

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРЯМОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МОНТЕ-КАРЛО К ЗАДАЧЕ ТЕЧЕНИЯ РАЗРЯЖЕННЫХ ГАЗОВ

© 2015 В.В. Никонов

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева  
(национальный исследовательский университет)

Статья поступила в редакцию 23.11.2015

В статье решается задача прямого численного моделирования течения разряженного газа методом Монте-Карло. Рассмотрены две задачи: обтекания плоской пластины, установленной поперек потока и течения свободной струи. При моделировании обтекания плоской пластины, граничный к пластине слой увлекает с собой только соседний неподвижный слой за пластиной. При моделировании течения свободной струи, увлечения соседнего неподвижного слоя не происходит. По результатам численного моделирования можно сделать вывод, что в разряженном газе близлежащие слои течения слабо влияют друг на друга.

*Ключевые слова:* разряженный газ, прямое моделирование, численное моделирование, метод Монте-Карло, плоская пластина, свободная струя, слой течения.

### ВВЕДЕНИЕ

Метод прямого моделирования Монте-Карло (ПММК) [1] применяется для симуляции течения разряженных газовых потоков. В данном методе используется прямое моделирование теплового движения молекул газа с помощью «тестовых» частиц. Для снижения потребного машинного времени в одной из разновидностей метода ПММК [2] помимо «тестовых» вводятся еще «целевые» частицы. Данные частицы участвуют в столкновениях с «тестовыми» частицами, что позволяет понизить порядок числа операций до  $N$ , где  $N$  – количество «тестовых» частиц. При этом каждой «тестовой» частице соответствует определенная «целевая» частица, которая с ней сталкивается. «Целевые» частицы вводятся в численную схему метода только на этапе моделирования столкновения частиц. После определения скорости «тестовых» частиц (после столкновения) «целевые» частицы в схеме метода не учитываются.

### 1. ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА МЕТОДА

В данной работе рассматриваются двумерные течения разряженных газов. Область течения разбивается однородной сеткой с квадратными ячейками. На каждом шаге по времени с границы течения, где выставляется скорость набегающего потока, в поток выпускаются «тестовые» частицы. В каждую прилегающую к границе ячейку сетки помещается по одной частице. Координаты этих частиц внутри ячейки сетки определяются следующим образом:

*Никонов Валерий Владимирович, кандидат технических наук, инженер кафедры конструкции и проектирования летательных аппаратов. E-mail: v\_nikonov@mail.ru*

$$y = R' h, \quad (1)$$

где  $R'$  – случайная величина из диапазона  $R' \in [0, 1)$ ,

$h$  – шаг сетки.

После того, как частицы были введены в поток, необходимо определить их скорости. Скорости определяются по формулам, приведенным ниже, которые были получены из условия равновесия границы. Компонента скорости перпендикулярная границе определяется как

$$u = \sqrt{2RT_\infty} \Omega(U, R'), \quad (2)$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T_\infty$  – температура набегающего потока,  $\Omega(U, R')$  – положительный корень уравнения:

$$R' = \frac{\exp[-(U - \Omega)^2] + \sqrt{\pi} U [1 + \operatorname{erf}(U - \Omega)]}{\exp(-U^2) + \sqrt{\pi} U (1 + \operatorname{erf} U)}, \quad (3)$$

где

$$U = u_\infty / \sqrt{2RT_\infty}. \quad (4)$$

Здесь  $u_\infty$  –  $x$ -компонента скорости набегающего потока.

Тангенциальная к границе набегающего потока компонента скорости испускаемой тестовой частицы запишется как

$$v = \sqrt{\frac{12RT_\infty}{M}} \left( \sum_{k=1}^M R'_k - \frac{M}{2} \right) + v_\infty, \quad (5)$$

где  $M$  – некоторое целое число, обычно [3] принимаемое 12,

$v_\infty$  –  $y$ -компонента скорости набегающего потока.

На следующем этапе для каждой частицы вычисляется время необходимое ей, чтобы вылететь из ячейки (пересечь границу с соседней ячейкой).

$$\tau_b = \frac{|\vec{r}|}{|u|}. \quad (6)$$

Здесь в числителе модуль вектора расстояния от точки нахождения «тестовой» частицы до точки пересечения с границей ячейки. В знаменателе – модуль вектора скорости частицы.

После этого для каждой «тестовой» частицы рассчитывается время ее свободного пробега между столкновениями по формуле:

$$\tau_c = \frac{1.225m\sqrt{2RT_\infty}}{3p\sqrt{\pi^3 d^2 (-\ln R')}}, \quad (7)$$

где  $p$  – давление,  $m$  – молекулярная масса воздуха,

$d^2$  – квадрат диаметра молекулы воздуха находится как

$$d^2 = \frac{2\sqrt{mkT_\infty}}{3\mu\sqrt{\pi^3}}. \quad (8)$$

Здесь  $k$  – постоянная Больцмана,  $\mu$  – динамическая вязкость.

Если  $\tau_b < \tau_c$ , считается, что «тестовая» частица покинула ячейку и перешла в соседнюю.

