

УДК.621.391 (075)

## СИНТЕЗ ВОЛНОВОЙ МОДЕЛИ МНОГОМЕРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ С ЗАДАННОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ

© 2014 В.Р. Крашенинников, Р.Р. Микеев, В.В. Тишкин

Ульяновский государственный технический университет

Поступила в редакцию 22.10.2014

Рассматривается построение модели изотропного случайного поля с заданной корреляционной функцией произвольного вида. Задача решается с использованием волновой модели, в которой волны являются суммой гауссоид. Полученная модель позволяет имитировать изображения, определённые на произвольных областях многомерного пространства, а также на любых поверхностях.

Ключевые слова: *изображение, случайное поле, волновая модель, корреляционный синтез, имитация изображения*

Случайные поля (СП) широко используются для представления различных многомерных данных, например, временных последовательностей изображений [1], рельефа планет [2], морского волнения [3-5], медицинских изображений [6] и т.д. Многообразие этих данных требует достаточно общих математических моделей СП. Желательно, чтобы эти модели позволяли решать задачи анализа и синтеза. То есть должна быть возможность по известным параметрам модели определить вероятностные свойства СП, описываемое этой моделью, и наоборот, так выбрать параметры модели, чтобы она порождала СП с заданными свойствами. Кроме того, нужно иметь модели, пригодные для имитации изображений. Это требуется для визуальной оценки получаемых изображений и для тестирования алгоритмов их обработки. К настоящему времени разработан целый ряд моделей СП, например, авторегрессионные, разложения и некаузальные [7-9], однако решение задач анализа и синтеза с их помощью вызывает значительные затруднения.

В данной работе рассматривается волновая модель СП [7], удобная для имитации и решения задач корреляционного анализа и синтеза [10, 11], в том числе для моделирования последовательностей изображений и изображений, определённых на поверхностях [12]. При этом используется небольшое количество параметров модели.

**Волновая модель случайного поля.** В волновой модели [7] СП определяется равенством

$$x_j^t = \sum_{\{k: \tau_k \leq t\}} f((\bar{j}, t), (\bar{u}_k, \tau_k), \bar{\omega}_k) \quad (1)$$

где  $x_j^t$  – значение СП в точке  $\bar{j}$  в момент времени  $t$ ;  $(n+1)$ -мерная область определения  $\{(\bar{j}, t)\}$  поля

может быть сеточной или непрерывной;  $\{(\bar{u}_k, \tau_k)\}$  – дискретное поле случайных точек (ПСТ) в  $(n+1)$ -мерном непрерывном пространстве;  $t$  и  $\tau_k$  интерпретируются как время;  $\bar{\omega}_k$  – случайный вектор параметров функции  $f$ . Это поле можно представить как результат воздействия случайных возмущений или волн  $f((\bar{j}, t), (\bar{u}_k, \tau_k), \bar{\omega}_k)$ , возникающих в случайных местах  $\bar{u}_k$  в случайные моменты времени  $\tau_k$  и изменяющихся по заданному закону во времени и пространстве. Выбор функции  $f$ , параметров ПСТ и распределения параметров  $\bar{\omega}_k$  позволяет получить широкий класс полей, включающий в себя в виде частных случаев практически все известные модели СП.

**Модель случайного поля с монотонной корреляционной функцией.** Рассмотрим частный случай волновой модели, для которой корреляционные задачи анализа и синтеза легко решаются. Пусть

$$f((\bar{j}, t), (\bar{u}_k, \tau_k), \bar{\omega}_k) = g(\rho_k / R_k) \exp(-\mu |t - \tau_k|) \xi_k \quad (2)$$

где  $g(v)$  – некоторая функция; ПСТ – пуассоновское с постоянной плотностью  $\lambda$ ;  $\rho_k = |\bar{j} - \bar{u}_k|$  – расстояние между  $\bar{j}$  и  $\bar{u}_k$ ;  $\{R_k\}$  – система независимых неотрицательных одинаково распределённых случайных величин с ПРВ  $w(\alpha)$ ;  $\{\xi_k\}$  – система независимых одинаково распределённых случайных величин. В этом случае волны неподвижны, независимы между собой, имеют сферические сечения по пространству и экспоненциально затухают со временем; система  $\{\xi_k\}$  определяет интенсивность волн, а  $\{R_k\}$  – их пространственный масштаб.

