УДК 511.2+519.2

НОВАЯ МЕТОДИКА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

© 2015 Л. П. Усольцев

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 30.07.2015

В работе предлагается новая методика применения диофантовых уравнений с показательной функцией, позволяющая получить неулучшаемые оценки остаточных членов в центральной и локальной предельных теоремах и теореме об асимптотике больших уклонений для распределения дробных долей показательной функции.

Ключевые слова: диофантовы уравнения; показательная функция; центральная предельная теорема; локальная предельная теорема; асимптотика больших уклонений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $q \geq 2$ – фиксированное целое число, а $f(t)$ – вещественнозначная, интегрируемая с квадратом на отрезке $[0, 1]$ периодическая функция с периодом 1 и коэффициентами Фурье

$$a_m = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi imt}\, dt \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

удовлетворяющими условию

$$|a_m| \leqslant \frac{A}{|m|^{\alpha}} \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots), \qquad (1.1)$$

где $A>0$ и $\alpha>1/2$ – постоянные. Для любого целого числа $N \geq 2$ положим

$$S_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} (f(q^n t) - a_0) \qquad (0 \leqslant t < 1), (1.2)$$

$$F_N(x) = \mathrm{mes}\{t \in [0,1] : S_N(t) < x\} \qquad (-\infty < x < \infty), (1.3)$$

$$\varphi_N(\lambda) = \int_0^1 e^{i\lambda S_N(t)}\, dt \qquad (-\infty < \lambda < \infty). (1.4)$$

Согласно центральной предельной теореме для распределения дробных долей показательной функции (теорема Форте-Каца; см., например, книгу А.Г.Постникова [1, §15]), существует конечный предел

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 S_N^2(t)\, dt = \sigma^2 \qquad (\sigma \geqslant 0), \qquad (1.5)$$

причем в случае, когда $\sigma \neq 0$, при всех вещественных x выполняется соотношение

$$\lim_{N\to\infty} F_N(\sigma x) = \Phi(x), \qquad (1.6)$$

где $\Phi(x)$ – нормальная функция распределения с параметрами (0,1).

Усольцев Лев Павлович, кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики. E-mail: usoltsev@ssau.samara.ru

Исследование асимптотики в соотношении (1.6) для различных классов функций $f(t)$ проводилось как чисто вероятностными методами (наиболее значимый здесь результат объявлен в работе И.А.Ибрагимова [2]; однако в его доказательстве имеются пробелы, устранить которые автору не удалось), так и с привлечением арифметических средств ([1, § 15], [3] – [6]), коль скоро задача, породившая соотношение (1.6), имеет не только вероятностную, но и арифметическую природу.

В основе всех упомянутых работ лежит оценка модуля разности характеристических функций $\varphi_N(\lambda)$ и $\varphi(\lambda) = \exp\{-\sigma^2\lambda^2/2\}$ распределений F_N и Φ соответственно. В настоящей работе, используя новую методику применения диофантовых уравнений с показательной функцией, мы прежде всего доказываем следующее утверждение.

Теорема 1. Если $\sigma \neq 0$, то существуют положительные постоянные $N \geq 2$, $c1$ и $c2$, зависящие от A, α и σ, такие, что при всех целых $N \geq N_0$ и всех вещественных λ из области $|\lambda| \leqslant c_1\sqrt{N}$ выполняется оценка

$$|\varphi_N(\lambda) - e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}| \leqslant \frac{c_2(|\lambda|^3 + |\lambda|)}{\sqrt{N}} e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{4}}. (1.7)$$

Из справедливости неравенства (1.7) в области $|\lambda| \leqslant c_1\sqrt{N}$ стандартными приемами, связанными с применением теоремы Эссеена (см., например, [7, с. 211, теорема 1] или [8, с. 137, теорема 2]), выводится

Теорема 2. (Центральная предельная теорема). Для всех $\alpha \in (1/2, 1]$ с $\sigma \neq 0$ при $N \to \infty$ равномерно относительно x, $-\infty<x<\infty$ выполняется соотношение

$$F_N(\sigma x) = \Phi(x) + O(\frac{1}{\sqrt{N}}) \qquad (1.8)$$

с положительной постоянной в символе "O" зависящей от A, α и σ.

При доказательстве теоремы 1 мы используем не моменты распределения $F_{N,M}$, в которое переходит F_N в результате замены функции f(t) M –ой частичной суммой ее ряда Фурье с $M \geq 2$, растущим вместе с N (так поступали А.Г. Постников и Р. Х. Мухутдинов), а его семиинварианты $\gamma_k(N, M)$ (k=2, 3, ...), для которых нами получено представление

$$\gamma_k(N,M) = \frac{1}{N^{k/2}} \sum_{\substack{n_1=0 \\ [W_k]}}^{N-1} \cdots \sum_{n_k=0}^{N-1} \sum_{\substack{m_1=-M \\ [m_1 q^{n_1}+\dots+m_k q^{n_k}=0]}}^{M}{}' \cdots \sum_{m_k=-M}^{M}{}' a_{m_1} \cdots a_{m_k}, \quad (1.9)$$

где штрих у знака суммы Σ показывает, что из области суммирования исключено значение m=0, а символом $W_k = W_k(n_1, \dots, n_k)$ обозначено следующее условие:

Для каждого набора $(m_1, \dots, m_k)$ отличных от нуля целых чисел m_i (i=1, 2, ..., k) при всех r=1, 2, ..., k–1 для любых r чисел $j_1 < \dots < j_r$ мно жества {1, 2, ..., k} выполняется неравенство

$$m_{j_1} q^{n_{j_1}} + m_{j_2} q^{n_{j_2}} + \dots + m_{j_r} q^{n_{j_r}} \neq 0.$$

Представление семиинвариантов распределения $F_{N,M}$, в виде (1.9) позволило провести их оценивание, осуществляя должным образом организованный перебор решений $(m_1, \dots, m_k)$ уравнения

$$m_1 q^{n_1} + \dots + m_k q^{n_k} = 0 \qquad (1.10)$$

с заданными $n_i \in \{0,1,2,\dots,N-1\}$ (i=1, 2, . . . , k) (т.е. линейного уравнения!), в то время, как оценивание моментов распределения $F_{N,M}$ сводилось к оцениванию числа решений уравнения (1.10) с заданными целыми $m_i \neq 0$ (i=1, 2, . . . , k) от- носительно неизвестных $(n_1, \dots, n_k) \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, т.е. к рассмотрению уже нелинейного уравнения.

В работах автора [4] – [6] и [9] рассматривалась и асимптотика больших уклонений. В настоящей работе, используя полученные оценки семиинвариантов $\gamma_k(N, M)$ и теорему В. А. Статулявичуса [10] (см. также [8], с. 307, п. 10) о восстановлении асимптотики больших уклонений по семиинвариантам распределения, мы доказываем следующее утверждение.

Теорема 3. (Асимптотика больших уклонений). Для всех $\alpha \in (1/2, 1]$ с $\sigma \neq 0$ существует постоянная $\delta = \delta(A, \alpha, \sigma) > 0$, такая, что в области $2 \leq x \leq \delta N^{1/6}$ при $N \to \infty$ выполняются соотношения

$$1 - F_N(\sigma x) = [1 - \Phi(x)] \cdot [1 + O(\frac{x^3}{\sqrt{N}})] \quad (1.11)$$

и

$$F_N(-\sigma x) = \Phi(-x) \cdot [1 + O(\frac{x^3}{\sqrt{N}})] (1.12) \quad (1.12)$$

с положительными постоянными в символах "O", зависящими от A, и σ.

Если

$$f(t) = \chi_\Delta(t) = \{-1mm \begin{matrix} 1 of \{t\} \in \Delta, \\ 0 of \{t\} \notin \Delta, \end{matrix} \qquad (0 \leqslant t < \infty)$$

с $\Delta = [a,b) \subset [0,1)$ и $|\Delta| = b - a < 1$ и, следовательно, сумма

$$Q_N(t, \Delta) = \sum_{n=0}^{N-1} \chi_\Delta(\{q^n t\}) \qquad (N \geqslant 2)$$

дает количество дробных долей {qnt}, попадающих в промежуток Δ, когда n пробегает целые значения от 0 до N –1, то $\sigma_\Delta = \sigma \neq 0$ (см. работу [11]) и справедлива локальная предельная теорема для распределения дробных долей показательной функции, доказанная Д. А. Москвиным и А. Г. Постниковым в работе [12]. В своих арифметических конструкциях авторы работы [12] использовали лемму 1 работы И. А. Ибрагимова [2], дающую в области $|\lambda| \leqslant c\sqrt{N/\ln N}$, где c>0 – постоянная, оценку модуля разности характеристических функций $\varphi_N(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ распределений F_N и Φ соответственно. Если же использовать более силь ное, нежели лемма И. А. Ибрагимова, утверждение – теорему 1 настоящей работы, то теорема, содержащаяся в [12], почти автоматически примет следующий вид:

Теорема 4. (Локальная предельная теорема). При $N \to \infty$ равномерно относительно τ, τ =0, 1, 2, . . . , выполняется соотношение

$$\mathrm{mes}\{t \in [0,1] : Q_N(\Delta, t) = \tau\} = \frac{1}{\sigma_\Delta \sqrt{2\pi N}} \exp\{-\frac{(\tau - |\Delta| N)^2}{2N\sigma_\Delta^2}\} + O(\frac{1}{N})$$

с положительной постоянной в символе "O", зависящей от σ_Δ и |Δ|.

Оценки остаточных членов теоремах 2 – 4 такие же по силе, что и в аналогичных теоремах для распределения сумм независимых случайных величин, а значит, – неулучшаемые.

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Очевидно, теоремы 1 – 3 достаточно доказать для случая $a_0 = \int_0^1 f(t)dt = 0$, поскольку к нему сводится и общий случай: надо только вместо функции f(t) рассматривать функцию $f(t) - a_0$. Будем поэтому далее считать, что

$$a_0 = \int_0^1 f(t)dt = 0, \qquad f(t) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' a_m e^{2\pi i m t} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), (2.1)$$

где штрих у знака суммы $\sum_m$ означает, что из области суммирования исключено значение m=0. В этом случае выражение (1.2) для суммы SN (t) принимает вид:

$$S_N(t)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1} f(q^n t) \qquad (0\leqslant t<1). \quad (2.2)$$

Заметим, что, вследствие вещественнозначности функции *f(t)*, при всех целых $m\neq 0$ справедливо равенство

$$a_{-m}=\bar{a}_m. \qquad (2.3)$$

Для целых чисел $N\geq 2$ мы полагаем

$$\sigma_N^2=\int_0^1 S_N^2(t)dt \qquad (\sigma_N\geqslant 0), \qquad (2.4)$$

Очевидно, σ_N^2 является дисперсией распределения F_N.

Положим еще $C_1=2A^2/(2\alpha-1)$ и $C_2=35C_1=70A^2/(2\alpha-1)$ и, следуя работе [1, §15, с. 84], докажем следующее утверждение.

Лемма 1. Существует конечный предел

$$\lim_{N\to\infty}\sigma_N^2=\lim_{N\to\infty}\int_0^1 S_N^2(t)dt=\sigma^2, \qquad (2.5)$$

причем при всех целых $N\geq 2$ выполняется неравенство

$$|\sigma_N^2-\sigma^2|<\frac{C_2}{N}. \qquad (2.6)$$

Доказательство леммы. Положим

$$\|f\|^2=\int_0^1 f^2(t)dt=\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' a_m\bar{a}_m,$$

$$\rho_k=\int_0^1 f(t)f(q^k t)dt \quad (k=1,2,\ldots) \qquad (2.7)$$

(таким образом, $\rho_0=\|f\|^2$).

