

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

© 2015 А.Ю. Шорников, О.Л. Старина

Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П.Королева
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 17.02.2015

В данной статье рассмотрен способ моделирования гравитационного поля сложной конфигурации барицентрическим методом на примере астероида Эрос 433, проведен сравнительный анализ результатов, полученных в рамках предлагаемой модели и результатов полученных при разложении гравитационного потенциала по сферическим функциям.

Ключевые слова: математическая модель, гравитационное поле сложной конфигурации, астероид, задача n-тел.

Астероидная и кометная опасность является общепризнанной реальной угрозой космического пространства, которая требует постоянного внимания со стороны мировой общественности. В настоящий момент остро стоит проблема разработки методов мониторинга и противодействия потенциально опасным объектам. Для моделирования возможных схем исследования и уничтожения астероидной и кометной опасности, требуется решить задачу моделирования гравитационного поля объекта, которое часто имеет сложную конфигурацию.

В силу принципа аддитивности гравитационных сил в нерелятивистской небесной механике понятие гравитационного потенциала распространяется на дискретные точечные распределения тяготеющих масс. Элементарное для малого числа точечных масс определение потенциала трансформируется в серьезную математическую задачу для сложно организованных протяженных тел, примером которых могут служить планеты. Теорию гравитационного потенциала, история которой восходит к работам Ньютона, Клеро, Лапласа и Лежандра, следует рассматривать как один из наиболее разработанных и мощных разделов математической физики, тесно связанный с соответствующими разделами математического анализа, теории поля, функционального анализа и теории специальных функций.

Таким образом, существует ряд методов позволяющих математически описывать гравитационные поля сложной конфигурации с разной степенью точности. В данной работе, для описания гравитационного поля астероида, предлагается использовать два подхода к формированию математической модели несферического

Старина Ольга Леонардовна, доктор технических наук, профессор кафедры космического машиностроения. E-mail: solleo@mail.ru

Шорников Андрей Юрьевич, магистрант, старший лаборант кафедры космического машиностроения. E-mail: serandru33@mail.ru

гравитационного поля:

- моделирование потенциала астероида в сферических функциях, используемое для описания гравитационных полей планет;

- модель гравитационного поля, образованная суперпозицией гравитационных полей двух условных тел различной массы, вращающихся относительно общего барицентра:

$$U(x, y, z) = G \left[\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2} \right], \quad (1)$$

$$R_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}, \quad (2)$$

$$R_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2}, \quad (3)$$

где m_1, m_2 - массы условных притягивающих центров, x_i, y_i, z_i - соответствующие координаты притягивающих центров, G - гравитационная постоянная. Для удобства анализа результатов, получаемых в рамках данной модели, перейдем от декартовой барицентрической системы координат к сферической барицентрической системе координат. В качестве фундаментальной плоскости сферической системы координат пусть выступает плоскость эклиптики. Формулы перехода определим следующим образом:

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin \lambda \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \lambda \cdot \sin \varphi \\ z = r \cdot \cos \lambda \end{cases}, \quad (4)$$

где λ - зенитный угол, φ - азимутальный угол, r - расстояние от барицентра системы до заданной точки пространства.

В качестве объекта анализа выберем астероид Эрос (433), физические характеристики, которого представлены в табл. 1 [1].

Расстояние между условными притягивающими центрами, определяется исходя из периода вращения астероида, по формуле полученной [3, с.22]:

$$d = \sqrt[3]{\frac{G(m_1 + m_2)}{\omega^2}}, \quad (5)$$

Таблица 1. Физические характеристики астероида Эрос

Геометрические размеры, км	34,4x11,2x11,2
Средний диаметр, км	16,8
Масса, кг	$6,69 \cdot 10^{15}$
Период вращения, ч	5,27

Таким образом, модель астероида в задаче представляет собой гравитационное поле двух условных притягивающих центров с массами: $4,356 \cdot 10^{15}$ кг, $2,334 \cdot 10^{15}$ кг и вращающихся вокруг барицентра с угловой скоростью $5,6 \cdot 10^{-4}$ рад/сек. Точные значения масс были выбраны исходя из геометрии формы астероида.

