убывает пропорционально  $1/z^{(\gamma-1)/(\gamma-2)}$ , с ростом  $\gamma$  показатель степени  $z$  приближается к единице. Получаем, что по порядку убывания интегральное слагаемое приближается к краевому  $U_{sp}$ . Это вполне естественно, если учесть предельную форму оп-

тического элемента, при которой сечения  $r = r_0$  и  $r = R$  становятся практически одинаковыми по своим свойствам.

Вид зависимости от  $kz$  в (15) и (17) показывает, что правый край максимума амплитуды должен быть достаточно пологий, а левый резкий, что согласуется с геометро-оптическим рассмотрением.

Попытаемся найти границы, когда  $z$  можно считать достаточно малым или достаточно большим при произвольном  $\gamma$ .

**Малые  $z$ .** Неравенство  $kz < \sqrt[4]{2}/\sqrt{3}\alpha_0^{3/2}$ , при котором верны формулы (12), нельзя получить для других  $\gamma$ , так как оно получено из явного алгебраического решения. А для неравенства  $kz < 1/\sqrt{6}\alpha_0^{3/2}$ , определяющего верность (13), можно найти аналог и, таким образом, сказать, когда верны (14), (15). Запишем (4) в следующем виде:

$$r_0^{2\gamma-2} + z^2 r_0^{2\gamma-4} = (r_0)_{\max}^{2\gamma-2}. \quad (18)$$

Значение стационарной точки из (14) получается, если подставить  $z = 0$ . Это не очень влияет на корень уравнения, если верно неравенство  $z^2 < (r_0)_{\max}^2 / 2$  или

$$kz < \frac{1}{\sqrt{2}(\gamma\alpha_0^\gamma)^{1/(\gamma-1)}}. \quad (19)$$

Например, при  $\gamma = 4, \alpha_0 = 0,01$  будет  $z < 32,9\lambda$ , а при  $\gamma = 4, \alpha_0 = 0,001$  будет  $z < 709\lambda$ .

**Большие  $z$ .** Приближение (16) получено удалением в исходном уравнении (4) слагаемого  $r_0^2$ , что означает удаление  $r_0^{2\gamma-2}$  в (18). Корень уравнения мало изменяется, если верно неравенство

$$\left(\frac{(r_0)_{\max}^2}{z^2}\right)^{\frac{2\gamma-2}{2\gamma-4}} < 1/8 \text{ или}$$

$$kz > \frac{8^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}}}{(\gamma\alpha_0^\gamma)^{1/(\gamma-1)}}. \quad (20)$$

Например, при  $\gamma = 4, \alpha_0 = 0,01$  будет  $z > 93,1\lambda$ , а при  $\gamma = 4, \alpha_0 = 0,001$  будет  $z > 2005\lambda$ .

В (13) при интеграле имеется возрастающая величина  $(kz)$ , а в (11) - убывающая величина  $(kz)^{-3/2}$ . Поэтому, если приравнять модули коэффициентов при интеграле (формально применить классический м.с.ф.), то получим некоторое, возможно, грубое приближение для положения максимума амплитуды  $z_{\max}$ . В итоге получим

$$kz_{\max} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\alpha_0^{3/2}}, \quad (21)$$

при  $\alpha_0 = 0,01$  имеем  $z_{\max} \approx 105,6\lambda$ , а при  $\alpha_0 = 0,001$  имеем  $z_{\max} \approx 3338\lambda$ .

Для произвольного  $\gamma$  можно аналогично приравнять (15) и (17). Получим

$$kz_{\max} = \frac{(\gamma-1)^{\frac{\gamma-2}{3\gamma-4}}}{(\gamma\alpha_0^\gamma)^{1/(\gamma-1)}}, \quad (22)$$

в частных примерах имеем при  $\gamma = 4, \alpha_0 = 0,01$   $z_{\max} = 61,2\lambda$ , а при  $\gamma = 4, \alpha_0 = 0,001$   $z_{\max} = 1319,6\lambda$ . Заметим, что во всех трёх примерах  $z_{\max}$  совсем немного меньше значения, среднего между границами приближений для малого и большого  $z$  (средние равны соответственно  $109,75\lambda$ ;  $3470\lambda$ ;  $63\lambda$ ;  $1357\lambda$ ). Для  $\gamma=3$  позиция максимума также близка к "мягкой" границе малого  $z$  (когда верны равенства (12)) -  $109,3\lambda$ .