Крашенинников Виктор Ростиславович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика». E-mail: kvr@ulstu.ru  
Микеев Руслан Раилевич, программист. E-mail: ameekey@gmail.com  
Тишкин Вадим Викторович, студент

Порождаемое поле  $X$  стационарно, однородно, имеет нулевое среднее и при

$$g(y) = c \exp(-2y^2), \quad (3)$$

имеет изотропную по пространству корреляционную функцию (КФ)

$$V(\rho, t) = \frac{c^2 \pi^{n/2} \lambda}{2^{n+1}} e^{-\mu t} \int_0^\infty \alpha^n \exp\left(-\frac{\rho^2}{\alpha^2}\right) w(\alpha) d\alpha, \quad (4)$$

где  $\rho$  – расстояние по пространству и  $t$  – расстояние по времени.

Имитация дискретного поля на  $n$ -мерной сетке  $\{\bar{j}\}$  с шагом квантования  $\Delta t$  по времени может быть осуществлена с помощью следующего алгоритма. В начальный момент  $t_0 = 0$  значения поля во всех узлах равны нулю. В каждый следующий момент  $t_m = m\Delta t$  формируется пуассоновское ПСТ с плотностью  $\lambda\Delta t$ . В каждой сформированной точке ПСТ  $\bar{u}_k$  разыгрываются случайные величины  $\xi_k$  и  $R_k$ , после чего производится преобразование

$$x_j^{t_m} = x_j^{t_{m-1}} \exp(-\mu \cdot \Delta t) + \sum_k g(\rho_k / R_k) \xi_k \quad (5)$$

всех значений поля.

Достоинством этого алгоритма является его рекуррентность, что позволяет легко реализовать имитацию поля на ЭВМ. Значения СП можно вычислять только в нужных точках с любыми координатами (целыми или дробными). В авторегрессионных моделях такой возможности нет, так как значения вычисляются последовательно строка за строкой. Можно также имитировать последовательность кадров любой длительности. В моделях взвешенных сумм такой возможности нет.

Рассмотрим решение корреляционных задач анализа и синтеза. Из (4) следует, что построенное поле имеет экспоненциальную НКФ  $r_t(t) = e^{-\mu t}$  по времени и НКФ

$$r(\rho) = \frac{1}{M[R^n]} \int_0^\infty \alpha^n \exp(-\rho^2 / \alpha^2) w(\alpha) d\alpha \quad (6)$$

по пространству. При этом  $V(\rho, t) = \sigma_r^2 r(\rho) r_t(t)$ .

Таким образом, при решении задачи анализа, когда ПРВ  $w(\alpha)$  задана, искомая НКФ (6) может быть найдена аналитически или численным интегрированием. При решении задачи синтеза, когда задана КФ  $r(\rho)$ , нужно решить интегральное

уравнение (6) относительно неизвестной ПРВ  $w(\alpha)$ . Поскольку найти аналитическое решение задачи синтеза удается не всегда, рассмотрим метод ее приближенного решения. Из (6) следует, что при вырожденном распределении ( $R = \alpha = const$ ) получаем НКФ  $\exp(-\rho^2 / \alpha^2)$ . Пусть теперь задана произвольная невозрастающая НКФ  $r(\rho)$ . Аппроксимируем ее с достаточной точностью суммой гауссоид с положительными коэффициентами:

$$r(\rho) \approx h(\rho) = \sum_i q_i \exp(-\rho^2 / \alpha_i^2), \quad (7)$$

где  $\sum_i q_i = 1$ , так как  $r(0) = 1$ . Тогда при дискретном распределении  $P(R = \alpha_i) = k^{-1} q_i / \alpha_i^n$ , где  $k = \sum q_i / \alpha_i^n$ , порождаемое поле будет иметь НКФ, равную  $h(\rho)$ . Таким образом, построенная модель позволяет приближенно решать задачу синтеза с помощью вариации только распределения вероятностей масштаба  $R$ .

**Реализация немонотонной корреляционной функции.** Существенным ограничением в приведённом выше решении задачи синтеза является предположение о монотонности заданной КФ  $r(\rho)$ , так как в противном случае аппроксимация (7) немонотонной функции убывающими гауссоидами становится невозможной. Для того, чтобы КФ порождаемого СП была немонотонной, нужны немонотонные по пространству волны. Для этого сначала возьмём вместо (3) функцию

$$g(y) = \sum_{k=1}^K c_k \exp(-\beta_k y^2), \quad (8)$$

то есть каждая волна будет являться суммой  $K$  гауссоид. Тогда при вырожденном распределении ( $R = \alpha = const$ ) по пространству получаем вместо (7) НКФ

$$r(\rho) = B \sum_{k,l=1}^K \frac{c_k c_l}{(\beta_k + \beta_l)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\beta_k \beta_l \rho^2}{\beta_k + \beta_l \alpha^2}\right), \quad (9)$$

