

УДК 629.7

## ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДОВ РУНГЕ-КУТТЫ В ЗАДАЧЕ УМЕНЬШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА МИКРОСПУТНИКА

© 2015 В.В. Любимов, В.С. Лашин

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева  
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 30.07.2015

Рассматривается задача о численном моделировании процесса демпфирования микроспутника с электромагнитными исполнительными органами. При численном интегрировании системы уравнений движения микроспутника используется семиэтапный метод Рунге-Кутты. Производится оценка погрешностей при численном интегрировании уравнений движения посредством применения семиэтапного и четырехэтапного явных методов Рунге-Кутты.

*Ключевые слова:* погрешность, кинетический момент, микроспутник, численное интегрирование, метод Рунге-Кутты.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В современной космонавтике при управлении вращательным движением микроспутника наиболее часто используются магнитные системы управления, которые основаны на взаимодействии магнитного поля спутника с геомагнитным полем [1, 2]. Такие системы в основном используются на микроспутниках, поскольку для них характерны небольшими управляющими моментами. Электромагнитные катушки применяются в современных системах управления ориентацией спутников также для уменьшения кинетических моментов двигателей-маховиков [3].

При движении по орбите на спутник оказывают влияние различные возмущающие силовые факторы [4-6]. Кроме того, в процессе отделения от базового космического аппарата микроспутник приобретает остаточные угловые скорости [7], которые требуется минимизировать для обеспечения требуемой его ориентации. Этап управления, при котором происходит минимизация угловых скоростей, называется предварительным успокоением микроспутника. Предварительное успокоение вращательного движения может производиться за счет взаимодействия магнитного поля электромагнитов с геомагнитным полем.

Пусть на борту микроспутника находятся три магнитометра, расположенные вдоль главных осей инерции. В качестве управляющих органов используются три электромагнита, расположенных вдоль главных осей инерции микроспутника.

Математическая модель системы управления успокоением микроспутника включает динамические и кинематические уравнения Эйлера. Ди-

намические уравнения вращательного движения спутника имеют вид:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{M}_c + \vec{M}_p, \quad (1)$$

где  $\vec{K} = (K_x, K_y, K_z)$  – вектор кинетического момента микроспутника;  $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  – вектор угловой скорости микроспутника;  $\vec{M}_c = (M_{cx}, M_{cy}, M_{cz})$  – вектор управляющего момента;  $\vec{M}_p = (M_{px}, M_{py}, M_{pz})$  – вектор возмущающих моментов.

Механический управляющий момент, действующий на микроспутник спутник  $\vec{M}_c$ , в проекциях на оси  $X, Y, Z$  главной связанной системы координат  $OXYZ$  имеет вид:

$$\begin{aligned} M_{cx} &= L_y B_z - L_z B_y, \\ M_{cy} &= L_z B_x - L_x B_z, \\ M_{cz} &= L_x B_y - L_y B_x, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$  – вектор магнитного момента микроспутника.

Предположим, что закон управления вектором магнитного момента электромагнитных катушек при предварительном успокоении имеет вид [8]:

$$\vec{L} = -k_c \frac{\vec{K} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (3)$$

Здесь  $k_c$  – коэффициент управления,  $B$  – модуль вектора магнитной индукции геомагнитного поля.

При определении углов ориентации изменялись кинематические уравнения Эйлера, записываемые в следующем виде:

*Любимов Владислав Васильевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики. E-mail: math@ssau.ru*  
*Лашин Вячеслав Сергеевич, аспирант.*

$$\begin{aligned}
 d\theta / dt &= \omega_z \cos \varphi + \omega_y \sin \varphi + \tilde{\omega}_{yM} \sin \psi - \tilde{\omega}_{zM} \cos \psi; \\
 d\psi / dt &= (\omega_z \sin \varphi - \omega_y \cos \varphi) / \sin \theta - \\
 &\quad - \tilde{\omega}_{xM} + \tilde{\omega}_{yM} \operatorname{ctg} \theta \cos \psi + \tilde{\omega}_{zM} \operatorname{ctg} \theta \sin \psi; \\
 d\varphi / dt &= \omega_x - d\psi / dt \cos \theta - \tilde{\omega}_{zM} \sin \theta \sin \psi.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Здесь  $\tilde{\omega}_{xM}, \tilde{\omega}_{yM}, \tilde{\omega}_{zM}$  – угловые скорости вращения магнитной системы координат относительно неподвижной геоцентрической системы координат [5].

