*УДК 621.391.1+517.984.5*

# ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ В ЗАДАЧАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛА

© 2015 С. Я. Новиков, М.Е. Федина

Самарский государственный университет

Поступила в редакцию 30.07.2015

В данной статье рассмотрены возможности восстановления дискретного сигнала по модулям скалярных произведений (амплитудам измерений) сигнала и элементов полных систем

*Ключевые слова:* альтернативная полнота, спарк, подъем фазы.

Дискретизация и квантование аналогового сигнала приводят к рассмотрению сигнала как элемента некоторого конечномерного пространства $V$. В таком пространстве, вообще говоря, комплексном, вводится комплексное скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и соответствующая эрмитова норма $\|\cdot\|$. По ортонормированному базису (ОНБ) $\{u_i\}_{i=1}^{M}$ «сигнал» $v \in V$ единственным образом представляется суммой

$$v = \sum_{i=1}^{M} \langle v, u_i \rangle u_i.$$

Комплексные коэффициенты описываемого представления $\langle v, u_i \rangle$ дают возможность полного восстановления сигнала и часто понимаются как «измерения» сигнала. Реальные измерения получаются вещественными, и зазор между $\langle v, u_i \rangle$ и амплитудами измерений $|\langle v, u_i \rangle|$ $|\langle v, u_i \rangle|$ оказывается непреодолимым при восстановлении сигнала.

Представляя сигнал в различных базисах, можно получить о нем разностороннюю информацию. Так, переход от представления по ортам к представлению в базисе Фурье, позволяет получить частотные характеристики сигнала, дающие широкие возможности для его цифровой обработки.

Последние годы значительное количество работ [3–6] посвящено решению следующей задачи: построить системы $\Phi = \{\varphi_i\}_{i \in I}$, для которых возможно восстановить $v$ по набору чисел $|\langle v, \varphi_i \rangle|$.

В классе ОНБ такая задача не имеет решения.

В англоязычной литературе сформулированная выше задача и связанные с ней вопросы составляют раздел прикладных исследований под названием «PHASE RETRIEVAL» (возвращение, воспроизведение фазы).

Пионерской работой в этом направлении является работа [3], в которой была доказана теоретическая возможность точного восстановления сигнала (с точностью до унимодулярного множителя), если в качестве системы представления используются полные избыточные системы.

Дальнейшее развитие идет по двум направлениям:

1) поиск таких систем «измерительных» векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i \in I}$, которые позволят восстановить произвольный сигнал $v \in V$ по набору вещественных чисел $|\langle v, \varphi_i \rangle|$;

2) обоснование возможности восстановления произвольного сигнала с большой вероятностью для относительно небольшого числа «случайно выбранных» измерительных векторов.

Второй подход близок теории сжатого зондирования.

Следующее определение конкретизирует свойство инъективности отображения

$$v \to \{|\langle v, \varphi_i \rangle|\}_{i \in I},$$

которое является ключевым в описываемом круге вопросов.

**Определение.** *Набор векторов* $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=I}^{N}$ *в* $\mathbb{R}^M$ *(или* $\mathbb{C}^M$*) обеспечивает* **воспроизведение фазы (ВФ)**, *если для любых* $x, y \in \mathbb{R}^M$ *(или* $\mathbb{C}^M$*), таких, что* $|\langle x, \varphi_i \rangle| = |\langle y, \varphi_i \rangle|$ *для всех* $i = 1, \ldots, N$, *получается равенство* $x = cy$, *где* $c = \pm 1$ *для* $\mathbb{R}^M$ *(и* $c \in \boldsymbol{T}$ *для* $\mathbb{C}^M$, *где* $\boldsymbol{T}$ *— единичная окружность на комплексной плоскости).*

Фреймом конечномерного пространства называется любая полная система векторов, состоящая из, возможно, линейно зависимых элементов. Полнота системы означает, что ее линейная оболочка равна $V$ [1, 2].

Фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ в $\mathbb{R}^M$ обеспечивает восстановление фазы тогда и только тогда, когда он обладает свойством альтернативной полноты.

*Новиков Сергей Яковлевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики, и.о. декана. E-mail: nvks@samsu.ru*

*Федина Мария Ефимовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры безопасности информационных систем. E-mail: phedina@samsu.ru*

Альтернативная полнота системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ означает, что при произвольном выборе $S \subset \{1,\ldots,N\}$ либо $\{\varphi_n\}_{n\in S}$, либо $\{\varphi_n\}_{n\in S^C}$ полны в $V$.

В частности, полный спарк, содержащий, по крайней мере, $2M-1$ векторов, допускает восстановление фазы. Если $\{\varphi_n\}_{n=1}^N \{\varphi_n\}_{n=1}^N$ допускает восстановление фазы в $\mathbb{R}^M$, то $N \geq 2M-1$, никакое подмножество из $2M-2$ элементов не может обеспечить восстановление фазы.

*Спарком* системы называется мощность наименьшего линейно зависимого подмножества этой системы. Если спарк системы больше размерности пространства, то любое подмножество из $M$ элементов линейно независимо, в этом случае систему называют *полным спарком [7].*

В пространстве $\mathbb{C}^M$ свойство альтернативной полноты является лишь необходимым условием инъективности, а известный критерий [5] имеет лишь теоретическое значение.

Как для вещественного, так и для комплексного пространства актуальны поиски алгоритмов восстановления.

Для комплексного пространства до сих пор неизвестно минимально возможное количество векторов системы, обеспечивающей восстановление фазы. Довольно давно высказана гипотеза, что такое число равно $4M-4$.

Однако недавно был построен пример системы в **R**^4, состоящей из 11 векторов и допускающей восстановление фазы. Что это: особенность 4-мерного пространства или выражение общей закономерности, неизвестно.