где  $B = \left(\sum_{k,l=1}^K \frac{c_k c_l}{(\beta_k + \beta_l)^{n/2}}\right)^{-1}$  – нормирующий множитель. В частности, при  $n = 2, K = 2$ , то есть для двумерного СП с волнами в виде суммы двух гауссоид, получаем НКФ в виде суммы трёх гауссоид:

$$r(\rho) = B \left[ \frac{c_1^2}{2\beta_1} \exp\left(-\frac{\beta_1 \rho^2}{2\alpha^2}\right) + \frac{2c_1 c_2}{\beta_1 + \beta_2} \exp\left(-\frac{\beta_k \beta_l \rho^2}{(\beta_k + \beta_l) \alpha^2}\right) + \frac{c_2^2}{2\beta_2} \exp\left(-\frac{\beta_2 \rho^2}{2\alpha^2}\right) \right] \quad (10)$$

с нормирующим множителем  
 $B = \left( \frac{c_1^2}{2\beta_1} + \frac{2c_1c_2}{\beta_1 + \beta_2} + \frac{c_2^2}{2\beta_2} \right)^{-1}$ . Например, при  
 $c_1 = 2, c_2 = -1, \beta_1 = 0.4, \beta_2 = 0.2$  имеем НКФ

$$r(\rho) = 6\exp\left(-\frac{0.2}{\alpha^2}\rho^2\right) - 8\exp\left(-\frac{2}{15\alpha^2}\rho^2\right) + 3\exp\left(-\frac{0.1}{\alpha^2}\rho^2\right) \quad (11)$$

график которой показан на рис. 1.

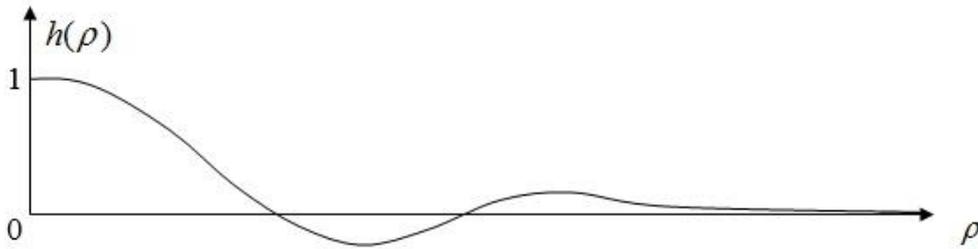


Рис. 1. График нормированной корреляционной функции (11)

Для нахождения НКФ при невырожденном распределении коэффициента масштаба нужно в (6) вместо  $\exp(-\rho^2/\alpha^2)$  подставить (8). Более широкий класс КФ можно получить при использовании смещённых гауссоид:

$$g(y) = \sum_{k=1}^K c_k \exp(-\beta_k (y - a_k)^2) \quad (12)$$

то есть имитированное изображение будет состоять из «кольчатых» пятен. Тогда НКФ примет вид

$$B \sum_{k,l=1}^K \frac{c_k c_l}{(\beta_k + \beta_l)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\beta_k \beta_l}{\beta_k + \beta_l} \frac{(\rho + a_l - a_k)^2}{\alpha^2}\right) \quad (13)$$

Выражение (9) есть частный случай (13) при нулевых смещениях  $a_k = 0$ . Если в (13) взять одинаково смещённые гауссоиды ( $\beta_k = \beta$ ), то получаем

$$B \sum_{k,l=1}^K c_k c_l \exp\left(-\frac{\beta}{2\alpha^2} (\rho + a_l - a_k)^2\right) \quad (14)$$

В (17) размерность СП влияет только на нормирующий множитель  $B$ . При равноотстоящих смещениях  $a_k = (k-1)a$  имеем

$$g(y) = \sum_{k=0}^{K-1} c_k \exp(-\beta(y - ka)^2) \quad (15)$$

что порождает СП с НКФ

$$B \sum_{k,l=0}^{K-1} c_k c_l \exp\left(-\frac{\beta}{2\alpha^2} (\rho - (k-l)a)^2\right) \quad (16)$$

В этом случае волны (15) и НКФ (16) имеют одинаковую структуру, они состоят из гауссоид с одинаковыми кратными смещениями. Рассмотрим частный случай, когда  $c_k = (-1)^k, \alpha = 1$ :

$$g(y) = \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k \exp(-\beta(y - ka)^2) \quad (17)$$

$$B \sum_{k,l=0}^{K-1} (-1)^{k+l} \exp\left(-\frac{\beta}{2} (\rho - (k-l)a)^2\right) \quad (18)$$

При достаточно большом значении смещения  $a$  графики сечения волны (17) и НКФ (18) имеют вид, показанный на рис. 2.