Само значение максимума, очевидно, будет (по модулю) с избытком и без вне-интегральных слагаемых равно

$$U(0,0,z_{\max}) = \sqrt{2\pi i} \exp[-if(r_0)] \cdot (\gamma-1)^{\frac{\gamma}{4(3\gamma-4)}} (\gamma\alpha_0^\gamma)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}}. \quad (23)$$

При  $\gamma = 3$  получаем

$$U(0,0,z_{\max}) = \sqrt{2\pi i} \exp[-if(r_0)] \cdot 2^{-\frac{3}{20}} (3\alpha_0^3)^{\frac{1}{4}},$$

а при  $\gamma = 4$  будет

$$U(0,0,z_{\max}) = \sqrt{2\pi i} \exp[-if(r_0)] \cdot 3^{\frac{1}{8}} (4\alpha_0^4)^{\frac{1}{6}}.$$

Для  $\gamma = 3$  можно попытаться найти другое приближение. Используя равенства (9) и (12),

находим максимум дроби  $\frac{zA(r_0)}{\sqrt{f''(r_0)}}$ . В самом первом приближении (с недостатком) получаем

$$kz_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}\alpha_0^{3/2}}, \text{ при } \alpha_0 = 0,01 \text{ имеем } z_{\max} \approx 61,3\lambda.$$

Это даже меньше границы приближения (15) -  $65\lambda$ . Значение максимума при этом равно

$$U(0,0,z_{\max}) = \sqrt{2\pi i} \exp[-if(r_0)] \cdot 2^{\frac{3}{2}} 3^{-\frac{9}{4}} \alpha_0^{-3/4}, \text{ что почти в три раза меньше значения с избытком.}$$

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В данном разделе приведены результаты моделирования, основанного на прямом расчете выражения (1) методом численного интегрирования. В табл. 1 показаны расчеты при  $\lambda = 1 \mu\text{м}$  для  $\gamma = 3$  и  $\gamma = 4$  при  $\alpha_0 = 0,01$ , а в табл. 2 для  $\alpha_0 = 0,001$ . Радиус оптического элемента  $R$  выбирался так, чтобы период краевой зоны не был менее длины волны, а также, чтобы не было тени от входного зрачка. Для этого радиус должен быть не менее  $92\lambda$  и  $46,5\lambda$  в табл. 1, и  $2906\lambda$  и  $1003\lambda$  в табл. 2, значение минимального радиуса вычислено по формуле (5).

Визуальное наблюдение графиков интенсивности из табл. 1 и 2 позволяет сделать следующие выводы:  
- вид распределения вдоль оси качественно соответствует геометро-оптическому.