Докажем сначала следующую оценку:

$$|\rho_k|\leqslant\frac{2C_1}{q^{k\alpha}} \qquad (k=0,1,2,\ldots). \qquad (2.8)$$

Действительно, так как, вследствие (2.1), при k=0, 1, 2, . . .

$$f(q^k t)\sim\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' a_m e^{2\pi i m q^k t} \qquad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

и, в силу равенства Парсеваля,

$$\rho_k=\int_0^1 f(t)f(q^k t)dt=\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' a_m\bar{a}_{mq^k},$$

то, с учетом соотношений (2.3) и (1.1), будет:

$$|\rho_k|\leqslant\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'|a_m|\cdot|a_{mq^k}|\leqslant\frac{2A^2}{q^{k\alpha}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2\alpha}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2A^2}{q^{k\alpha}}\left(1+\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{2\alpha}}\right)\leqslant\frac{4A^2}{(2\alpha-1)q^{k\alpha}}=\frac{2C_1}{q^{k\alpha}}.$$

Поскольку функция *f(t)* – периодическая с периодом 1, то, в силу равенств (2.4), (2.2) и (2.7), мы имеем:

$$\begin{aligned}
\sigma_N^2&=\int_0^1\Big(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1} f(q^n t)\Big)^2 dt=\\
&=\frac{1}{N}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}\int_0^1 f(q^{n_1}t)f(q^{n_2}t)dt=\\
&=\|f\|^2+\frac{2}{N}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{\substack{n_2=0\\ [n_1<n_2]}}^{N-1}\int_0^1 f(t)f(q^{n_2-n_1}t)dt=\\
&=\|f\|^2+\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-2}\sum_{k=1}^{N-1-n}\int_0^1 f(t)f(q^k t)dt=\\
&=\|f\|^2+\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-2}\sum_{k=1}^{N-1-n}\rho_k.
\end{aligned} \qquad (2.9)$$

А так как, в силу оценки (2.9),

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\rho_k|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2C_1}{q^{k\alpha}}\leqslant 2C_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k\alpha}}=\frac{2C_1}{\sqrt{2}-1}<\infty,$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k$ абсолютно сходится. Поэтому, полагая

$$\sigma^2=\|f\|^2+2\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k \qquad (2.10)$$

мы, вследствие равенств (2.9), получаем:

$$\begin{aligned}
\sigma_N^2&=\|f\|^2+\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-2}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k-\sum_{k=N-n}^{\infty}\rho_k\Big)=\\
&=\|f\|^2+\Big(2-\frac{2}{N}\Big)\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k-\\
&-\frac{2}{N}\Big(\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=N-n}^{\infty}\rho_k\Big)=\sigma^2-\frac{2}{N}\sum_{k=N-n}^{\infty}\rho_k.
\end{aligned}$$

Отсюда, используя оценку (2.8), выводим неравенство (2.6):

$$\begin{aligned}
&|\sigma_N^2-\sigma^2|\leqslant\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=N-n}^{\infty}|\rho_k|\leqslant\\
&\leqslant\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=N-n}^{\infty}\frac{2C_1}{q^{k\alpha}}\leqslant\frac{4C_1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=N-n}^{\infty}\frac{1}{2^{k/2}}=\\
&=\frac{4C_1}{N}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2^{(N-n)/2}}=\\
&=\frac{4\sqrt{2}C_1}{(\sqrt{2}-1)N}\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{2^{r/2}}<\frac{14C_1}{(\sqrt{2}-1)N}<\frac{35C_1}{N}=\frac{C_2}{N},
\end{aligned}$$

а из неравенства (2.6) вытекает и соотношение (2.5). Лемма 1 доказана.

Если $\sigma\neq 0$, , $C_3=\dfrac{2C_2}{3\sigma^2}=\dfrac{140A^2}{3(2\alpha-1)\sigma^2}$ и $N\geqslant 6C_3$, то, вследствие оценки (2.7), будет:

$$|\sigma_N^2-\sigma^2|<\frac{C_2}{N}\leqslant\frac{C_2}{6C_3}=\frac{\sigma^2}{4},$$

$$\frac{3\sigma^2}{4}<\sigma_N^2<\frac{5\sigma^2}{4},\quad \frac{6\sigma}{7}<\sigma_N<\frac{8\sigma}{7},$$

$$|\frac{\sigma}{\sigma_N}-1|=\frac{|\sigma^2-\sigma_N^2|}{\sigma_N(\sigma+\sigma_N)}<\frac{C_2}{N}\cdot\frac{6\sigma}{7}\cdot\frac{13\sigma}{7}< \qquad (2.11)$$

$$<\frac{2C_2}{3\sigma^2N}=\frac{C_3}{N}.$$

Взяв произвольно целые числа $N\geq 2$ и $M\geq 2$, введем в рассмотрение вещественнозначный тригонометрический многочлен степени M

$$f_M(t)=\sum_{m=-M}^{M}{}' a_m e^{2\pi imt} \qquad (2.12)$$

с теми же коэффициентами Фурье a_m, что и у исходной функции *f(x)*, и вещественнозначные же, периодические с периодом 1 функции

$$\tilde f_M(t)=f(t)-f_M(t)\sim\sum_{|m|>M}a_m e^{2\pi imt}\quad(0\leqslant t\leqslant 1), \qquad (2.13)$$

$$S_{N,M}(t)=\frac{1}{\sqrt N}\sum_{n=0}^{N-1}f_M(q^nt),$$

$$\tilde S_{N,M}(t)=S_N(t)-S_{N,M}(t)= \qquad (2.14)$$

$$=\frac{1}{\sqrt N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde f_M(q^nt).$$

Лемма 2. Справедлива оценка

$$\int_0^1\tilde S^2_{N,M}(t)dt<\frac{7C_1}{M^{2\alpha-1}}. \qquad (2.15)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Если n_1 и n_2 – целые, $n_2\geqslant n_1\geqslant 0$, , то, в силу (2.13),

$$\tilde f_M(q^{n_2-n_1}t)\sim\sum_{|m|>M}a_m\cdot\exp\{2\pi imq^{n_2-n_1}t\}.$$

Но тогда, вследствие равенства Парсеваля,

$$\int_0^1\tilde f_M(q^{n_1}t)\tilde f_M(q^{n_2}t)dt=$$

$$=\int_0^1\tilde f_M(t)\tilde f_M(q^{n_2-n_1}t)dt=\sum_{|m|>M}a_{mq^{n_2-n_1}}\overline{a}_m,$$

а отсюда, вследствие (2.3) и (1.1), получаем:

$$|\int_0^1\tilde f_M(q^{n_1}t)\tilde f_M(q^{n_2}t)dt|\leqslant 2\sum_{m>M}\frac{A^2}{m^{2\alpha}q^{(n_2-n_1)\alpha}}\leqslant\frac{2A^2}{2^{(n_2-n_1)/2}}\sum_{m>M}\frac{1}{m^{2\alpha}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2A^2}{2^{(n_2-n_1)/2}}\int_M^\infty\frac{dx}{x^{2\alpha}}=\frac{2A^2}{2^{(n_2-n_1)/2}(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\leqslant\frac{C_1}{2^{(n_2-n_1)/2}M^{2\alpha-1}}.$$

Поэтому, в силу равенств (2.14) и (2.13),

$$\int_0^1\tilde S^2_{N,M}(t)dt=\int_0^1(\frac{1}{\sqrt N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde f_M(q^nt))^2dt=\frac1N\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}\int_0^1\tilde f_M(q^{n_1}t)\tilde f_M(q^{n_2}t)dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac2N\sum_{\substack{n_1=0\\ [n_1\leqslant n_2]}}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}|\int_0^1\tilde f_M(q^{n_1}t)\tilde f_M(q^{n_2}t)dt|\leqslant\frac2N\sum_{n_2=0}^{N-1}\sum_{n_1=0}^{n_2}\frac{C_1}{2^{(n_2-n_1)/2}M^{2\alpha-1}}=$$

$$=\frac{2C_1}{M^{2\alpha-1}}\cdot\frac1N\sum_{n_2=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{n_2}\frac{1}{2^{r/2}}\leqslant\frac{2C_1}{M^{2\alpha-1}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^{r/2}}=\frac{2\sqrt2C_1}{(\sqrt2-1)M^{2\alpha-1}}<\frac{7C_1}{M^{2\alpha-1}}.$$

Лемма 2 доказана.

Пусть

$$F_{N,M}(x)=\mathrm{mes}\{t\in[0,1]:S_{N,M}(t)<x\}\qquad(-\infty<x<\infty), \qquad (2.16)$$

$$\sigma^2_{N,M}=\int_0^1S^2_{N,M}(t)dt\quad(\sigma_{N,M}\geqslant 0),$$

$$\varphi_{N,M}(\lambda)=\int_0^1e^{i\lambda S_{N,M}(t)}dt\quad(-\infty<\lambda<\infty). \qquad (2.17)$$

Лемма 3. *При всех вещественных x справедливы неравенства*

$$F_{N,M}(x-\frac1N)\leqslant F_N(x)<F_{N,M}(x+\frac1N)+\frac{7C_1N^2}{M^{2\alpha-1}}. \qquad (2.18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Вследствие равенств (1.3), (2.17) и (2.15), при всех вещественных *x* мы имеем:

$$F_N(x)=\mathrm{mes}\{t\in[0,1]:S_N(t)<x,\left|S_N(t)-S_{N,M}(t)\right|<\frac1N\}+$$

$$+\mathrm{mes}\{t\in[0,1]:S_N(t)<x,\left|S_N(t)-S_{N,M}(t)\right|\geqslant\frac1N\}\geqslant$$

$$\geqslant\mathrm{mes}\{t\in[0,1]:S_N(t)<x,\left|S_N(t)-S_{N,M}(t)\right|<\frac1N\}\geqslant \qquad (2.19)$$

$$\geqslant\mathrm{mes}\{t\in[0,1]:S_{N,M}(t)<x-\frac1N\}=F_{N,M}(x-\frac1N)$$

и

$$F_N(x)\leqslant\mathrm{mes}\{t\in[0,1]:S_{N,M}(t)<x+\frac1N\}+$$

$$+\mathrm{mes}\{t\in[0,1]:\left|S_N(t)-S_{N,M}(t)\right|\geqslant\frac1N\}=$$

$$=F_{N,M}(x+\frac1N)+\mathrm{mes}\{t\in[0;1]:\left|\tilde S_{N,M}(t)\right|\geqslant\frac1N\}. \qquad (2.20)$$

Но, в силу неравенства П.Л.Чебышева и оценки (2.15),

$$\mathrm{mes}\{t\in[0;1]:|\tilde S_{N,M}(t)|\geqslant\frac1N\}\leqslant N^2\int_0^1\tilde S^2_{N,M}(t)dt<\frac{7C_1N^2}{M^{2\alpha-1}}.$$

Отсюда и из соотношений (2.19) и (2.20) вытекает неравенство (2.18). Лемма 3 доказана.

Следствие. *При любом вещественном x выполняются неравенства*

$$F_{N,M}(\sigma x - \frac{1}{N}) \leqslant F_N(\sigma x) < F_{N,M}(\sigma x + \frac{1}{N}) + \frac{7C_1 N^2}{M^{2\alpha-1}}. \quad (2.21)$$

Лемма 4. При всех вещественных λ справедливо неравенство

$$|\varphi_N(\lambda) - \varphi_{N,M}(\lambda)| < \frac{C_4 |\lambda|}{M^{(2\alpha-1)/2}}, \quad (2.22)$$

где $C_4 = 4A/\sqrt{2\alpha-1}$.