На рис. 1 представлен астероид Эрос [1] и линии уровня гравитационного потенциала полученные в результате использования предлагаемой модели.

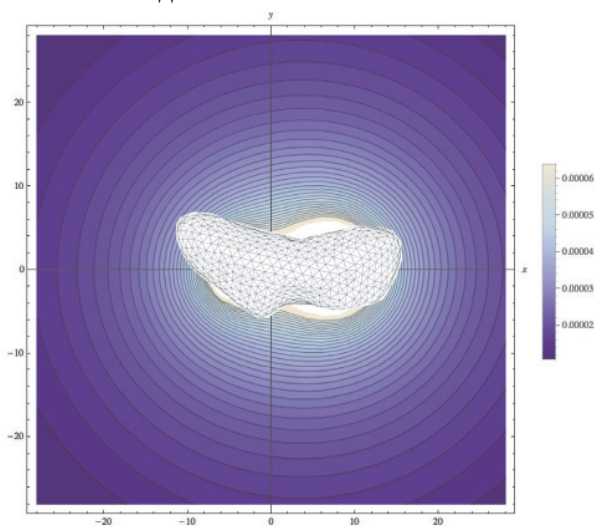


Рис. 1. Астероид EROS и линии уровня гравитационного потенциала, полученного в рамках предлагаемой модели

Для того, чтобы объективно исследовать точность предлагаемой математической модели, сравним ее с моделью гравитационного потенциала в сферических функциях, которая представлена в работе [2]. Определим выражение для гравитационного потенциала в сферических функциях:

$$U_{r,\lambda,\varphi} = \frac{\mu}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n P_n^m(\sin \varphi) \{ C_m \cos m\lambda + S_m \sin m\lambda \} \right], \quad (6)$$

где: r, λ, φ – сферические координаты точек;
 $\mu = GM$ – гравитационный параметр;
 a – средний радиус тела;
 P_n^m – присоединенные функции Лежандра степени n , порядка m ;
 C_m, S_m – сферические гармонические коэффициенты (определяются распределением масс астероида) [2], [4, с.36].

В случае когда определить сферические ко-

эффициенты гравиметрическими методами затруднительно, согласно работе [2] предлагается определять сферические гармонические коэффициенты двумя методами: трех-координатным эллипсоидным приближением и методом многогранников. Ошибка при использовании трех-координатного эллипсоидного метода составляет в среднем около 17,5%, но при расчёте коэффициентов методом многогранников погрешность снижается до 0,23% – рис. 2.

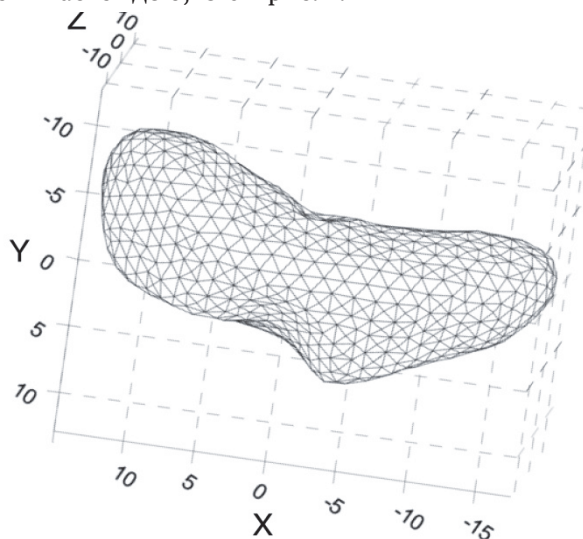


Рис. 2. Модель астероида Эрос (433), полученная при расчете сферических гармонических коэффициентов методом многогранников [2]

Проведем сравнительный анализ математических моделей гравитационного потенциала, полученного методом сферических функций и предлагаемым барицентрическим методом. Ограничимся четвертым порядком точности для зональных сферических функций и гармонических коэффициентов. На рис. 3 представлены кривые гравитационного потенциала, полученного в рамках предлагаемой модели и модели потенциала, полученного при его разложении по сферическим функциям при различных значениях аргументов. Таким образом, норма отклонения предлагаемой модели от модели потенциала в сферических функциях значительно уменьшается с увеличением расстояния от объекта моделирования, однако при этом, в зависимости от геометрии конкретного объекта, наблюдаются отклонения от реального гравитационного поля для различных значений углов широты и долготы.