Численное решение системы из уравнений (1), (4) рассматривается совместно с решением уравнений, характеризующих движение микро-спутника по орбите. Решение осуществляется посредством использования двух явных методов: четырехэтапного и семиэтапного методов Рунге-Кутты. В семиэтапном методе используется формула Дормана-Принса [9]. Четырехэтапный метод является классическим, и в дальнейшем будем использовать сокращенное название РК4.

### ЯВНЫЙ ОДНОШАГОВЫЙ СЕМИЭТАПНЫЙ МЕТОД РУНГЕ-КУТТЫ (РК7)

Семейство явных одношаговых методов Рунге-Кутты задается формулами

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^s b_i k_i,$$

где  $h$  – величина шага интегрирования. Здесь вычисление нового значения проходит в  $s$  этапов:

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$

$$k_2 = hf(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1),$$

...

$$k_s = hf(x_n + c_s h, y_n + a_{s1} k_1 + a_{s2} k_2 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1}).$$

Конкретный метод определяется числом  $s$  и коэффициентами  $b_i, a_{ij}$  и  $c_i$ . Эти коэффициенты упорядочивают в таблицу [9], называемую таблицей Бутчера. Таблица Бутчера при использовании формулы Дормана-Принса содержится в [9]. Используя коэффициенты из указанной таблицы, составим формулы для семиэтапного метода Рунге-Кутты:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_n, y_n); \\
 k_2 &= f(x_n + \frac{1}{5}h, y_n + \frac{1}{5}k_1 h); \\
 k_3 &= f(x_n + \frac{3}{10}h, y_n + h(\frac{3}{40}k_1 + \frac{9}{40}k_2)); \\
 k_4 &= f(x_n + \frac{4}{5}h, y_n + h(\frac{44}{45}k_1 - \frac{56}{15}k_2 + \frac{32}{9}k_3)); \\
 k_5 &= f(x_n + \frac{8}{9}h, y_n + h(\frac{19372}{6561}k_1 - \frac{25360}{2187}k_2 + \frac{64448}{6561}k_3 - \frac{212}{729}k_4)); \\
 k_6 &= f(x_n + h, y_n + h(\frac{9017}{3168}k_1 - \frac{355}{33}k_2 + \frac{46732}{5247}k_3 + \frac{49}{176}k_4 - \frac{5103}{18656}k_5)); \\
 k_7 &= f(x_n + h, y_n + h(\frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6)); \\
 y_{n+1} &= y_n + h(\frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6).
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

### РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Четырехэтапный и семиэтапный (5) методы Рунге-Кутты для решения системы дифференциальных уравнений, включающей уравнения (1), (4) реализуются с помощью программы, интерфейс которой показан на рис. 1.

В интерфейсе программы вводятся значения моментов инерции ( $I_x, I_y, I_z$ ) микро-спутника, начальные условия ( $\omega_x(0), \omega_y(0), \omega_z(0), \theta(0), \psi(0), \varphi(0)$ ) для интегрирования дифференциальных уравнений (1) и (4), шаг ( $h$ ) и конечное время интегрирования ( $t_{кон}$ ).

Результаты расчетов с помощью программы имеют табличный вид в файле формата «txt».