Доказательство леммы. Вследствие равенств (1.4) и (2.18), неравенства $|e^{i\delta}-1| \leqslant |\delta|$, справедливого при всех вещественных λ, неравенства Коши-Буняковского и оценки (2.16), при всех вещественных λ

$$|\varphi_N(\lambda) - \varphi_{N,M}(\lambda)| = |\int_0^1 e^{i\lambda S_N(t)} dt - \int_0^1 e^{i\lambda S_{N,M}(t)} dt| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 |e^{i\lambda(S_N(t) - S_{N,M}(t))} - 1| dt = \int_0^1 |e^{i\lambda \tilde{S}_{N,M}(t)} - 1| dt \leqslant |\lambda| \int_0^1 |\tilde{S}_{N,M}(t)| dt \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| (\int_0^1 \tilde{S}_{N,M}(t) dt)^{1/2} \leqslant |\lambda| (\frac{7C_1}{M^{2\alpha-1}})^{1/2} = |\lambda| (\frac{7C_1}{M^{2\alpha-1}})^{1/2} < \frac{C_4 |\lambda|}{M^{(2\alpha-1)/2}},$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если выполняется условие*

$$M \geqslant N^{3/(2\alpha-1)}, \quad (2.23)$$

то справедлива оценка

$$|\sigma_{N,M}^2 - \sigma^2| < \frac{3C_2}{N}. \quad (2.24)$$

Доказательство леммы. В силу равенств (2.10) и (2.7) и неравенства (2.6),

$$\sigma_N^2 = \int_0^1 f^2(t) dt + 2\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f(t) f(q^k t) dt + \theta_1 \cdot \frac{C_2}{N} \qquad (|\theta_1| \leqslant 1).$$

Переписав это соотношение для функции $f_M(t)$ (т.е. с учетом (2.18), (2.15) и (2.13)), получаем:

$$\sigma_{N,M}^2 = \int_0^1 f_M^2(t) dt + 2\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_M(t) f_M(q^k t) dt + \theta_2 \cdot \frac{C_2}{N} \qquad (|\theta_2| \leqslant 1).$$

Но, в силу равенства Парсеваля, при любом целом $k \geq 0$

$$\int_0^1 f(t) f(q^k t) dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' a_{mq^k} \bar{a}_m,$$

$$\int_0^1 f_M(t) f_M(q^k t) dt = \sum_{m=-M}^{M}{}' a_{mq^k} \bar{a}_m.$$

Поэтому, вследствие (2.3) и (1.1), при выполнения условия (2.23), будет:

$$|\sigma_{N,M}^2 - \sigma_N^2| \leqslant |\sum_{|m|>M} a_m \bar{a}_m + 2\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|m|>M} a_{mq^k} \bar{a}_m| + \frac{C_2}{N} \leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m>M} |a_{mq^k}| \cdot |a_m| + \frac{C_2}{N} \leqslant 4A^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^{k\alpha}} \sum_{m>M} \frac{1}{m^{2\alpha}} +$$

$$+ \frac{C_2}{N} \leqslant 4A^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k/2}} \int_M^{\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha}} + \frac{C_2}{N} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}A^2}{(\sqrt{2}-1)(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}} + \frac{C_2}{N} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}C_1}{(\sqrt{2}-1)M^{2\alpha-1}} + \frac{C_2}{N} < \frac{28C_1}{M^{2\alpha-1}} + \frac{C_2}{N} < \frac{2C_2}{N}.$$

Отсюда и из оценки (2.6) следует, что

$$|\sigma_{N,M}^2 - \sigma^2| \leqslant |\sigma_{N,M}^2 - \sigma_N^2| + |\sigma_N^2 - \sigma^2| < \frac{2C_2}{N} + \frac{C_2}{N} = \frac{3C_2}{N}.$$

Лемма 5 доказана.

Если $\sigma \neq 0$, $C_5 = \frac{2C_2}{\sigma^2} = \frac{140A^2}{(2\alpha-1)\sigma^2}$, $N \geqslant 6C_5$ и выполняется (2.23), то, в силу (2.24),

$$|\sigma_{N,M}^2 - \sigma^2| < \frac{3C_2}{N} \leqslant \frac{3C_2}{6C_5} = \frac{\sigma^2}{4},$$

$$\frac{3\sigma^2}{4} < \sigma_{N,M}^2 < \frac{5\sigma^2}{4}, \quad \frac{6\sigma}{7} < \sigma_{N,M} < \frac{8\sigma}{7}, \quad (2.25)$$

$$|\frac{\sigma}{\sigma_{N,M}} - 1| = \frac{|\sigma^2 - \sigma_{N,M}^2|}{\sigma_{N,M}(\sigma + \sigma_{N,M})} <$$

$$< \frac{3C_2}{N} \cdot \frac{6\sigma}{7} \cdot \frac{13\sigma}{7} < \frac{2C_2}{\sigma^2 N} = \frac{C_5}{N}. \quad (2.26)$$

3. СТРУКТУРА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $F_{N,M}$

Для любых целых чисел $N \geq 2$ и $k \geq 2$, любого натурального числа $p \leq k-1$ и любого упорядоченного набора целых чисел ($n_1, n_2, \dots, n_k$) с $0 \leq n_i \leq N-1$ ($i=1, 2, \dots, k$) будем обозначать символом $W^{(p)}_k(p) = W_k(n_1, \dots, n_k)$ следующее условие:

Для каждого набора отличных от нуля целых чисел ($m_1, m_2, \dots, m_k$) при всех $r=1, 2, \dots, p$ для любых r чисел $j_1 < \dots < j_r$ множества $\{1, 2, \dots, k\}$

$$q^{n_{j_1}} m_{j_1} + \dots + q^{n_{j_r}} m_{j_r} \neq 0.$$

Для каждого целого числа $N \geq 2$ выбираем произвольно целое число $M \geq 2$, удовлетворяющее условию (2.23), и при всех целых $k \geq 2$ и натуральных $p \leq k-1$ полагаем:

$$\nu_k^{(p)} = \frac{1}{N^{k/2}} \sum_{\substack{n_1=0}}^{N-1} \cdots \sum_{\substack{n_k=0 \\ [W_k^{(p)}]}}^{N-1} \sum_{m_1=-M}^{M}{}' \cdots \sum_{\substack{m_k=-M \\ [m_1 q^{n_1} + \cdots + m_k q^{n_k} = 0]}}^{M}{}' a_{m_{-1}} \cdots a_{m_k}, \quad (3.1)$$

$$\gamma = \nu_k^{(k-1)}. \quad (3.2)$$

Оценим величины $\nu_k^{(p)}$ $(k \geq 2,\ p \leq (k-1)$. В силу равенств (2.17), (2.14) и (2.12),

$$\sigma_{N,M}^2 = \int_0^1 \Big(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f_M(q^n t)\Big)^2 dt = \frac{1}{N} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \int_0^1 f_M(q^{n_1} t) f_M(q^{n_2} t) dt =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \sum_{m_1=-M}^{M}{}' \sum_{m_2=-M}^{M}{}' a_{m_1} a_{m_2} \int_0^1 e^{2\pi i (m_1 q^{n_1} + m_2 q^{n_2}) t} dt =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \sum_{m_1=-M}^{M}{}' \sum_{\substack{m_2=-M \\ [m_1 q^{n_1} + m_2 q^{n_2} = 0]}}^{M}{}' a_{m_1} a_{m_2} = \nu_2^{(1)} = \gamma_2.$$

Поэтому, в силу соотношения (2.24) (справедливого вследствие условия (2.23)),

$$\nu_2^{(1)} = \gamma_2 = \sigma_{N,M}^2 = \sigma^2 + \theta \cdot \frac{3C_2}{N} \quad (|\theta| < 1). \quad (3.3)$$

Рассмотрим теперь случай $k \geq 3$.

Лемма 6. *При всех натуральных $k \geq 3$ и $\leq k-1$ справедливо неравенство*

$$|\nu_k^{(p)}| < (3A)^k N^{k/2}. \quad (3.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Заметим, что, вследствие (3.1) и (1.1),

$$|\nu_k^{(p)}| \leqslant \frac{A^k}{N^{k/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{\substack{n_k=0 \\ [W_k^{(p)}]}}^{N-1} \sum_{m_1=-M}^{M}{}' \cdots \sum_{\substack{m_k=-M \\ [q^{n_1} m_1 + \cdots + q^{n_k} m_k = 0]}}^{M}{}' \frac{1}{|m_1 \cdots m_k|^{\alpha}}. \quad (3.5)$$

Взяв произвольно упорядоченный набор целых чисел $(n_1, n_2, \ldots, nk)$ с $0 \leq n_i \leq N-1$ $(i=1, 2, \ldots, k)$, для которого выполняется условие

$$W_k^{(p)} \quad (k \geqslant 3, 1 \leqslant p \leqslant k-1),$$

рассмотрим уравнение

$$q^{n_1} m_1 + \cdots + q^{n_k} m_k = 0 \quad (3.6)$$

относительно неизвестных $(m_1, \ldots, m_k)$.

Предположим, что $(m'_1, \ldots, m'_k)$ и $(m''_1, \ldots, m''_k)$ – два решения уравнения (3.6), все компоненты которых – целые числа, отличные от нуля. Пусть

$$\nu = \begin{cases} \text{p}, & \text{если } p \geq 2, \\ \text{k}-1, & \text{если } p=1. \end{cases}$$

Таким образом, $2 \leq \nu \leq k-1$.

Возьмем произвольно ν чисел $j_1 < \ldots < j_\nu$ множества $\{1, 2, \ldots\}$ и положим

$$l' = q^{n_{j_1}} m'_{j_1} + \cdots + q^{n_{j_\nu}} m'_{j_\nu},$$
$$l'' = q^{n_{j_1}} m''_{j_1} + \cdots + q^{n_{j_\nu}} m''_{j_\nu}. \quad (3.7)$$

В силу условия $W_k^{(p)}$, $l' \neq 0$, $l'' \neq 0$. Складывая почленно равенства (3.7), предварительно умноженные на l'' и $-l'$ соответственно, получим:

$$q^{n_{j_1}} (l'' m'_{j_1} - l'' m''_{j_1}) + \cdots + q^{n_{j_\nu}} (l'' m'_{j_\nu} - l' m''_{j_\nu}) = 0.$$

А это, вследствие условия $W_k^{(p)}$, возможно лишь при

$$l'' m'_{j_1} - l' m''_{j_1} = 0, \ldots, l'' m'_{j_\nu} - l' m''_{j_\nu} = 0,$$

т.е. только тогда, когда наборы $(m'_{j}, \ldots, m'_{j})$ и $(m''_{j_1}, \ldots, m''_{j_\nu})$ пропорциональны. А поскольку числа æ$_1 < \ldots < j_\nu$ взяты из множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ произвольно и $\nu \geq 2$, то пропорциональны и наборы $(m'_1, \ldots, m'_k)$ и $(m''_1, \ldots, m''_k)$, , т.е. эти наборы определяют целочисленные точки k – мерной плоскости, лежащие на одной и той же прямой, проходящей через точку $(0, 0, \ldots, 0)$.