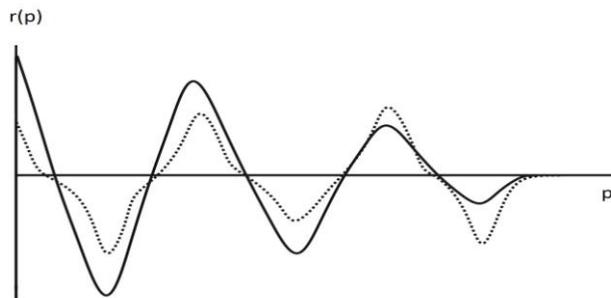


Рис. 2. Графики сечения волны (17) (пунктир) и соответствующей НКФ (18) при  $K=6$  (шесть гауссоид),  $a=10$ . Пересечения с осью абсцисс в точках, примерно кратных  $a$ .

**Приближённое решение задачи синтеза.**

Пусть задана НКФ  $r(\rho)$ , тогда требуется подобрать параметры  $K, \alpha_k, \beta_k, c_k$ , при которых порождаемое СП имеет НКФ (13), достаточно близкую к заданной  $r(\rho)$ . Аналитически решить эту задачу удаётся только в некоторых частных случаях, когда и сама  $r(\rho)$  задана аналитическим выражением. Обычно же  $r(\rho)$  оценена по конкретным изображениям и поэтому задана таблично на системе точек. Поэтому задачу синтеза будем решать приближённо, а именно, будем подбирать параметры модели, минимизируя средний квадрат ошибки аппроксимации НКФ. Проведенные исследования показали, что очень удобным для этой задачи является метод деформируемого многогранника Нелдера-Мида [13].

**Пример аппроксимации и имитации.**

Пусть требуется построить волновую модель на

плоскости с НКФ  $r(\rho) = \text{sinc}(0.3\rho)$  на отрезке  $[0;18]$  с шагом 0,25 (рис. 3). Для аппроксимации требуется определить количество  $K$  смещённых гауссоид, которое подбиралось опытным путём постепенным увеличением. Оказалось, что достаточно хорошее приближение достигается при шести гауссоидах (рис. 3), максимальная ошибка аппроксимации равна 0,005017. Дальнейшее увеличение количества гауссоид можно считать нецелесообразным. Этот и другие примеры показывают, что достаточно хорошая аппроксимация достигается при количестве гауссоид, равном числу экстремумов НКФ на отрезке аппроксимации (на рис. 3 их шесть). На рис. 4 приведен пример имитации изображения с помощью описанной модели. На имитированных изображениях была вычислена выборочная КФ, которая оказалась достаточно близкой к заданной КФ и её аппроксимации.

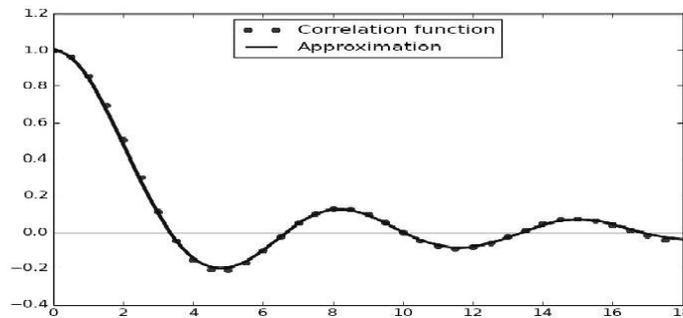


Рис. 3. График НКФ  $r(\rho) = \text{sinc}(0.3\rho)$  и её аппроксимации с помощью шести гауссоид

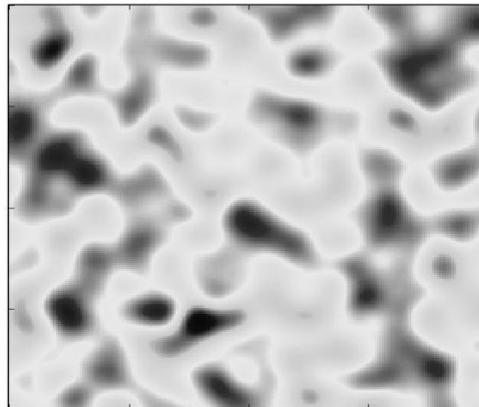


Рис. 4. Реализация случайного поля на основе волновой модели

**Выводы:** волновые модели позволяют представлять и имитировать многомерные СП с широким классом заданных КФ, включая немонотонные и анизотропные, что достигается вариацией небольшого количества параметров. При этом возможна имитация отдельных изображений и их последовательностей.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-01-00320.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:**