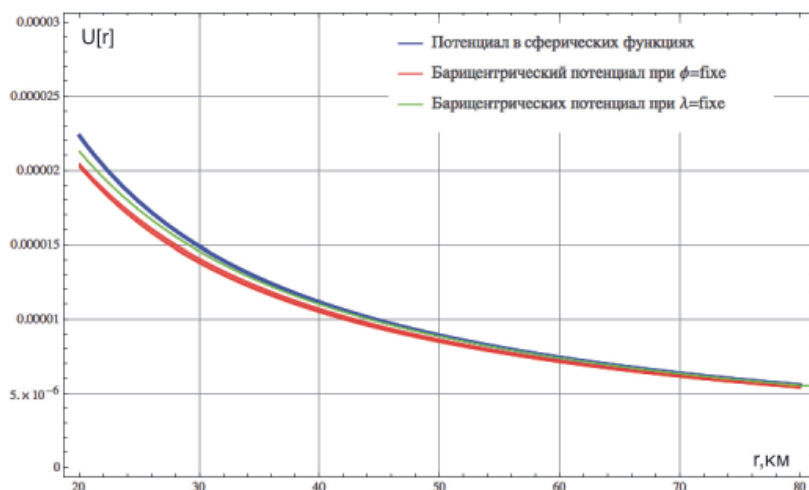


Рис. 3. Значения гравитационного потенциала при увеличении расстояния от барицентра до заданной точки для двух моделей потенциала

Из рис. 5 видно, что основное отклонение предлагаемой модели от модели гравитационного потенциала в сферических функциях наблюдается при предельных значениях широты $\phi \in [0; 2\pi]$ и среднем значении долготы $\lambda \in [0; \pi]$; для прочих углов норма погрешности барицентрической модели минимальна. Таким образом, следует отметить, что сферические зональные функции создают более четкую картину в распределении потенциала в пространстве, что подтверждается более равномерным распределением значений потенциала (рис. 4). Однако расчетная максимальная погрешность в данном случае не превышает 10% (рис. 5). Очевидно, что при увеличении расстояния от барицентра системы до заданных точек пространства значение погрешности будет только уменьшаться.

Таким образом, исходя из полученных результатов, можно сделать вывод о том, что пред-

лагаемая барицентрическая модель может быть использована при моделировании перелетов и маневров вблизи тел с гравитационным полем не сферической формы достаточно с высокой степенью точности. С увеличением расстояния модель все точнее отражает реальное положение вещей. Однако использование модели в каждом конкретном случае требует проведения дополнительных исследований, с целью выявить предельные отклонения от реальной картины гравитационного потенциала. Следует отметить, что полученная модель может применяться и при моделировании гравитационных полей космических объектов с более сложной геометрией, а количество притягивающих центров может варьироваться для обеспечения требуемой точности. Тогда задача моделирования перелета в гравитационном поле сложной конфигурации сводится к задаче перелета в системе n-тел.