Таким образом, каждое решение уравнения (3.6) с целыми компонентами, отличными от нуля, имеет вид $(sm_1^0, \ldots, sm_k^0)$, где $(m_1^0, \ldots, m_k^0)$ – упорядоченный набор отличных от нуля взаимно простых целых чисел (будем называть его базовым набором целых чисел для соответствующего набора целых чисел $(n_1, \ldots, n_k)$) и s – некоторое целое число, отличное от нуля. Поэтому для взятого набора целых чисел (n1 , . . . , nk) будет:

$$\sum_{m_1=-M}^{M}{}' \cdots \sum_{\substack{m_k=-M \\ [q^{n_1} m_1 + \cdots + q^{n_k} m_k = 0]}}^{M}{}' \frac{1}{|m_1 \cdots m_k|^{\alpha}} \leqslant 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{|sm_1^0 \cdots sm_k^0|^{\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{|m_1^0 \cdots m_k^0|^{\alpha}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^{k\alpha}} < \frac{2}{|m_1^0 \cdots m_k^0|^{1/2}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^{k/2}} \leqslant \frac{6}{|m_1^0 \cdots m_k^0|^{1/2}}, \quad (3.8)$$

так как $\alpha < 1/2$ и $k \geq 3$. Отсюда и из неравенства (3.5) следует, что

$$|\nu_k^{(p)}| < \frac{6A^k}{N^{k/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{n_k=0}^{N-1} 1 = 6A^k N^{k/2}.$$

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *При всех целых $k \geq 3$ справедлива оценка*

$$|\gamma_k| < \frac{(5A)^k k!}{N^{k/2-1}}. \quad (3.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. В силу (3.2), (3.5) и (3.8), при всех целых $k \geq 3$

$$|\gamma_k| < \frac{6A^k k!}{N^{k/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{n_1} \cdots \sum_{\substack{n_k=0 \\ [W_k^{(k-1)}]}}^{n_{k-1}} \frac{1}{|m_1^0 \cdots m_k^0|^{1/2}}, \quad (3.10)$$

где $m_1^0, \ldots, m_k^0$ – компоненты базового набора целых чисел, порожденного соответствующим набором целых чисел ($n_1, \dots, n_k$); в частности, справедливо равенство

$$q^{n_1} m_1^0 + \cdots + q^{n_k} m_k^0 = 0,$$

а значит, и равенство

$$m_k^0 = -(q^{n_1 - n_k} m_1^0 + \cdots + q^{n_{k-1} - n_k} m_{k-1}^0).$$

Отсюда и из неравенства (3.10) следует, что при всех целых $k \geq 3$

$$|\gamma_k| < \frac{6A^k k!}{N^{k/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{\substack{n_2=0 \\ [W_k^{(k-1)}]}}^{n_1} \cdots \sum_{n_k=0}^{n_{k-1}} \frac{1}{|m_1^0 \cdots m_{k-1}^0 (q^{n_1-n_k} m_1^0 + \cdots + q^{n_{k-1}-n_k} m_k^0)|^{1/2}}. \quad (3.11)$$

Для r=2, 3, . . . , k положим

$$B_r = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{\substack{n_2=0 \\ [W_r^{(r-1)}]}}^{n_1} \cdots \sum_{n_r=0}^{n_{r-1}} \frac{1}{|m_1^0 \cdots m_{r-1}^0 (q^{n_1-n_r} m_1^0 + \cdots + q^{n_{r-1}-n_r} m_r^0)|^{1/2}} \quad (3.12)$$

и

$$b_r = q^{n_1 - n_r} m_1^0 + \cdots + q^{n_{r-1} - n_r} m_r^0. \quad (3.13)$$

Очевидно,

$$B_2 = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{n_1} \frac{1}{|m_1^0 \cdot q^{n_1-n_2} m_1^0|^{1/2}} \leqslant \sum_{n_1=0}^{N-1} \left(\sum_{n_2=0}^{n_1} \frac{1}{q^{(n_1-n_2)/2}} \right) =$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N-1} \left(\sum_{r=0}^{n_1} \frac{1}{q^{r/2}} \right) < N \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^{r/2}} = \frac{\sqrt{2}N}{\sqrt{2}-1} < \frac{7N}{2} \quad (3.14)$$

и при любом r = 2, 3, . . . , k

$$|m_r^0 (m_r^0 + b_r)| \geqslant \begin{cases} 1 \cdot \dfrac{b_r}{2} = \dfrac{b_r}{2}, & |m_r^0| \leqslant \dfrac{b_r}{2}, \\ \dfrac{b_r}{2} \cdot 1 = \dfrac{b_r}{2}, & |m_r^0| > \dfrac{b_r}{2}. \end{cases} \quad (3.15)$$

В силу соотношений (3.11) и (3.12), при всех целых $k \geq 3$

$$|\gamma_k| < \frac{6A^k k!}{N^{k/2}} \cdot B_k, \quad (3.16)$$

где, с учетом соотношений (3.13) и (3.15), при любом целом $k \geq 3$

$$B_k = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{\substack{n_2=0 \\ [W_k^{(k-1)}]}}^{n_1} \cdots \sum_{n_k=0}^{n_{k-1}} \frac{1}{q^{(n_{k-1}-n_k)/2}} \times$$

$$\times \frac{1}{|m_1^0 \cdots m_{k-1}^0 (q^{n_1-n_{k-1}} m_1^0 + \cdots + q^{n_{k-2}-n_{k-1}} m_{k-2}^0 + m_{k-1}^0)|^{1/2}} =$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{\substack{n_2=0 \\ [W_k^{(k-1)}]}}^{n_1} \cdots \sum_{n_{k-1}=0}^{n_{k-2}} \left(\sum_{n_k=0}^{n_{k-1}} \frac{1}{q^{(n_{k-1}-n_k)/2}} \right) \cdot \frac{1}{|m_1^0 \cdots m_{k-2}^0 \cdot m_{k-1}^0 (m_{k-1}^0 + b_{k-1})|^{1/2}} <$$

$$< \frac{7}{2} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{\substack{n_2=0 \\ [W_{k-1}^{(k-2)}]}}^{n_1} \cdots \sum_{n_{k-1}=0}^{n_{k-2}} \frac{\sqrt{2}}{|m_1^0 \cdots m_{k-2}^0 b_{k-1}|^{1/2}} =$$

$$= \frac{7\sqrt{2}}{2} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{\substack{n_2=0 \\ [W_{k-1}^{(k-2)}]}}^{n_1} \cdots \sum_{n_{k-1}=0}^{n_{k-2}} \frac{1}{|m_1^0 \cdots m_{k-2}^0 (q^{n_1-n_{k-1}} m_1^0 + \cdots + q^{n_{k-2}-n_{k-1}} m_{k-2}^0)|^{1/2}} =$$

$$= \frac{7\sqrt{2}}{2} B_{k-1} < 5B_{k-1},$$

поскольку

$$\sum_{n_k=0}^{n_{k-1}} \frac{1}{q^{(n_{k-1}-n_k)/2}} = \sum_{r=0}^{n_{k-1}} \frac{1}{q^{r/2}} < \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^{r/2}} < \frac{7}{2}.$$

Если $k \geq 4$, то, рассуждая аналогично, получим неравенство $B_{k-1} < 5B_{k-2}$, а значит, и неравенство $B_k < 5^2 B_{k-2}$. И т. д. Повторив наши рассуждения нужное число раз, мы при любом целом $k \geq 3$ получим неравенство $B_k < 5^{k-2} B_2$, из которого, в силу оценки (3.14), следует, что

$$B_k < 5^{k-2} \cdot \frac{7N}{2} < \frac{5^k N}{6}.$$

А отсюда, в силу (3.16), вытекает справедливость при всех целых $k \geq 3$ неравенства (3.9):

$$|\gamma_k| < \frac{6A^k k!}{N^{k/2}} \cdot \frac{5^k N}{6} = \frac{(6A)^k k!}{N^{k/2-1}}.$$

Лемма 7 доказана.

Центральным моментом в доказательстве наших теорем является следующее утверждение, более слабые варианты которого содержатся в работах автора [4] и [9].

Лемма 8. *При всех вещественных* λ *справедливо равенство*

$$\varphi_{N,M}(\lambda) = \exp\left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(i\lambda)^k \gamma_k(N,M)}{k!} \right\}. \quad (3.17)$$

Так как $\varphi_{N,M}(\lambda)$ – характеристическая функция распределения $F_{N,M}$, то утверждение леммы означает, что величины $\gamma_k(N, M)$ (k=2, 3, . . .) являются семиинвариантами этого распределения.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. В силу соотношения (3.3),

$$\nu_2^{(1)} = \gamma_2. \quad (3.18)$$

Если же s = 2, 3, . . . , то, вследствие равенства (3.1),

$$\nu_{2s}^{(1)} = \frac{1}{N^s} \sum_{n_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{\substack{n_{2s}=0 \\ [W_{2s}^{(1)}]}}^{N-1} \sum_{m_1=-M}^{M}{}' \cdots \sum_{\substack{m_{2s}=-M \\ [q^{n_1} m_1 + \cdots + q^{n_{2s}} m_{2s} = 0]}}^{M}{}' a_{m_1} \cdots a_{m_{2s}} = K_s + \sum_{l=0}^{s-2} K_l,$$

где, с учетом равенства (3.18),

$$K_s = \cdots + \frac{1}{N^s} \sum_{n_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{\substack{n_{2s}=0 \\ [W_{2s}^{(1)}]}}^{N-1} \sum_{m_1=-M}^{M}{}' \cdots \sum_{\substack{m_{2s}=-M \\ [D_s]}}^{M}{}' a_{m_1} \cdots a_{m_{2s}} + \cdots,$$

$$K_l = \cdots + \frac{1}{N^s} \sum_{n_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{\substack{n_{2s}=0 \\ [W_{2s}^{(1)}]}}^{N-1} \sum_{m_1=-M}^{M}{}' \cdots \sum_{\substack{m_{2s}=-M \\ [D_l]}}^{M}{}' a_{m_1} \cdots a_{m_{2s}} + \cdots \quad (l = 0, 1, \dots, s-2),$$

символом D_s обозначено условие:

$$q^{n_{j_1}} m_{j_1} + q^{n_{j_2}} m_{j_2} = 0, \dots, q^{n_{j_{2s-1}}} m_{j_{2s-1}} + q^{n_{j_{2s}}} m_{j_{2s}} = 0,$$

где $\{j_1, j_2\}, \{j_3, j_4\}, \dots, \{j_{2s-1}, j_{2s}\}$ – любое из

$$\frac{C_{2s}^2 C_{2s-2}^2 \cdots C_2^2}{s!} = \frac{(2s)!}{2^s s!}$$

возможных (равноправных) неупорядоченных разбиений множества $\{1, 2, \dots, 2s\}$ на s непересекающихся неупорядоченных 2 – подмножеств, а символом D_l при l=0, 1, . . . , s−2 обозначено условие:

$$q^{n_{j_1}} m_{j_1} + q^{n_{j_2}} m_{j_2} = 0, \dots, q^{n_{j_{2l-1}}} m_{j_{2l-1}} + q^{n_{j_{2l}}} m_{j_{2l}} = 0,$$

$$q^{n_{j_{2l+1}}} m_{j_{2l+1}} + q^{n_{j_{2l}}} m_{j_{2l}} = 0,$$

где $\{j_1, j_2\}, \dots, \{j_{2l-1}, j_{2l}\}, \{j_{2l+1}, j_{2s}\}$ - любое извозможных неупорядоченных разбиений множества $\{1, 2, \dots, 2s\}$ на непересекающиеся l неупорядоченных 2 – подмножеств и одно неупорядоченное $(2s-2l)$ – подмножество (при l=0 пары $\{j_1, j_2\}, \dots, \{j_{2l-1}, j_{2l}\}$ отсутствуют). Следовательно, с учетом равенства (3.3),

$$K_s = \frac{(2s)!}{2^s s!}\Big(\frac{1}{N}\sum_{\substack{n_1=0\\ [W_2^{(1)}]}}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}\sum_{m_1=-M}^{M}{}'\sum_{\substack{m_2=-M\\ [q^{n_1}m_1+q^{n_2}m_2=0]}}^{M}{}' a_{m_1}a_{m_2}\Big)^s = \frac{(2s)!\gamma_2^s}{2^s s!}$$