1. Васильев, К.К. Статистический анализ последовательностей многомерных изображений / К.К. Васильев, В.Р. Крашенинников, А.Г. Ташлинский // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2013. Т.14, № 5. С. 5-11.
2. Крашенинников, В.Р. Модель и алгоритм имитации мегарельефа планет в виде изображения на поверхности / В.Р. Крашенинников, Р.Р. Микеев, М.В. Кузьмин // Радиотехника. Журнал в журнале. Радиосистемы. Математическое моделирование ин-

- фокоммуникационных систем. 2012. Вып. 175. С. 65-67.
3. Крашенинников, В.Р. Имитатор воздействия морского волнения с заданным спектром на испытательную платформу / В.Р. Крашенинников, Е.А. Гладких // Патент РФ на полезную модель № 95156 от 10.06.2010 г.
  4. Гладких, Е.А. Авторегрессионная трехмерная модель для имитации морского волнения с аппроксимацией заданного спектра / Е.А. Гладких, В.Р. Крашенинников // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова. Серия: Научная сессия, посвященная Дню радио. Выпуск LXIII. – М., 2008. С. 383-385.
  5. Крашенинников, В.Р. Имитатор динамической волновой поверхности / В.Р. Крашенинников, А.А. Аникин, А.Н. Васильев // Труды LX научной сессии, посвященной Дню радио, Российское НТО РЭС им. А.С.Попова. – М., 2005. С. 273-285.
  6. Крашенинников, В.Р. Модель изображения фона фации биологической жидкости / В.Р. Крашенинников, А.С. Копылова, А.В. Тарасова // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова. Серия: Научная сессия, посвященная Дню радио. Выпуск LXVII. – М., 2012. С.407-410.
  7. Васильев, К.К. Статистический анализ многомерных изображений / К.К. Васильев, В.Р. Крашенинников. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. 170 с.
  8. Мальшиев, В.А. Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений / В.А. Мальшиев, Р.А. Минлос. – М.: Наука, 1985. 288 с.
  9. Шалыгин, А.С. Прикладные методы статистического моделирования / А.С. Шалыгин, Ю.И. Палагин. – Л.: Машиностроение, 1986. 320 с.
  10. Крашенинников, В.Р. Моделирование и имитация случайного поля с заданной корреляционной функцией. Мат-лы 3-й науч.-практ. интернет-конференции «Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики» 20-21 февраля 2014 г. / отв. ред. Ю.С. Нагорнов. – Ульяновск: SIMJET, 2014. С. 225-232.
  11. Крашенинников, В.Р. The synthesis of wave model of a multidimensional random field with a given nonmonotone correlation function. Proceedings of 11th International Conference on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies, PRIA-11-2013. Samara, IPSI RAS. 2013, Volume I. P. 225-227.
  12. Крашенинников, В.Р. Wave Image Models on the Surfaces. Proceedings of 8th Open German-Russian Workshop “Pattern Recognition and Image Understanding” OGRW-8-2011. Nizhny Novgorod, 2011. P. 154-157.
  13. Банди, Б. Методы оптимизации. Вводный курс. – М.: Радио и связь, 1988. 128 с.

## THE SYNTHESIS WAVE MODEL OF MULTIDIMENSIONAL RANDOM FIELD WITH A GIVEN CORRELATION FUNCTIONS

© 2014 V.R. Krasheninnikov, R.R. Mikeev, V.V. Tishkin

Ulyanovsk State Technical University

The synthesis of a model of an isotropic random field with a given correlation function of any kind is considered. The problem is solved using the wave model, in which the waves are sum of gaussoids. The resulting model allows to simulate the image, defined on arbitrary regions of multidimensional space, as well as on any surfaces.

Key words: *image, random field, wave model, correlation synthesis, arbitrary correlation function, image imitation*

---

Viktor Krasheninnikov, Doctor of Technical Sciences, Professor,  
Head of the Department “Applied Mathematics and Computing  
Science”. E-mail: kvr@ulstu.ru  
Ruslan Mikeev, Programmer. E-mail: ameekey@gmail.com  
Vadim Nishkin, Student