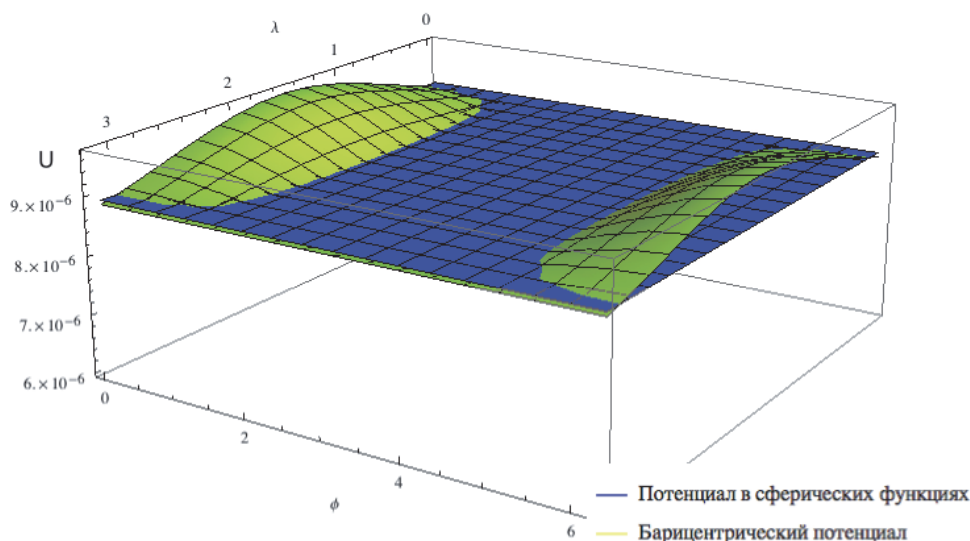


Рис. 4. Поверхности изменения гравитационного потенциала двух моделей при изменении значений широты и долготы при фиксированном значении расстояния от начала координат до заданной точки пространства ($r = 50$ км)

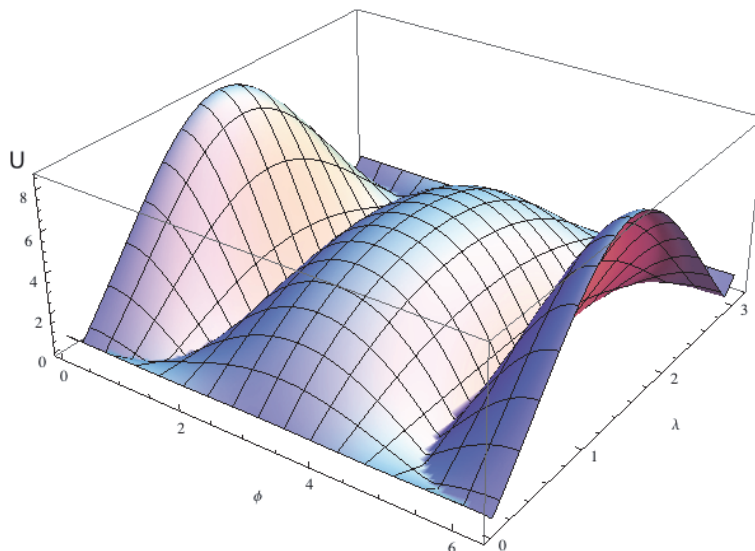


Рис. 5. Поверхность относительной погрешности для модели гравитационного потенциала с точечными притягивающими центрами (в %)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. База данных астероидов: [Электронный ресурс]. URL: <http://space.frieger.com/asteroids/> (дата обращения 14.01.2015).
2. The Method to Determine Spherical Harmonic Model of Asteroid based on Polyhedron / Zhang Zhenjiang, Yu Meng, Cui Hutaо, Cui Pingyuan. Deep Space Exploration Research Center, Harbin Institute of Technology, China 2010.
3. Себекей В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел [пер. с англ. под ред. Дубошина Г.Н.]. М.: Наука, 1982. 656 с.
4. Нариманова Г.С., Тихонравова М.К. Основы теории полета космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1972. 610 с.

SIMULATION OF NON-SPHERICAL GRAVITATIONAL FIELD

© 2015 O.L Starinova, A.Y. Shornikov

Samara State Aerospace University named after Academician S.P. Korolyov
(National Research University)

This article describes a simulation method of the non-spherical gravitational field by barycentric method for an asteroid, a comparative analysis of the results obtained within the proposed model and the results obtained by the decomposition of the gravitational potential in spherical functions.

Keywords: mathematical model, the gravitational field of a complex configuration, asteroid, n-body problem.

Starinova Olga, Doctor of Technics, Professor at the Space Engineering Department. E-mail: solleo@mail.ru

Shornikov Andrei, Magister, Research Assistant in Space Engineering Department. E-mail: serandru33@mail.ru