и при l=0, 1, . . . , s−2

$$K_l = C_{2s}^{2l}\cdot\frac{(2l)!}{2^l l!}\Big(\frac{1}{N}\sum_{\substack{n_1=0\\ [W_2^{(1)}]}}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}\sum_{m_1=-M}^{M}{}'\sum_{\substack{m_2=-M\\ [q^{n_1}m_1+q^{n_2}m_2=0]}}^{M}{}' a_{m_1}a_{m_2}\Big)^l \times$$

$$\times\Big(\frac{1}{N^{s-l}}\sum_{\substack{n_1=0\\ [W_{2s-2l}^{(2)}]}}^{N-1}\cdots\sum_{n_{2s-2l}=0}^{N-1}\sum_{m_1=-M}^{M}{}'\cdots\sum_{\substack{m_{2s-2l}=-M\\ [q^{n_1}m_1+q^{n_2}m_2=0]}}^{M}{}' a_{m_1}\cdots a_{m_{2s-2l}}\Big) = \frac{(2s)!\gamma_2^l \nu^{(2)}_{2s-2l}}{2^l l!(2s-2l)!}.$$

Таким образом, при s=2, 3, . . . справедливо равенство

$$\nu^{(1)}_{2s} = \frac{(2s)!\gamma_2^s}{2^s s!} + \sum_{l=0}^{s-2}\frac{(2s)!\gamma_2^l\nu^{(2)}_{2s-2l}}{2^l l!(2s-2l)!}. \qquad (3.19)$$

Рассуждая аналогично и учитывая равенства (3.18), получим, что при s=1, 2, . . . выполняется равенство

$$\nu^{(1)}_{2s+1} = \sum_{l=0}^{s-1}\frac{(2s+1)!\gamma_2^l\nu^{(2)}_{2s-2l+1}}{2^l l!(2s-2l+1)!}. \qquad (3.20)$$

В силу равенств (2.17), (2.14) (2.12) и (3.1), мы имеем:

$$\varphi_{N,M}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k}{k!}\int_0^1\Big(\frac{1}{\sqrt N}\sum_{n=0}^{N-1} f_M(q^n t)\Big)^k dt =$$

$$= 1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k}{k!}\cdot\frac{1}{N^{k/2}}\sum_{n_1=0}^{N-1}\cdots\sum_{n_k=0}^{N-1}\sum_{m_1=-M}^{M}{}'\cdots\sum_{m_k=-M}^{M}{}' a_{m_1}\cdots a_{m_k}\times$$

$$\times\int_0^1 \exp\{2\pi i(m_1 q^{n_1}+m_2 q^{n_2}+\dots+m_k q^{n_k})t\}dt =$$

$$= 1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k}{k!}\cdot\frac{1}{N^{k/2}}\sum_{\substack{n_1=0\\ [W_k^{(1)}]}}^{N-1}\cdots\sum_{n_k=0}^{N-1}\sum_{m_1=-M}^{M}{}'\cdots\sum_{\substack{m_k=-M\\ [q^{n_1}m_1+\dots+q^{n_k}m_k=0]}}^{M}{}' a_{m_1}\cdots a_{m_k} =$$

$$= 1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k}{k!}\nu_k^{(1)} = 1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s\lambda^{2s}}{(2s)!}\nu^{(1)}_{2s} + i\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s\lambda^{2s+1}}{(2s+1)!}\nu^{(1)}_{2s+1}. \qquad (3.21)$$

А так как, вследствие оценки (3.4), при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{|\lambda|^k|\nu_k^{(1)}|}{k!} < \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|\lambda|^k(3A\sqrt N)^k}{k!} < e^{3A\lambda\sqrt N} < \infty,$$

то ряд

$$1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k}{k!}\nu_k^{(1)}, \qquad (3.22)$$

определяющий $\varphi_{N,M}(\lambda)$, при всех вещественных λ абсолютно сходится и, значит, члены в нем можно переставлять и группировать как угодно. Поэтому, в силу равенств (3.18) – (3.20), из (3.21) следует, что

$$\varphi_{N,M}(\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\lambda^{2s}\gamma_2^s}{2^s s!} + \sum_{s=2}^{\infty}(-1)^s\lambda^{2s}\sum_{l=0}^{s-2}\frac{\gamma_2^l\nu^{(2)}_{2s-2l}}{2^l l!(2s-2l)!} +$$

$$+ i\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s\lambda^{2s+1}\sum_{l=0}^{s-1}\frac{\gamma_2^l\nu^{(2)}_{2s-2l+1}}{2^l l!(2s-2l+1)!} = e^{-\frac{\lambda^2\gamma_2}{2}} + R_1 + iR_2, \qquad (3.23)$$

где

$$R_1 = \sum_{s=2}^{\infty}(-1)^s\lambda^{2s}\sum_{l=0}^{s-2}\frac{\gamma_2^l\nu^{(2)}_{2s-2l}}{2^l l!(2s-2l)!} \qquad (3.24)$$

и

$$R_2 = \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s\lambda^{2s+1}\sum_{l=0}^{s-1}\frac{\gamma_2^l\nu^{(2)}_{2s-2l+1}}{2^l l!(2s-2l+1)!}. \qquad (3.25)$$

Вследствие абсолютной сходимости ряда (3.22) при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$, ряды (3.24) и (3.25) также абсолютно сходятся при всех вещественных λ и, значит, члены в них можно переставлять и группировать как угодно. Поэтому при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$ имеем:

$$R_1 = \frac{\nu_4^{(2)}}{2!}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{(-1)^s\lambda^{2s}\gamma_2^{s-2}}{2^{s-2}(s-2)!} + \frac{\nu_6^{(2)}}{6!}\sum_{s=3}^{\infty}\frac{(-1)^s\lambda^{2s}\gamma_2^{s-3}}{2^{s-3}(s-3)!} + \dots +$$

$$+ \frac{\nu^{(2)}_{2k}}{(2k)!}\sum_{s=k}^{\infty}\frac{(-1)^s\lambda^{2s}\gamma_2^{s-k}}{2^{s-k}(s-k)!} + \dots =$$

$$= \frac{\lambda^4\nu_4^{(2)}}{4!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\lambda^{2s}\gamma_2^s}{2^s!} - \frac{\lambda^6\nu_6^{(2)}}{6!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\lambda^{2s}\gamma_2^s}{2^s s!} + \dots +$$

$$+ (-1)^k\cdot\frac{\lambda^{2k}\nu^{(2)}_{2k}}{(2k)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\lambda^{2s}\gamma_2^s}{2^s s!} +$$

$$+\dots=\mathrm{e}xp\{-\frac{\lambda^2\gamma_2}{2}\}(\frac{\lambda^4\nu_4^{(2)}}{4!}-\frac{\lambda^6\nu_6^{(2)}}{6!}+\dots+(-1)^k\cdot\frac{\lambda^k\nu_{2k}^{(2)}}{(2k)!}+\dots),$$

$$R_2=\frac{\nu_3^{(2)}}{3!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s\lambda^{2s+1}\gamma_2^{s-1}}{2^{s-1}(s-1)!}+\frac{\nu_5^{(2)}}{5!}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{(-1)^s\lambda^{2s+1}\gamma_2^{s-2}}{2^{s-2}(s-2)!}+\dots+$$

$$+\frac{\nu_{2k+1}^{(2)}}{(2k+1)!}\sum_{s=k}^{\infty}\frac{(-1)^s\lambda^{2s+1}\gamma_2^{s-k}}{2^{s-k}(s-k)!}+\dots=-\frac{\lambda^3\nu_3^{(2)}}{3!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\lambda^{2s}\gamma_2^s}{2^s s!}+$$

$$+\frac{\lambda^5\nu_5^{(2)}}{5!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\lambda^{2s}\gamma_2^s}{2^s s!}-\dots+(-1)^k\cdot\frac{\lambda^{2k+1}\nu_{2k+1}^{(2)}}{(2k+1)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^w\lambda^{2s}\gamma_2^s}{2^s s!}+$$

$$+\dots=e^{-\frac{\lambda^2\gamma_2}{2}}(-\frac{\lambda^3\nu_3^{(2)}}{3!}+\frac{\lambda^5\nu_5^{(2)}}{5!}-\dots+(-1)^k\cdot\frac{\lambda^{2k+1}\nu_{2k+1}^{(2)}}{(2k+1)!}+\dots).$$

Отсюда, в силу (3.23), следует, что при всех $\lambda\in(-\infty,\infty)$

$$\varphi_{N,M}(\lambda)=e^{-\frac{\lambda^2\gamma_2}{2}}(1+\frac{(i\lambda)^3\nu_3^{(2)}}{3!}+\frac{(i\lambda)^4\nu_4^{(2)}}{4!}+\dots+\frac{(i\lambda)^k\nu_k^{(2)}}{k!}+\dots)=$$

$$=e^{-\frac{\lambda^2\gamma_2}{2}}(1+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\nu_k^{(2)}}{k!}). \qquad (3.26)$$

В силу равенств (3.2),

$$\nu_3^{(2)}=\gamma_3. \qquad (3.27)$$

Если же s=2, 3, . . . , то, вследствие равенства (3.1),

$$\nu_{3s}^{(2)}=\frac{1}{N^{3s/2}}\sum_{\substack{n_1=0\\ [W_{3s}^{(2)}]}}^{N-1}\cdots\sum_{n_{3s}=0}^{N-1}\sum_{\substack{m_1=-M\\ [q^{n_1}m_1+\dots+q^{n_{3s}}m_{3s}]}}^{M}{}'\cdots\sum_{m_{3s}=-M}^{M}{}' a_{m_1}\cdots a_{m_{3s}}=K'_s+\sum_{l=0}^{s-2}K'_l,$$

где

$$K'_s=\dots+\frac{1}{N^{3s/2}}\sum_{\substack{n_1=0\\ [W_{2s}^{(2)}]}}^{N-1}\cdots\sum_{n_{3s}=0}^{N-1}\sum_{m_1=-M}^{M}{}'\cdots\sum_{\substack{m_{3s}=-M\\ [D'_s]}}^{M}{}' a_{m_1}\cdots a_{m_{3s}}+\dots,$$

$$K'_l=\dots+\frac{1}{N^{3s/2}}\sum_{\substack{n_1=0\\ [W_{3s}^{(2)}]}}^{N-1}\cdots\sum_{n_{3s}=0}^{N-1}\sum_{m_1=-M}^{M}{}'\cdots\sum_{\substack{m_{3s}=-M\\ [D'_l]}}^{M}{}' a_{m_1}\cdots a_{m_{3s}}+\dots \quad (l=0,1,\dots,s-2),$$

символом $D's$ обозначено условие:

$$q^{n_{j_1}}m_{j_1}+q^{n_{j_2}}m_{j_2}+q^{n_{j_3}}m_{j_3}=0,\dots,q^{n_{j_{3s-2}}}m_{j_{3s-2}}+q^{n_{j_{3s-1}}}m_{j_{3s-1}}+q^{n_{j_{3s}}}m_{j_{3s}}=0,$$

где $\{j_1,j_2,j_3,\},\dots,\{j_{3s-2},j_{3s-1},j_{3s}\}$ – любое из

$$\frac{C_{3s}^3C_{3s-3}^3\cdots C_3^3}{s!}=\frac{(3s)!}{6^s s!}$$

возможных (равноправных) неупорядоченных разбиений множества $\{1, 2, \dots, 3s\}$ на s непересекающихся неупорядоченных 3 – подмножеств, а символом D'_l при l=0, 1, . . . , s−2 обозначено условие:

$$q^{n_{j_1}}m_{j_1}+q^{n_{j_2}}m_{j_2}+q^{n_{j_3}}m_{j_3}=0,\dots,q^{n_{j_{3l-2}}}m_{j_{3l-2}}+q^{n_{j_{3l-1}}}m_{j_{3l-1}}+q^{n_{j_{3l}}}m_{j_{3l}}=0,$$

$$q^{n_{j_{3l+1}}}m_{j_{3l+1}}+\dots+q^{n_{j_{3s}}}m_{j_{3s}}=0,$$

где $\{j_1,j_2,j_3\},\dots,\{j_{3l-2},j_{3l-1},j_{3l}\}$, $\{j_{3l+1},\dots,j_{3s}\}$ – любое из

$$\frac{C_{3s}^{3l}C_{3l}^3C_{3l-3}^3\cdots C_3^3}{l!}=\frac{(3s)!}{6^l\,l!(3s-3l)!}$$

возможных неупорядоченных разбиений множества $\{1, 2, \dots, 3s\}$ на непересекающиеся l неупорядоченных 3 – подмножеств и одно неупорядоченное ($3s-3l$) – подмножество (при l=0 тройки $\{j_1,j_2,j_3\},\dots,\{j_{3l-2},j_{3l-1},j_{3l}\}$ отсутствуют).