Переходим к рассмотрению другого подхода решения задачи восстановления фазы. Он основан на синтезе идей сжатого зондирования и т. н. «подъема фазы» [8]. Подъем фазы поднимает нелинейную задачу в более высокие размерности и превращает ее в линейную.

Пусть $\mathcal{A}(x)(n) := |\langle x, \varphi_n\rangle|^2 = b_n, n = 1, \ldots, N$.

Вещественные числа $b_n$ предполагаются известными результатами измерения амплитуды.

Определим вещественное $M^2$-мерное пространство $\mathbb{H}^{M\times M}$ самосопряженных $M \times M$ матриц.

Для заданного множества «измерительных векторов» $\{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{C}^M$ определяется *оператор матричного анализа* $\boldsymbol{A}\colon \mathbb{H}^{M\times M} \to \mathbb{R}^N$ соотношением $\boldsymbol{A}H(n) = \langle H, \varphi_n\varphi_n^*\rangle_{HS}$, здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle_{HS}$ обозначает скалярное произведение Гильберта-Шмидта, индуцирующее матричную норму Фробениуса $\|\cdot\|_F$ [9].

Подробнее,
$\langle H, G\rangle_{HS} = \sum_{m,n=1}^M h_{mn}\overline{g_{mn}} = Tr[G^*H]$.

Заметим, что $\boldsymbol{A}$ – линейный оператор, и $\boldsymbol{A}\, xx^*(n) = Tr[\varphi_n^* xx^*\varphi_n] = \mathcal{A}(x)(n)$.

Полученное равенство показывает, что при таком расширении процесс измерения амплитуды становится линейным за счет увеличения размерности пространства. Добавим теперь к проделанному подъему фазы вероятностные идеи сжатого зондирования. Задача восстановления фазы допускает вероятностную формулировку: минимизировать $Tr[\boldsymbol{X}]$ на множестве неотрицательных матриц $\boldsymbol{X} \succcurlyeq 0$ таких, что $Tr[\varphi_n\varphi_n^*\boldsymbol{X}] = b_n, n = 1, \ldots, N$, здесь $\varphi_n(\omega)$ – $\varphi_n(\omega)$ – независимые одинаково распределенные векторы в $V$.

В комплексном пространстве в качестве векторов $\varphi_n(\omega)$ рассматривают векторы с равномерным распределением на комплексной сфере радиуса $\sqrt{M}$ или с нормальным распределением $\mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_{M/2})$+i $\mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_{M/2})$.

В вещественном пространстве, соответственно, - равномерное распределение на сфере радиуса $\sqrt{M}$ или нормальное распределение $\mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_M)$.

**Теорема [8].**

*Для всех $x \in \mathbb{C}^M$ или $x \in \mathbb{R}^M$ точное решение задачи подъема фазы существует с вероятностью $\geq 1 - O(e^{-\gamma N})$, если количество измерений $N \geq c_0 M$, где $c_0$ и $\gamma$ – абсолютные константы.*

Таким образом, точное восстановление сигнала с большой вероятностью возможно сразу для всех входящих сигналов.

Если измерения искажены шумом $w$:

$$b_n = |\langle x_0, \varphi_n\rangle|^2 + w_n,\ n = 1, \ldots, N,$$

то минимизируется сумма $\sum_{n=1}^N |Tr[\varphi_n\varphi_n^*\boldsymbol{X}] - b_n|$ на множестве всех неотрицательных матриц $\boldsymbol{X} \succcurlyeq 0$.

Решение последней задачи (обозначим его $\boldsymbol{X}_0$) по случайным векторам равномерного и нормального распределения с вероятностями той же асимптотики, что указана в предыдущей теореме, удовлетворяет оценке

$$\|\boldsymbol{X}_0 - x_0x_0^*\|_F \leq C_0 \cdot \frac{\|w\|_1}{N},$$

с некоторой абсолютной константой $C_0$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания, проект №204.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория всплесков / *И.Я. Новиков, В.Ю. Протасов, М.А. Скопина.* М.: Физматлит, 2005. 616 с.
2. *Новиков С.Я., Лихобабенко М.А.* Фреймы конечномерных пространств. Самара: Самарский университет, 2013. 52 с.

3. On signal reconstruction / *R. Balan , P. Casazza, D. Edidin* // Appl.Comput. Harmon. Anal. 2006. 20. P. 345-356.
4. *Bodmann B.G., Hammen N.* Stable phase retrieval with low-redundancy frames //Available online: arXiv:1302.5487.
5. Saving phase: Injectivity and stability / *A.S. Bandeira, J. Cahill, D. G. Mixon, A. A. Nelson* // Available online: arXiv:1302.4618v1.
6. Phase retrieval from very few measurements/*M. Fickus, D. G. Mixon, A. A. Nelson, Ya. Wang* // Available online: arXiv:1307.7176v1.
7. *Cahill J,. Mixon D.G.* Full Spark Frames // Available online: arXiv:1110.3548.
8. PhaseLift: Exact and Stable Signal Recovery from Magnitude Measurements via Convex Programming// *E.J. Candes, Th. Strohmer, V. Voroninski* // Available online: arXiv: 1109.4499.
9. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

## COMPLETE SYSTEM AND SIGNAL RECONSTRUCTION

© 2015 S.Ya. Novikov, M.E. Phedina

Samara State University

The possibilities of signal reconstruction by using only modules of inner products of signal and vectors of complete systems are considered in the paper.

*Key words:* alternative completeness, spark, phase lift.

*Sergey Novikov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head at the Theory of Probability and Mathematical Statistics Department. E-mail: nvks@samsu.ru*
*Mariya Phedina, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor. E-mail: phedina@samsu.ru*