Таблица 1. Расчеты для  $\gamma = 3$  и  $\gamma = 4$  при  $\alpha_0 = 0,01$

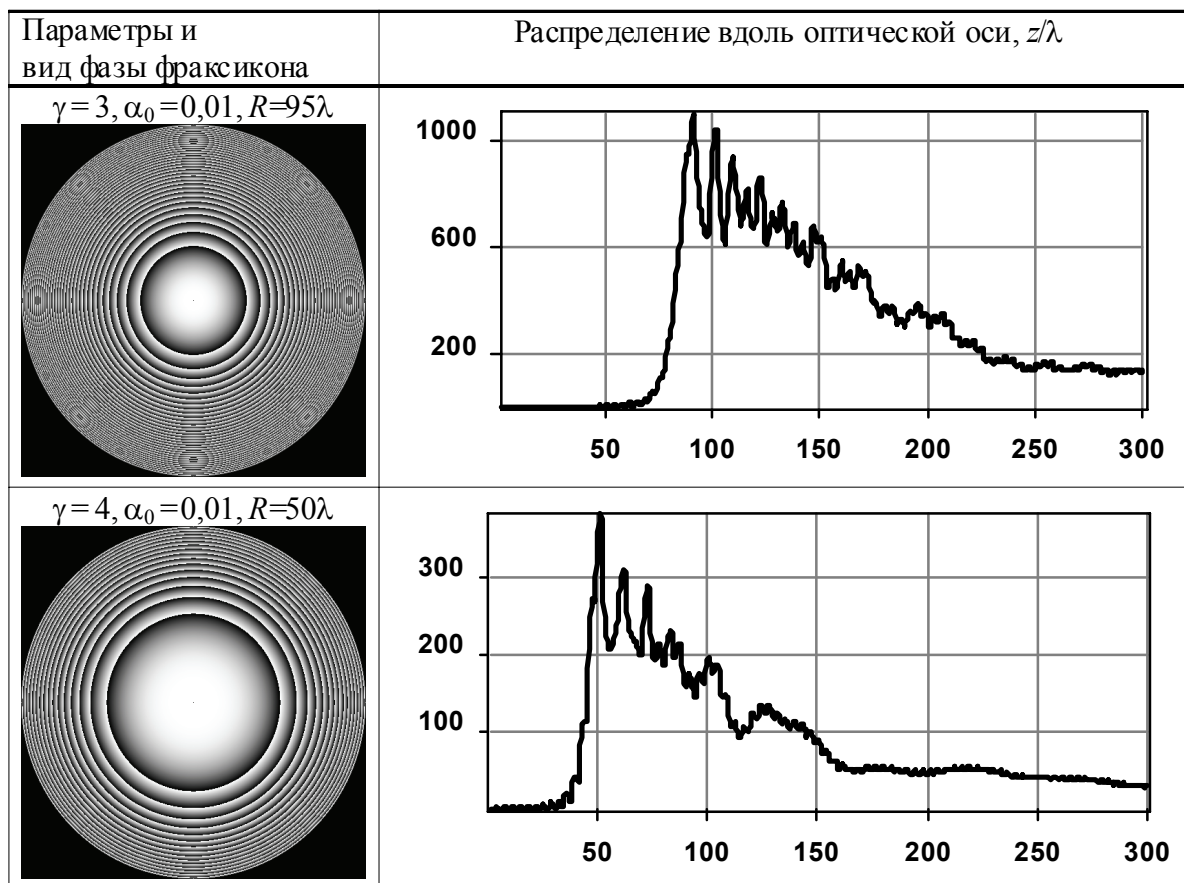
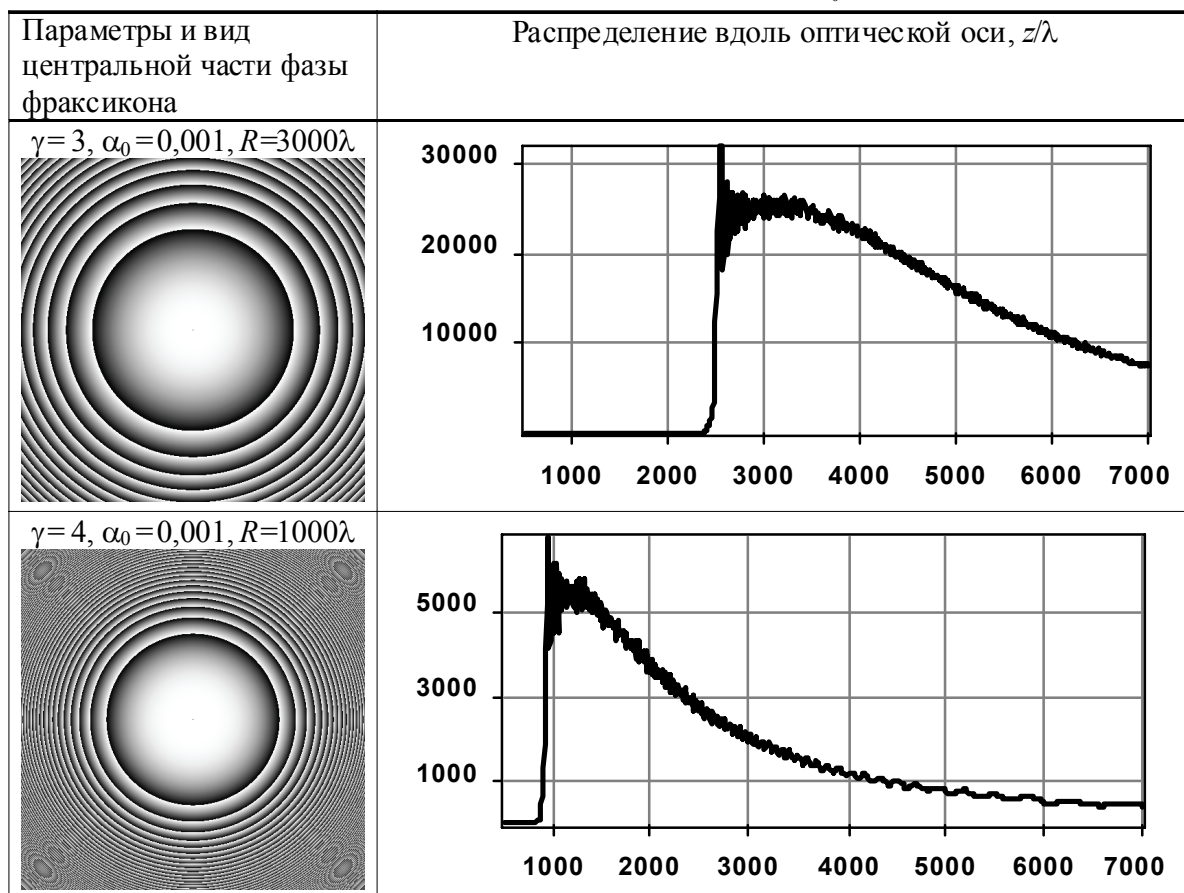