Следовательно, с учетом равенства (3.15),

$$K'_s=\frac{(3s)!}{6^s s!}(\frac{1}{N^{3/2}}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{\substack{n_2=0\\ [W_s^{(2)}]}}^{N-1}\sum_{n_3=0}^{N-1}{}'\sum_{m_1=-M}^{M}{}'\sum_{\substack{m_2=-M\\ [q^{n_1}m_1+q^{n_2}m_2+q^{n_3}m_3=0]}}^{M}{}'\sum_{m_2=-M}^{M}{}' a_{m_1}a_{m_2}a_{m_3})^s=\frac{(3s)!\gamma_3^s}{6^s s!}$$

и при l=0, 1, . . . , s−2

$$K'_l=\frac{(3s)!}{6^l\,l!(3s-3l)!}(\frac{1}{N^{3/2}}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{\substack{n_2=0\\ [W_s^{(2)}]}}^{N-1}\sum_{n_3=0}^{N-1}{}'\sum_{m_1=-M}^{M}{}'\sum_{\substack{m_2=-M\\ [q^{n_1}m_1+q^{n_2}m_2+q^{n_3}m_3=0]}}^{M}{}'\sum_{m_3=-M}^{M}{}' a_{m_1}a_{m_2}a_{m_3})^l\times$$

$$\times(\frac{1}{N^{3(s-l)/2}}\sum_{\substack{n_1=0\\ [W_{3s-2l}^{(3)}]}}^{N-1}\cdots\sum_{n_{3s-3l}=0}^{N-1}\sum_{\substack{m_1=-M\\ [q^{n_1}m_1+\dots+q^{n_{3s-3l}}m_{3s-3l}=0]}}^{M}{}'\cdots\sum_{m_{3s-3l}=-M}^{M}{}' a_{m_1}\cdots a_{m_{3s-3l}})=\frac{(3s)!\gamma_3^l\nu_{3s-3l}^{(3)}}{6^l\,l!(3s-3l)!},$$

Таким образом, при s=2, 3, . . . справедливо равенство

$$\nu_{3s}^{(2)}=\frac{(3s)!\gamma_3^s}{6^s s!}+\sum_{l=0}^{s-2}\frac{(3s)!\gamma_3^l\nu_{3s-3l}^{(2)}}{6^l\,l!(3s-3l)!}. \qquad (3.28)$$

Рассуждая аналогично и учитывая равенство (3.27), получим, что при s=1, 2,. . . выполняются равенства

$$\begin{aligned}\nu_{3s+1}^{(2)}&=\sum_{l=0}^{s-1}\frac{(3s+1)!\gamma_3^l\nu_{3s-3l+1}^{(2)}}{6^l\,l!(3s-3l+1)!},\\ \nu_{3s+2}^{(2)}&=\sum_{l=0}^{s-1}\frac{(3s+2)!\gamma_3^l\nu_{3s-3l+2}^{(2)}}{6^l\,l!(3s-3l+2)!}.\end{aligned} \qquad (3.29)$$

Пусть

$$\hat{\varphi}_{N,M}(\lambda)=1+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\nu_k^{(2)}}{k!} \qquad (-\infty<\lambda<\infty). \quad (3.30)$$

Так как, вследствие оценки (3.4), при всех $\lambda\in(-\infty,\infty)$

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{|\lambda|^k|\nu_k^{(2)}|}{k!}<\sum_{k=3}^{\infty}\frac{|\lambda|^k(3A\sqrt{N})^k}{k!}<e^{3A|\lambda|\sqrt{N}}<\infty,$$

то ряд, стоящий в правой части равенства (3.30), при всех вещественных λ абсолютно сходится и, значит, члены в нем можно переставлять и группировать как угодно. Поэтому, в силу равенств (3.27) – (3.29), из соотношения (3.30) следует, что

$$\hat{\varphi}_{N,M}(\lambda)=1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{3s}\nu_{3s}^{(2)}}{(3s)!}+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{3s+1}\nu_{3s+1}^{(2)}}{(3s+1)!}+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{3s+2}\nu_{3s+2}^{(2)}}{(3s+2)!}=$$

$$=1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{3s}\gamma_3^s}{6^s s!}+\sum_{s=2}^{\infty}(i\lambda)^{3s}\sum_{l=0}^{s-2}\frac{\gamma_3^l\nu_{3s-3l}^{(3)}}{6^l\,l!(3s-3l)!}+$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}(i\lambda)^{3s+1}\sum_{l=0}^{s-1}\frac{\gamma_3^l\nu_{3s-3l+1}^{(3)}}{6^l\,l!(3s-3l+1)!}+\sum_{s=1}^{\infty}(i\lambda)^{3s+2}\sum_{l=0}^{s-1}\frac{\gamma_3^l\nu_{3s-3l+2}^{(3)}}{6^l\,l!(3s-3l+2)!}=$$

$$=e^{-\frac{i\lambda^3\gamma_3}{3!}}+R'_1+R'_2+R'_3, \qquad (3.31)$$

где

$$R'_1=\sum_{s=2}^{\infty}(i\lambda)^{3s}\sum_{l=0}^{s-2}\frac{\gamma_3^l\nu_{3s-3l}^{(3)}}{6^l\,l!(3s-3l)!},$$

$$R'_2=\sum_{s=1}^{\infty}(i\lambda)^{3s+1}\sum_{l=0}^{s-1}\frac{\gamma_3^l\nu_{3s-3l+1}^{(3)}}{6^l\,l!(3s-3l+1)!}, \tag{3.32}$$

$$R'_3=\sum_{s=1}^{\infty}(i\lambda)^{3s+2}\sum_{l=0}^{s-1}\frac{\gamma_3^l\nu_{3s-3l+2}^{(3)}}{6^l\,l!(3s-3l+2)!}. \tag{3.33}$$

Так как ряд (3.30) при всех $\lambda\in(-\infty,\infty)$, абсолютно сходится, то при всех вещественных λ абсолютно сходятся и ряды (3.32) и (3.33), а значит, члены в них можно переставлять и группировать как угодно. Поэтому

$$R'_1=\frac{\nu_6^{(3)}}{6!}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{3s}\gamma_3^{s-2}}{6^{s-2}(s-2)!}+\frac{\nu_9^{(3)}}{9!}\sum_{s=3}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{3s}\gamma_3^{s-3}}{6^{s-3}(s-3)!}+\cdots+$$

$$+\frac{\nu_{3k}^{(3)}}{(3k)!}\sum_{s=k}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{3s}\gamma_3^{s-k}}{6^{s-k}(s-k)!}+\cdots=\frac{(i\lambda)^6\nu_6^{(3)}}{6!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{3s}\gamma_3^{s}}{6^{s}s!}+$$

$$+\frac{(i\lambda)^9\nu_9^{(3)}}{9!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{3s}\gamma_3^{s}}{6^{s}s!}+\cdots+\frac{(i\lambda)^{3k}\nu_{3k}^{(3)}}{(3k)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{3s}\gamma_3^{s}}{6^{s}s!}+\cdots+\cdots=$$

$$=e^{\frac{(i\lambda)^3\gamma_3}{3!}}\left(\frac{(i\lambda)^6\nu_6^{(3)}}{6!}+\frac{(i\lambda)^9\nu_9^{(3)}}{9!}+\cdots+\frac{(i\lambda)^{3k}\nu_{3k}^{(3)}}{(3k)!}+\cdots\right),$$

и, аналогично,

$$R'_2=e^{\frac{(i\lambda)^3\gamma_3}{3!}}\left(\frac{(i\lambda)^4\nu_4^{(3)}}{4!}+\frac{(i\lambda)^7\nu_7^{(3)}}{7!}+\cdots+\frac{(i\lambda)^{3k+1}\nu_{3k+1}^{(3)}}{(3k+1)!}+\cdots\right),$$

$$R'_3=e^{\frac{(i\lambda)^3\gamma_3}{3!}}\left(\frac{(i\lambda)^5\nu_5^{(3)}}{5!}+\frac{(i\lambda)^8\nu_8^{(3)}}{8!}+\cdots+\frac{(i\lambda)^{3k+2}\nu_{3k+2}^{(3)}}{(3k+2)!}+\cdots\right).$$

Отсюда, в силу (3.31), следует, что при всех вещественных λ справедливо равенство

$$\hat{\varphi}_{N,M}(\lambda)=e^{-\frac{i\lambda^3\gamma_3}{3!}}\left(1+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\nu_k^{(3)}}{k!}\right). \tag{3.34}$$

Из равенств (3.26), (3.30) и (3.34) вытекает, что при всех $\lambda\in(-\infty,\infty)$

$$\varphi_{N,M}(\lambda)=e^{-\frac{\lambda^2\gamma_2}{2!}}\hat{\varphi}_{N,M}(\lambda)=e^{-\frac{\lambda^2\gamma_2}{2!}-\frac{i\lambda^3\gamma_3}{3!}}\left(1+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\nu_k^{(3)}}{k!}\right).$$

Еще раз повторив наши рассуждения, получаем, что при всех вещественных λ

$$\varphi_{N,M}(\lambda)=e^{-\frac{\lambda^2\gamma_2}{2!}-\frac{i\lambda^3\gamma_3}{3!}+\frac{\lambda^4\gamma_4}{4!}}\left(1+\sum_{k=5}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\nu_k^{(4)}}{k!}\right)=$$

$$=\exp\left\{\sum_{k=2}^{4}\frac{(i\lambda)^k\gamma_k}{k!}\right\}\left(1+\sum_{k=5}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\nu_k^{(4)}}{k!}\right).$$

И т.д. А так как, в силу оценки (3.4), для любого $\lambda\in(-\infty,\infty)$ при $p\to\infty$

$$\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{|\lambda|^k|\nu_k^{(p)}|}{k!}\leqslant\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(|\lambda|\cdot3A\sqrt{N})^k}{(p/3)^k}=$$

$$=\sum_{k=p+1}^{\infty}\left(\frac{9A|\lambda|\sqrt{N}}{p}\right)^k\to\infty,$$

то, продолжая наш процесс, мы при всех вещественных λ придем к равенству (3.17). Лемма 8 доказана.