Приведем пример расчета в программе с

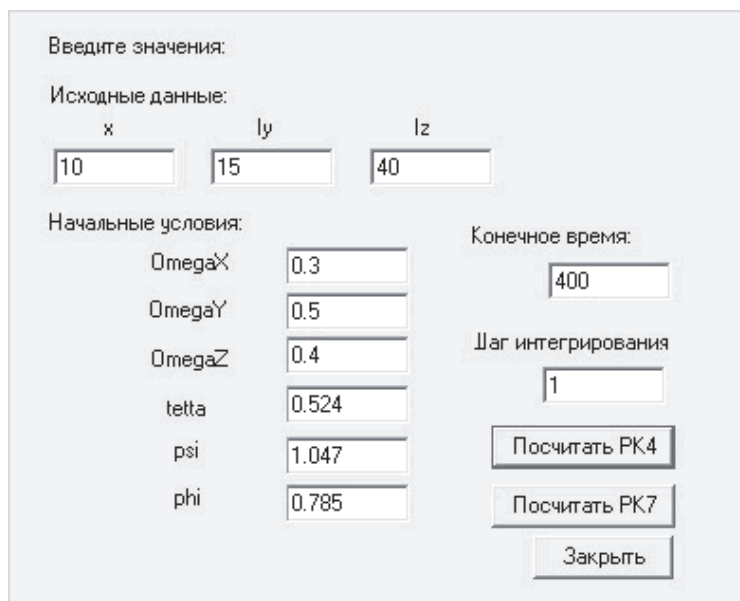


Рис. 1. Интерфейс программы

параметрами по умолчанию, которые показаны на рис. 1, методами РК4 и РК7, но шаг интегрирования зададим равным  $h = 0,4$ . Результаты численного интегрирования приведены на рис. 2, 3.

Как следует из рис. 2, 3, результаты расчётов с

использование двух методов РК4 и РК7 совпадают, что говорит о малой погрешности численного интегрирования.

Рассмотрим, как зависит погрешность результатов, которые находятся с помощью методов РК4