Таблица 2. Расчеты для  $\gamma = 3$  и  $\gamma = 4$  при  $\alpha_0 = 0,001$



- упомянутое после формулы (4) утверждение об отсутствии тени скорее формальное, чем количественное, так как интенсивность в этой области очень мала.

- приближение малого расстояния почти не применимо, так как оно справедливо в области очень малой интенсивности; в то же время приближение большого расстояния применимо в большой области, которая начинается с места, где интенсивность падает примерно вдвое по сравнению с максимумом.

- вычисленные по (22) позиции максимумов всегда получаются больше, чем найденные численно, причём для более слабого (с меньшим  $\alpha_0$ ) элемента относительная погрешность больше (32.5% против 20%). Хотя такая погрешность не очень мала, мы всё же можем говорить о хорошем согласии с теорией, так как погрешность теоретического значения изначально предполагалась не очень малой.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено действие фраксикона с показателем степени  $\gamma > 2$  в непараксиальной модели. Для частного значения  $\gamma = 3$  получено приближённо-аналитическое выражение для комплексной амплитуды на оптической оси, а для других значений показателя – выражения, достаточно точные вблизи оптического элемента и вдалеке от него. В последнем случае приведены границы расстояний, начиная с которых эти выражения применимы. Получены приближенные значения для положения и величины максимума амплитуды. Результаты позволяют сделать вывод о том, что качественно имеет место согласие с геометро-оптической моделью, а для положения фокуса имеется и количественное согласие с результатами численного моделирования.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *McLeod J.H.* The axicon: a new type of optical element // Journal of the Optical Society of America. 1954. V.44. P. 592-597.
2. *Fujiwara J.* Optical properties of conic surfaces. I. Reflecting cone // Journal of the Optical Society of America. 1962. V.52. P. 287-292.
3. *Хонина С.Н., Волотовский С.Г.* Фраксикон – дифракционный оптический элемент с конической фокальной областью // Компьютерная оптика. 2009. Т.33. №4. С. 401-411.
4. *Lensacon / V.P. Koronkevich, I.A. Mikhaltsova, E.G. Churin, Y.I. Yurlov* // Applied Optics. 1995. V. 34(25). P.5761-5772.
5. *The lensacon: nonparaxial effects / S.N. Khonina, N.L. Kazanskiy, A.V. Ustinov, and S.G. Volotovskiy* // Journal of Optical Technology. 2011. V. 78 (11). P. 724-729.
6. *Fractional axicon as a new type of diffractive optical element with conical focal region / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, S.G. Volotovskiy* // Precision Instrument and Mechanology. 2013. Vol. 2 (4). P. 132-143.
7. *Устинов А.В., Хонина С.Н.* Геометро-оптический анализ обобщённой рефракционной линзы // Известия Самарского научного центра РАН. 2012. Т.14. №4. С. 28-37.
8. *Устинов А.В., Хонина С.Н.* Обобщённая линза: анализ осевого и поперечного распределения / А.В. Устинов, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. 2013. Т.37. №3. С. 307-315.
9. *Устинов А.В., Хонина С.Н.* Анализ дифракции плоского пучка на рассеивающем фраксиконе в непараксиальном режиме // Компьютерная оптика. 2014. Т.38. №1. С. 42-50.
10. *Устинов А.В., Хонина С.Н.* Расчёт дифракции плоской волны на рассеивающем дробном аксиконе с учётом затухающих волн // Известия Самарского научного центра РАН. 2014. Т.16. №4. С. 34-41.
11. *Устинов А.В., Хонина С.Н.* Анализ дифракции лазерного излучения на аксиконе с числовой апертурой выше предельной // Компьютерная оптика. 2014. Т.38. №2. С. 213-222.
12. *Устинов А.В., Хонина С.Н.* Фраксикон как гибридный элемент между параболической линзой и линейным аксиконом // Компьютерная оптика. 2014. Т.38. №3. С. 402-411.
13. *Dowski E.R., Cathey W.T.* Extended depth of field through wavefront coding // Appl. Opt. 1995. Vol. 34. P.1859-1866.
14. *Extending the imaging volume for biometric iris recognition / R.Narayanaswamy, G.E. Johnson, P.E.X. Silveira and H.B. Wach* // Appl. Opt. 2005. Vol. 44. P. 701-712
15. *Хонина С.Н.* Фазовая аподизация изображающей системы с целью увеличения глубины фокуса в когерентном и некогерентном случаях // Компьютерная оптика. 2012. Т. 36. № 3. С. 357-364
16. *Khonina S.N., Demidov A.S.* Extended depth of focus through imaging system's phase apodization in coherent and incoherent cases // Optical Memory and Neural Networks (Allerton Press). 2014. Vol. 23(3). P. 130-139.
17. *Extended depth of field and aberration control for inexpensive digital microscope systems / S.C. Tucker, W.T. Cathey and E.R. Dowski* // Opt. Express. 1999. Vol. 4(11). P. 467-474.
18. *Control of chromatic focal shift through wavefront coding / H. Wach, E.R. Dowski and W.T. Cathey* // Appl. Opt. – 1998. – Vol. 37. – P. 5359-5367.
19. *Dubra A., Ferrari J.A.* Diffracted field by an arbitrary aperture // American Journal of Physics. 1999. Vol. 67(1). P. 87-92.

## THEORETICAL ANALYSIS OF FRACXICON WITH GREAT DEPTH OF FOCUS IN FRAME OF WAVE MODEL

© 2014 A.V. Ustinov

Images Processing Systems Institute of the RAS, Samara

In a number of previous studies a fracxicon action is surveyed under different models. This article concludes this cycle and is devoted to the fracxicon with power greater than two. It is shown that such an optical element does not have a shadow area, which gives a very large depth of focus.

*Key words:* fracxicon; the method of stationary phase; depth of focus.

*Andrey Ustinov, Leading Programmer of the Laser Measurements Laboratory. E-mail: andr@smr.ru*