Положим

$$c=\min\left(\frac{1}{10A},\frac{\sigma^2}{2\cdot10^3A^3}\right),\quad C_6=250A^3+3c\cdot C_2. \tag{3.35}$$

Лемма 9. *Пусть* $\sigma\neq0, N\geqslant\max(2,6C_5)$ *и выполняется условие* (2.23). *Тогда при всех вещественных* λ, *удовлетворяющих условию*

$$|\lambda|\leqslant c\sqrt{N}, \tag{3.36}$$

$$\left|\varphi_{N,M}(\lambda)-e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}\right|\leqslant\frac{C_6(|\lambda|^3+|\lambda|)}{\sqrt{N}}e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{4}}. \tag{3.37}$$

Доказательство леммы. Так как для любого комплексного числа z

$$|e^z-1|\leqslant|z|e^{|z|},$$

то, в силу соотношений (3.17), (3.3) и (2.27), при всех вещественных λ мы имеем:

$$|\varphi_{N,M}(\lambda)-e^{-\frac{\sigma_{N,M}^2\lambda^2}{2}}|=|\exp\{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\gamma_k}{k!}\}-e^{-\frac{\sigma_{N,M}^2\lambda^2}{2}}|=e^{-\frac{\sigma_{N,M}^2\lambda^2}{2}}\cdot|\exp\{\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\gamma_k}{k!}\}-1|\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{\sigma_{N,M}^2\lambda^2}{2}}|\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\gamma_k}{k!}|\cdot\exp\{|\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\gamma_k}{k!}|\}\leqslant e^{-\frac{3\sigma^2\lambda^2}{8}}\cdot\sum_{k=3}^{\infty}\frac{|\lambda|^k|\gamma_k|}{k!}\exp\{\sum_{k=3}^{\infty}\frac{|\lambda|^k|\gamma_k|}{k!}\}. \tag{3.38}$$

Если же λ удовлетворяет условию (3.36), то, вследствие (3.9) и (3.35),

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{|\lambda|^k|\gamma_k|}{k!}<\sum_{k=3}^{\infty}\frac{|\lambda|^k(5A)^k}{N^{k/2-1}}=\frac{(5A|\lambda|)^3}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5A|\lambda|}{\sqrt{N}}\right)^k\leqslant\frac{125A^3|\lambda|^3}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{\infty}(5Ac_1)^k\leqslant$$

$$\leqslant\frac{125A^3|\lambda|^3}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{250A^3|\lambda|^3}{\sqrt{N}}=\frac{2\cdot10^3A^3|\lambda|}{\sigma^2\sqrt{N}}\cdot\frac{\sigma^2\lambda^2}{8}\leqslant\frac{2\cdot10^3A^3c_1}{\sigma^2}\cdot\frac{\sigma^2\lambda^2}{8}\leqslant\frac{\sigma^2\lambda^2}{8},$$

а значит, в силу (3.38), будет

$$|\varphi_{N,M}(\lambda)-e^{-\frac{\sigma_{N,M}^2\lambda^2}{2}}|<e^{-\frac{3\sigma^2\lambda^2}{8}}\cdot\frac{250A^3|\lambda|^3}{\sqrt{N}}\cdot e^{\frac{\sigma^2\lambda^2}{8}}=$$

$$=\frac{250A^3|\lambda|^3}{\sqrt{N}}e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{4}}. \tag{3.39}$$

Кроме того, вследствие неравенств (2.24) и (2.25), будет:

$$|e^{-\frac{\sigma_{N,M}^2\lambda^2}{2}}-e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}|=e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}\cdot|e^{-\frac{(\sigma_{N,M}^2-\sigma^2)\lambda^2}{2}}-1|\leqslant e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}\cdot\frac{|\sigma_{N,M}^2-\sigma^2|\lambda^2}{2}\times$$

$$\times e^{\frac{|\sigma_{N,M}^2-\sigma^2|\lambda^2}{2}}<e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}\cdot\frac{3C_2\lambda^2}{2N}e^{\frac{\sigma^2\lambda^2}{8}}\leqslant\frac{3C_2c_1|\lambda|}{2\sqrt{N}}e^{-\frac{3\sigma^2\lambda^2}{8}}. \tag{3.40}$$

Наконец, используя оценки (3.39) и (3.40) и равенства (3.35), получаем:

$$|\varphi_{N,M}(\lambda)-e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}|\leqslant|\varphi_{N,M}(\lambda)-e^{-\frac{\sigma_{N,M}^2\lambda^2}{2}}|+|e^{-\frac{\sigma_{N,M}^2\lambda^2}{2}}-e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}|<$$

$$< \frac{250A^3|\lambda|^3}{\sqrt{N}} e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{4}} + \frac{3C_2 c_1|\lambda|}{2\sqrt{N}} e^{-\frac{3\sigma^2\lambda^2}{8}} < \frac{C_6(|\lambda|^3+|\lambda|)}{\sqrt{N}} e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{4}}.$$

Лемма 9 доказана.

4. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Пусть $\sigma \neq 0$ $N \geqslant \max(2, 6C_5)$ (а значит, $N \geqslant 6C_3$) и выполняется более сильное, нежели (2.23), условие

$$M \geqslant e^{(1+\sigma^2 c^2)N/(2\alpha-1)}. \quad (4.1)$$

В этом случае при всех вещественных λ, удовлетворяющих условию (3.36), мы имеем:

$$\frac{1}{M^{(2\alpha-1)/2}} \leqslant \frac{1}{e^{(1+\sigma^2c^2)N/2}} = \frac{1}{e^{N/2}} e^{-\sigma^2 c^2 N/2} \leqslant \frac{1}{e^{N/2}} e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}, \quad (4.2)$$

а значит, вследствие неравенства (2.22),

$$|\varphi_N(\lambda) - \varphi_{N,M}(\lambda)| < \frac{C_2|\lambda|}{M^{(2\alpha-1)/2}} \leqslant \frac{C_2|\lambda|}{e^{N/2}} e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}} \quad (4.3)$$

и, в силу оценок (4.3) и (3.37),

$$|\varphi_N(\lambda) - e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}| \leqslant |\varphi_N(\lambda) - \varphi_{N,M}(\lambda)| + |\varphi_{N,M}(\lambda) - e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}| <$$

$$< \frac{C_2|\lambda|}{e^{N/2}} e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}} + \frac{C_6(|\lambda|^3+|\lambda|)}{\sqrt{N}} e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{4}} \leqslant \frac{(C_2+C_6)(|\lambda|^3+|\lambda|)}{\sqrt{N}} e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{4}}.$$

Теорема 1 доказана.

Из справедливости неравенства (1.7) в области (3.36) стандартными приемами, связанными с применением теоремы Эссеена (см., например, [7, с. 211, теорема 1] или [8, с. 137, теорема 2]), выводится, что при N → ∞ равномерно относительно x, $-\infty<x<\infty$, выполняется соотношение

$$F_N(\sigma_N x) = \Phi(x) + O(\frac{1}{\sqrt{N}}),$$

а значит, и соотношение

$$F_N(\sigma x) = \Phi(\frac{\sigma}{\sigma_N} x) + O(\frac{1}{\sqrt{N}}) \quad (4.4)$$

с постоянной в символе "O", зависящей от A, α и σ.

В силу соотношений (2.11) и $N \geqslant 6C_3$, при всех вещественных x

$$|\Phi(\frac{\sigma}{\sigma_N}x) - \Phi(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left|\int_x^{\sigma x/\sigma_N} e^{-t^2/2} dt\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(1-C_3/N)|x|}^{(1+C_3/N)|x|} e^{-t^2/2} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2C_3|x|}{N} \exp\{-\frac{(1-C_3/N)^2 x^2}{2}\} \leqslant \frac{C_3|x|}{N} \exp\{-\frac{(1-1/6)^2 x^2}{2}\} < \frac{C_3|x|}{N} e^{-x^2/3} \leqslant \frac{C_3}{N}.$$

Отсюда и из соотношения (4.4) следует, что при N → ∞ равномерно относительно x, $-\infty<x<\infty$, выполняется соотношение (1.8). Теорема 2 доказана.

5. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 3

Пусть $\sigma \neq 0$, $N \geq \max(2, 6C_5)$ и выполняется условие (2.23), а значит, справедливы неравенства (2.26) и (2.27).

Положим

$$\Delta_{N,M} = \sigma_{N,M} \cdot \inf_{k\geqslant 3} (\frac{\sigma^2_{N,M} k!}{|\gamma_k|})^{1/(k-2)},$$

где γ_k (k=3, 4, …) – семиинварианты распределения $F_{N,M}$. Пусть

$$C_7 = \frac{\sigma}{6A} \min(1, \frac{3\sigma^2}{10^2 A^2}).$$

Вследствие соотношений (2.26) и (3.9),

$$\Delta_{N,M} > \frac{6\sigma}{7} \cdot \inf_{k\geqslant 3} \{\frac{3\sigma^2}{4} \cdot \frac{1}{25A^2} (\frac{N}{25A^2})^{(k-2)/2}\}^{1/(k-2)} =$$

$$= \frac{6\sigma}{7} \cdot \frac{\sqrt{N}}{5A} \inf_{k\geqslant 3} (\frac{3\sigma^2}{10^2 A^2})^{1/(k-2)} > \frac{\sigma\sqrt{N}}{6A} \min(1, \frac{3\sigma^2}{10^2 A^2}) = C_7\sqrt{N}, \quad (5.1)$$

а в силу теоремы В.А. Статулявичуса о восстановлении асимптотики больших уклонений по семиинвариантам распределения ([10]; см. также [8], с. 307, § 18.4.10), существует абсолютная постоянная δ_0 >0, меньшая единицы, такая, что для любого числа $\delta \in (0, \delta_0)$ при всех x, удовлетворяющих условию $1 \leqslant x \leqslant \delta\Delta_{N,M}$, при N → ∞ выполняются соотношения

$$\frac{1-F_{N,M}(\sigma_{N,M} x)}{1-\Phi(x)} = \exp\{\frac{x^3}{\Delta_{N,M}} \lambda(\frac{x}{\Delta_{N,M}})\} \cdot [1 + O(\frac{x}{\Delta_{N,M}})]$$

и

$$\frac{F_{N,M}(-\sigma_{N,M} x)}{\Phi(-x)} = \exp\{-\frac{x^3}{\Delta_{N,M}} \lambda(-\frac{x}{\Delta_{N,M}})\} \cdot [1 + O(\frac{x}{\Delta_{N,M}})],$$

где постоянные в символах "O" зависят лишь от δ, а λ(τ) – степенной ряд Крамера, сходящийся в области $|\tau| < \delta_0$. Но тогда, взяв $\delta = \delta_0/2$, мы, в силу неравенства (5.1) и сходимости ряда Крамера в области $|\tau| < \delta_0$, получаем, что при всех вещественных x, удовлетворяющих неравенствам $1 \leqslant x \leqslant \delta C_7 \sqrt{N}$, при N→∞ выполняются соотношения

$$1 - F_{N,M}(\sigma_{N,M} x) = [1-\Phi(x)] \cdot \exp\{O(\frac{x^3}{\sqrt{N}})\} \cdot [1 + O(\frac{x^3}{\sqrt{N}})]$$

и

$$F_{N,M}(-\sigma_{N,M} x) = \Phi(-x) \cdot \exp\{O(\frac{x^3}{\sqrt{N}})\} \cdot [1 + O(\frac{x^3}{\sqrt{N}})]$$

с постоянными в символах "O", зависящими от A, α и σ. Поэтому найдется постоянная $C_8 = C_8$ (A, α, σ)>0, такая, что в области

$$1 \leqslant x \leqslant C_8 N^{1/6} \quad (5.2)$$

при N → ∞ будут справедливы соотношения

$$1 - F_{N,M}(\sigma_{N,M} x) = [1-\Phi(x)] \cdot [1 + O(\frac{x^3}{\sqrt{N}})] \quad (5.3)$$

и

$$F_{N,M}(-\sigma_{N,M} x) = \Phi(-x) \cdot [1 + O(\frac{x^3}{\sqrt{N}})] \quad (5.4)$$

с постоянными в символах "O", зависящими от A, α и σ.