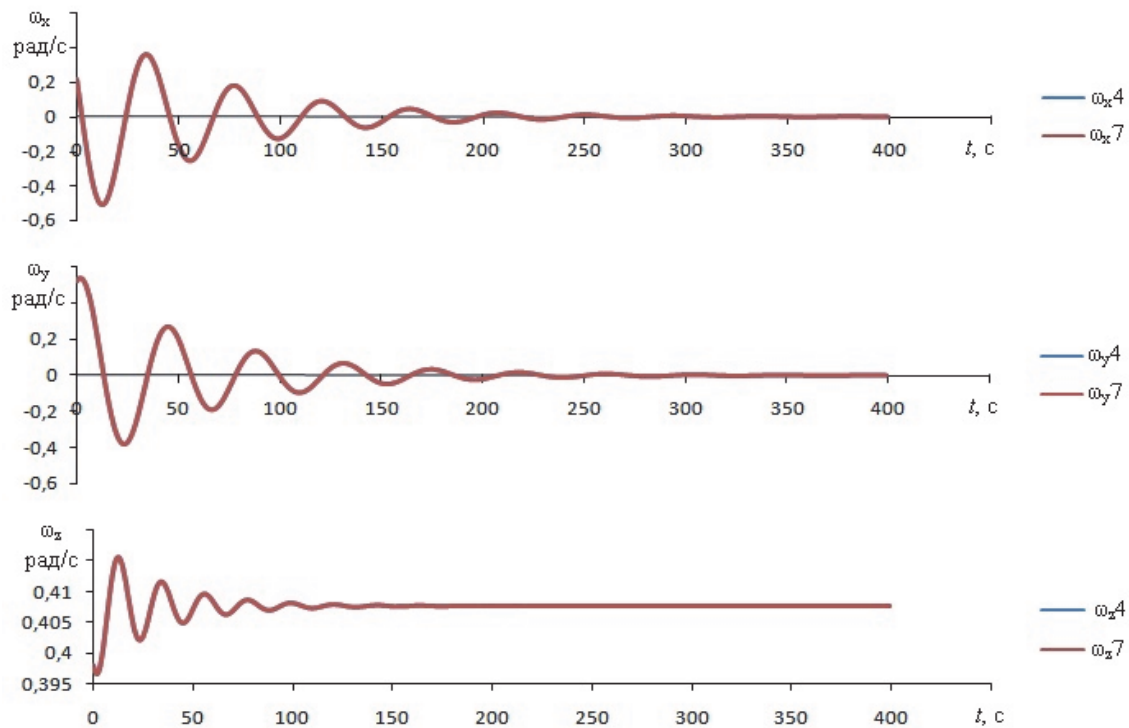


Рис. 2. Графики  $\omega_x(t)$ ,  $\omega_y(t)$ ,  $\omega_z(t)$

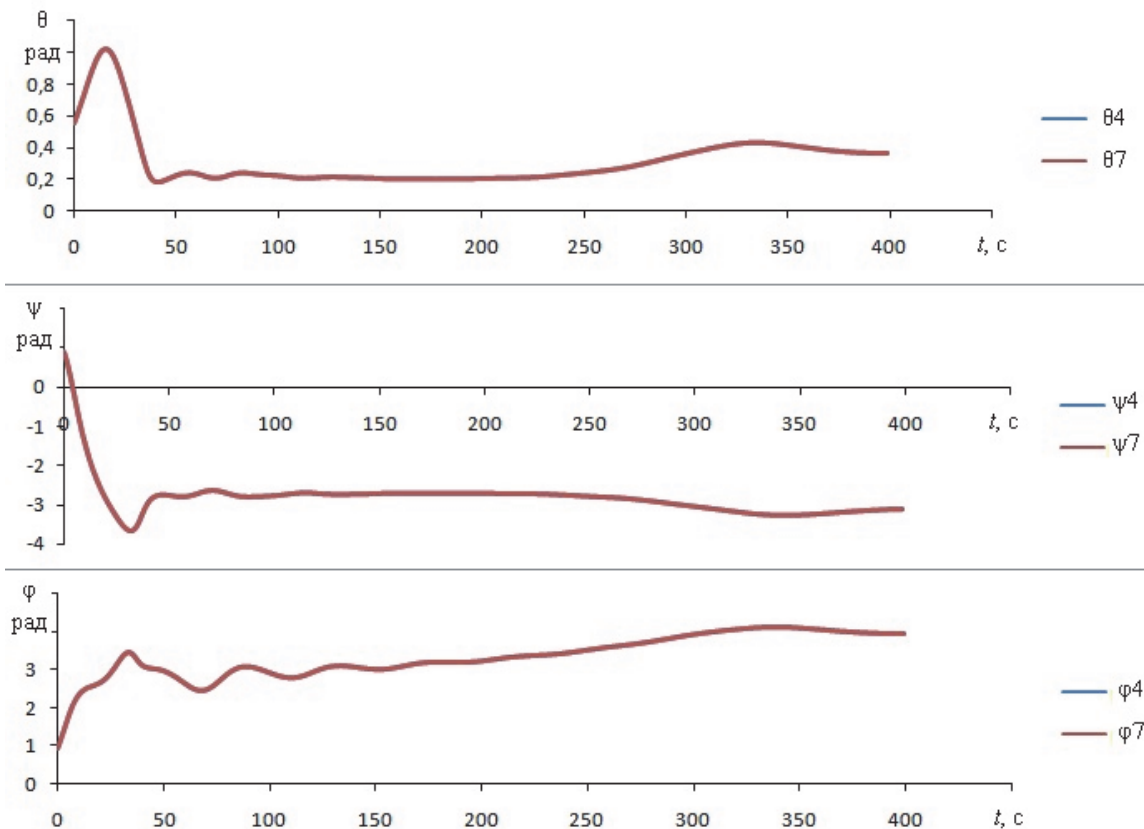


Рис. 3. Графики  $\theta(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\varphi(t)$

Таблица 1. Расчет погрешностей интегрирования при использовании РК4 и РК7

$h$	$t_{\text{кон}} \text{ с}$	$\varepsilon_{\omega_x}, \%$	$\varepsilon_{\omega_y}, \%$	$\varepsilon_{\omega_z}, \%$	$\varepsilon_{\theta}, \%$	$\varepsilon_{\psi}, \%$	$\varepsilon_{\varphi}, \%$
0,01	400	0	0	0	0	0	0
0,05	400	9,35E-06	3,95E-05	1,99E-07	1,71E-05	2,00E-06	2,70E-06
0,1	400	1,92E-03	2,77E-03	2,04E-06	1,55E-05	2,47E-05	1,28E-05
0,2	400	3,08E-03	1,44E-01	3,78E-05	1,54E-03	3,60E-04	4,70E-04
0,3	400	1,53E-02	1,27E-01	1,55E-04	3,46E-03	3,39E-03	3,12E-03
0,4	400	6,92E-01	3,86E-01	4,45E-04	8,27E-03	3,62E-03	9,87E-03
0,5	400	2,90E+00	3,60E-01	9,58E-04	1,61E-02	3,79E-03	1,68E-02
0,6	400	1,65E+01	1,04E+00	1,72E-03	2,39E-02	5,69E-03	2,55E-02
0,7	400	2,08E+01	6,16E+00	2,68E-03	2,95E-02	1,27E-02	3,60E-02