Естественно, в соотношениях (5.2) – (5.4) значения N должны быть столь большими, чтобы помимо неравенства $N \geqslant max(2{,}6C_5)$ выполнялось еще неравенство $C_5 C_8 N^{1/6} \geqslant 1$. Мы будем считать, что выполняется более сильное неравенство

$$C_8 N^{1/6} \geqslant 3. \qquad (5.5)$$

Заменяя в (5.2) – (5.4) x на $\frac{\sigma x + a/N}{\sigma_{N,M}}$, где $a = \pm 1$, получим, соответственно,

$$1 \leqslant \frac{\sigma x + a/N}{\sigma_{N,M}} \leqslant C_8 N^{1/6}, \qquad (5.6)$$

$$1 - F_{N,M}(\sigma_{N,M} x + \frac{a}{N}) = [1 - \Phi(\frac{\sigma}{\sigma_{N,M}} x + \frac{a}{\sigma_{N,M} N})] \cdot [1 + O(\frac{x^3}{\sqrt{N}})] \qquad (5.7)$$

и

$$F_{N,M}(-\sigma_{N,M} x - \frac{a}{N}) = \Phi(-\frac{\sigma}{\sigma_{N,M}} x - \frac{a}{\sigma_{N,M} N}) \cdot [1 + O(\frac{x^3}{\sqrt{N}})]. \qquad (5.8)$$

Перепишем неравенства (5.6) в равносильном виде:

$$\frac{\sigma_{N,M}}{\sigma} - \frac{a}{\sigma N} \leqslant \frac{\sigma_{N,M}}{\sigma} \cdot C_8 N^{1/6} - \frac{a}{\sigma N}. \qquad (5.9)$$

Будем считать еще, что $N \geqslant 7/(3\sigma)$. В силу (2.26),

$$\frac{\sigma_{N,M}}{\sigma} - \frac{a}{\sigma N} < \frac{8}{7} + \frac{3}{7} < 2,$$

а с учетом неравенства (5.5), –

$$\frac{\sigma_{N,M}}{\sigma} \cdot C_8 N^{1/6} - \frac{a}{\sigma N} > \frac{6}{7} C_8 N^{1/6} - \frac{3}{7} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{6}{7} C_8 N^{1/6} - \frac{1}{7} C_8 N^{1/6} = \frac{5}{7} C_8 N^{1/6} \geqslant \frac{15}{7} > 2.$$

Следовательно, область

$$2 \leqslant x \leqslant C_9 N^{1/6}, \qquad (5.10)$$

где $C_9 = 5C_8/7$ содержится в промежутке (5.9), а значит, соотношения (5.7) и (5.8), будучи справедливыми в этом промежутке, выполняются и в области (5.10).

Лемма 10. *Для любого числа x из области (5.10) справедливо соотношение*

$$\Phi(\frac{\sigma}{\sigma_{N,M}} x + \frac{a}{\sigma_{N,M} N}) = \Phi(x) + O(\frac{1}{N} e^{-x^2/2}), \qquad (5.11)$$

где $a = \pm 1$, а постоянная в символе "O" зависит от A, α и σ.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. В силу соотношений (2.26) и (2.25), для любого x из области (5.10) мы имеем:

$$|\Phi(\frac{\sigma}{\sigma_{N,M}} x + \frac{a}{\sigma_{N,M} N}) - \Phi(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_x^{\sigma x/\sigma_{N,M} + a/(\sigma_{N,M} N)} e^{-t^2/2} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(1-C_5/N)x - 1/(\sigma_{N,M} N)}^{(1+C_5/N)x + 1/(\sigma_{N,M} N)} e^{-t^2/2} dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{\sigma_{N,M} N} e^{-[(1-C_5/N)x - 1/(\sigma_{N,M} N)]^2/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{14}{6\sqrt{2\pi}\sigma N} \cdot \frac{2}{\sigma_{N,M} N} e^{-[(1-C_5/N)x - 7/(6\sigma N)]^2/2} < \frac{1}{\sigma N} e^{-[x-(C_5 x/N + 7/(6\sigma N))]^2/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sigma N} e^{-x^2/2} \cdot e^{C_5 x/N + 7/(6\sigma N)} \leqslant \frac{1}{\sigma N} e^{-x^2/2} \cdot e^{C_5 (C_9)^2 + 7/(12\sigma)} = \frac{C_{10}}{N} e^{-x^2/2},$$

где $C_{10} = \frac{1}{\sigma} exp\{C_5 (C_9)^2 + 7/(12\sigma)\}$. Лемма 10 доказана.

Следствие. *Для любого x из области* (5.10) *выполняется соотношение*

$$\Phi(-\frac{\sigma}{\sigma_{N,M}} x - \frac{a}{\sigma_{N,M} N}) = \Phi(-x) + O(\frac{1}{N} e^{-x^2/2}), \qquad (5.12)$$

с $a = \pm 1$ *и постоянной в символе "O", зависящей от A, α и σ.*

Действительно, соотношение (5.12) вытекает из соотношения (5.11) вследствие равенства $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, справедливого при всех вещественных x.

Далее, поскольку при всех $x > 0$

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} x} e^{-x^2/2} (1 - \frac{\theta}{x^2}) \quad (0 < \theta < 1)$$

(см., например, [13, с. 248]), при всех $x \geq 2$ мы получаем:

$$1 - \Phi(x) = \Phi(-x) > \frac{1}{4x} e^{-x^2/2}. \qquad (5.13)$$

Поэтому при всех вещественных x из области (5.10), в силу соотношений (5.11) и (5.12),

$$1 - \Phi(\frac{\sigma}{\sigma_{N,M}} x + \frac{a}{\sigma_{N,M} N}) = 1 - d\Phi(x) + O\{\frac{x}{N}[1 - \Phi(x)]\} = [1 - \Phi(x)] \cdot [1 + (\frac{x}{N})]$$

$$\Phi(-\frac{\sigma}{\sigma_{N,M}} x - \frac{a}{\sigma_{N,M} N}) = \Phi(-x) + O\{\frac{x}{N} \Phi(-x)\} = \Phi(-x) \cdot [1 + (\frac{x}{N})],$$

где $a = \pm 1$, а постоянные в символах "O" зависят от A, α и σ. А отсюда и из соотношений (5.7) и (5.8) вытекает, что при всех вещественных x из области (5.10) будет:

$$1 - F_{N,M}(\sigma x + \frac{a}{N}) = [1 - \Phi(x)] \cdot [1 + O(\frac{x}{N})] \cdot [1 + O(\frac{x^3}{\sqrt{N}})] =$$
$$= [1 - \Phi(x)] \cdot [1 + O(\frac{x^3}{\sqrt{N}})] \qquad (5.14)$$

и

$$F_{N,M}(-\sigma x - \frac{a}{N}) = \Phi(-x) \cdot [1 + O(\frac{x}{N})] \cdot [1 + O(\frac{x^3}{\sqrt{N}})] =$$
$$= \Phi(-x) \cdot [1 + O(\frac{x^3}{\sqrt{N}})] \qquad (5.15)$$

с $a = \pm 1$, и постоянными в символах "O", зависящими от A, α и σ.

Будем считать, что $N^{1/3} \geqslant C_9$, а значит, $(C_9 N^{1/6})^2 \leqslant N$. Тогда, в силу условия (4.1) и неравенства (5.13), при всех вещественных x из области (5.10) имеем:

$$\frac{N^2}{M^{2\alpha-1}} \leqslant \frac{N^2}{e^N} \leqslant \frac{N^2}{e^{(C_9 N^{1/6})^2/2} \cdot e^{N/2}} \leqslant \frac{N^2}{e^{x^2/2} \cdot e^{N/2}} = \frac{1}{4x} e^{x^2/2} \cdot \frac{4N^2 x}{e^{N/2}} <$$

$$< [1 - \Phi(x)] \cdot \frac{4N^2 x}{e^{N/2}} = [1 - \Phi(x)] \cdot O(\frac{x^3}{\sqrt{N}}) = \Phi(-x) \cdot O(\frac{x^3}{\sqrt{N}}). \qquad (5.16)$$

Из справедливости в области (5.10) соотношений (2.21) и (5.14) – (5.16) вытекает справедливость в этой области и соотношений (1.11) и (1.12). Теорема 3 доказана.

Относительно доказательства теоремы 4 практически все сказано в пункте 1 работы.

В связи с повышением в последнее время интереса к исследованиям дискретных распределений, заметим, что предложенная в работе методика применения диофантовых уравнений в предельных теоремах для распределения дробных долей показательной функции может быть использована и в задачах о распределении вычетов показательной функции с растущими модулями, например, в русле работ автора [14] – [16].

В заключение можно полушутя – полусерьезно сказать, что представленная работа, как и более ранняя работа [6], в частности, реабилитирует довольно широко распространенное до выхода в свет работы [3] мнение, что количественные результаты, полученные с привлечением аппарата теории чисел, как правило, более точны, чем аналогичные результаты, полученные без использования арифметических средств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Постников А.Г.* Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. Т. 82. М.: Наука, 1966.
2. *Ибрагимов И. А.* Центральная предельная теорема для сумм функций от независимых величин и сумм вида L f (2k t) // Теория вероятн. и ее применен. // 1967. Т. 12. Вып. 4. С. 655-665.
3. *Мухутдинов Р.Х.* Диофантово уравнение с матричной показательной функцией // Докл. АН СССР, 1962. Т. 142. Т 1. С. 36-38.
4. *Усольцев Л.П.* Неулучшаемая оценка скорости сходимости к нормальному закону и асимптотика больших уклонений в одном частном случае теоремы Форте-Каца // Исследования по аддитивной теории чисел. Научн. труды Куйбыш. пед. ин-та, 1978. Т. 215. С. 45 – 76.
5. *Усольцев Л. П.* Центральная предельная теорема и большие уклонения для одной суммы с показательной функцией // В сб.: Марковские процессы и их применение. Саратов: Изд-во Сарат. гос. ун-та, 1980. С. 105 – 114.
6. *Усольцев Л.П.* Об асимптотике и больших уклонениях в центральной предельной теореме для сумм вида Σ f (q^nt) // Вестник Самарского гос. ун-та. Естественнонаучная серия. 2009. т 4(70). С. 52 – 84.
7. *Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 264 с.
8. *Петров В.В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972. 416 с.
9. *Усольцев Л.П.* О больших уклонениях для классических распределений, порождаемых дробными долями показательной функции с целым основанием // Вестник Самарского техн. ун-та, серия: Физ.-матем. науки, 2004. вып. 30. С. 99-107.
10. *Statulevîčius V.A.* On large deviations // Zeitschrift für Wahrsch., 1966, V. 6, T. 2, S. 133-144.
11. *Усольцев Л.П.* К закону повторного логарифма в задаче о распределении дробных долей показательной функции // Труды Куйбыш. авиац. Ин-та. Математика. 1975. Вып. 1. С. 24 – 28.
12. *Москвин Д.А., Постников А.Г.* Локальная предельная теорема для рас- пределения дробных долей показательной функции // Теория вероятн. и ее применен., 1978. Т. 23. Вып. 3. С. 540- 547.
13. *Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.* Теория вероятностей (Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы) М.: Наука, 1973. 496 с.
14. *Усольцев Л.П.* Аналог теоремы Форте-Каца // Докл. АН СССР, 1961. Т. 137. Т. 6. С. 1315- 1318.
15. *Усольцев Л.П.* Оценки больших уклонений в некоторых задачах на на неполную систему вычетов. Докл. АН СССР, 1962. Т. 143. Т 3. С. 539- 542.
16. *Усольцев Л.П.* О показательной рациональной тригонометрической сумме специального вида // Докл. АН СССР, 1963. Т. 154. Т 1. С. 62- 64.

FUNDAMENDAL LIMIT THEOREM FOR THE DISTRIBUTION OF THE FRACTIONAL PARTS OF THE EXPONENTIAL FUNCTION

Samara State Aerospace University named after Academician S.P. Korolyov
(National Research University)

The paper proposes a new method of application of Diophantine equations with an exponential function, which allows to obtain sharp estimates remainder in the central and local limit theorem and the theorem on the asymptotic behavior of large deviations for the distribution of the fractional parts of an exponential function.
Key words: Diophantine equations; the exponential function; central limit theorem; Local limit theorem; asymptotic behavior of large deviations.

Lev Usoltsev, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor at the Applied Mathematics Department. E-mail: usoltsev @ ssau.samara.ru