и РК7, от величины шага интегрирования. Для этого составим табл. 1, где  $\varepsilon_{\omega_x}, \varepsilon_{\omega_y}, \varepsilon_{\omega_z}, \varepsilon_{\theta}, \varepsilon_{\psi}, \varepsilon_{\varphi}$  – расхождение результатов, получаемых методами РК4 и РК7 в процентах.

В табл. 1 содержатся величины расхождения результатов расчетов, определяемых посредством вычисления расхождений угловых скоростей и углов ориентации при использовании четырехэтапного и семиэтапного методов Рунге-Кутты.

Из табл. 1 следует, что чем больше шаг интегрирования, тем больше величина расхождения решений между «РК4» и «РК7». При шаге 0,01 погрешность сводится к величинам порядка  $10^{-9}$ . При шаге большем 0,6 погрешность превышает 5%.

### ВЫВОДЫ

Явные одношаговые методы Рунге-Кутты позволяют эффективно решать задачи по моделированию процесса успокоения вращательного движения микроспутника. Результаты численного моделирования показывают, что при шаге  $h < 0,4$  интегрирования системы дифференциальных уравнений расхождение результатов при использовании семиэтапного метода Рунге-Кутты и классического метода РК4 не превышает и 1%. Однако, при моделировании движения микроспутника на значительных интервалах времени следует использовать методы более точные, чем РК4.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 1985. 288 с.
2. Коваленко А.П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1975. 248 с.
3. Lyubimov V.V., Malyshev V.I., Semkin N.D. Attitude control of small spacecraft with allowance made for failures in the system for decreasing angular momentums of flywheels // Gyroscopy and Navigation, 2013. Volume 4. Issue 4. Pages 216-222.
4. Любимов В.В. Об особенностях в возмущенном вращательном движении спутника с сильным магнитом на борту // Изв. вузов. Авиационная техника. 2009. №2. С.29-31.
5. Любимов В.В. Внешняя устойчивость резонансов при движении асимметричного твердого тела с сильным магнитом в геомагнитном поле // Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. № 1. С.13-27.
6. Лебедев А.С., Любимов В.В., Семкин Н.Д. Моделирование управляемого движения микроспутника с магнитными и гравитационными исполнительными органами // Полёт. 2012. №7. С.39-44.
7. Калаев М.П., Любимов В.В., Семкин Н.Д. Полунатурное и имитационное моделирование процесса отделения микроспутника // Гироскопия и навигация. 2014. № 2 (85). С.52-60.
8. Семкин Н.Д., Любимов В.В., Малышев В.И. Моделирование законов функционирования магнитных исполнительных органов при ориентации микроспутника по местной вертикали // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2012.

Том.15. № 1. С.103-108.  
9. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.

венных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.

**THE ESTIMATION ERROR OF THE RUNGE-KUTTA METHOD  
IN THE TASK OF REDUCING AN ANGULAR MOMENTUM OF A MICROSATELLITE**

© 2015 V. V. Lyubimov, V. S. Lashin

Samara State Aerospace University named after Academician S. P. Korolev  
(National Research University)

We consider the problem of numerical modeling of damping of a microsatellite with electromagnetic executive bodies. At the numerical integration of equations of motion of microsatellite used a seven-step Runge-Kutta method. The estimation error in the numerical integration of a equations of a motion through the application a seven-step and four-stage explicit Runge-Kutta methods is performed.

Keywords: error, angular momentum, microsatellite, numerical integration, Runge-Kutta methods.