Если  $\tau_b > \tau_c$ , считается, что произошло столкновение между «тестовой» и «целевой» частицами.

«Тестовые» частицы могут также сталкиваться с твердыми границами. В этом случае возможны два варианта: зеркальное, либо диффузное отражение. При зеркальном отражении тангенциальная к стенке компонента скорости не изменяется, а нормальная компонента меняет знак. При диффузном отражении скорости частицы определяются по формулам:

$$u = u_b + \sqrt{2RT_b (-\ln R')}, \quad (9)$$

$$v = v_b + \sqrt{\frac{12RT_b}{M} \left( \sum_{k=1}^M R'_k - \frac{M}{2} \right)}, \quad (10)$$

где  $u_b = v_b = 0$  – компоненты скорости неподвижной стенки,

$T_b$  – температура стенки,  $u$  – нормальная к стенке компонента скорости,  $v$  – тангенциальная к стенке компонента скорости.

После определения этих компонент скорости алгоритм метода возвращается к определению времени  $\tau_b$ .

Если  $\tau_b > \tau_c$  произошло столкновение между частицами, то «тестовая» частица перемещается в точку столкновения:

$$\begin{aligned} x_c &= x + u\tau_c, \\ y_c &= y + v\tau_c. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $(x, y)$  – координаты «тестовой» частицы до столкновения,

$(x_c, y_c)$  – координаты «тестовой» частицы в момент столкновения.

Компоненты скорости «целевой» частицы определяются как

$$\begin{aligned} u_i &= u_\infty + \sqrt{\frac{12RT_{xi}}{M} \left( \sum_{k=1}^M R'_k - \frac{M}{2} \right)}, \\ v_i &= \sqrt{\frac{12RT_{yi}}{M} \left( \sum_{k=1}^M R'_k - \frac{M}{2} \right)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $(T_{xi}, T_{yi})$  – компоненты кинетической температуры  $i$ -ой «тестовой» частицы.

Компоненты «тестовой» частицы после соударения с «целевой» частицей находятся как

$$\begin{aligned} u' &= u + w_y \sin \varepsilon \cos \psi \sin \psi - w_x \cos^2 \psi, \\ v' &= v + w_x \sin \varepsilon \cos \psi \sin \psi - w_y \cos^2 \psi, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $(u, v)$  – компоненты скорости «тестовой» частицы,

$$\begin{aligned} w_x &= u - u_i, \\ w_y &= v - v_i, \end{aligned} \quad (14)$$

параметры столкновения  $\varepsilon$  и  $\psi$  статически определяются [4] как

$$\varepsilon = 2\pi R', \quad (15)$$

$$\psi = \left( 1 + \frac{2}{(v_{0\max} R')^4} \right)^{-1/4} \omega(\eta), \quad (16)$$

где  $v_{0\max} = 1,5$ ,

$\omega(\eta)$  – эллиптический интеграл первого рода,

$$\omega(\eta) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \eta^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (17)$$

После этапа столкновений частиц следует этап вычисления параметров потока. Скорость потока в каждой ячейке определяется следующим образом

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \left[ \sum_{q=1}^N \tau_q u_q \right] / \sum_{q=1}^N \tau_q, \\ \bar{v} &= \left[ \sum_{q=1}^N \tau_q v_q \right] / \sum_{q=1}^N \tau_q, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $(u_q, v_q)$  – компоненты скорости  $q$ -ой тестовой частицы,

$\tau_q$  – время, проведенное  $q$ -ой тестовой частицей в рассматриваемой ячейке.

Кинетическая температура рассчитывается как

$$T_x = \frac{\bar{u}^2}{nR} = \frac{1}{nR} \left[ \sum_{q=1}^N \tau_q u_q^2 \right] / \sum_{q=1}^N \tau_q,$$

$$T_y = \frac{\overline{v^2}}{nR} = \frac{1}{nR} \left[ \sum_{q=1}^N \tau_q v_q^2 \right] / \sum_{q=1}^N \tau_q, \quad (19)$$

где  $n$  – количество частиц, которое находилось в данной ячейке в рассматриваемый момент времени.

На этом численная схема метода завершается. После этого новые «тестовые» частицы вводятся в поток во входном сечении.

Блок-схема метода представлена на рис. 1. Здесь  $nt$  – число шагов по времени.

## 2. НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим течение за плоской пластиной, поставленной поперек разряженного потока. Область течения представляет собой прямоугольник 100 на 20 см разделенный на 100 x 20 ячеек сетки. Ширина пластины 10 см. Сечение, в котором измерялась компонента скорости  $u$ , находилось в 10 см за пластиной (см. рисунок 2). Давление равнялось 101,325 Па. Скорость набегающего потока  $u_\infty = 10 \text{ м/с}$ . Температура пластины и потока 273 К. В процессе расчета было выполнено 50000 шагов по времени.

Было также рассмотрено моделирование свободной струи. Расчетная область представляла собой прямоугольник размерами 100 на 10 см, в верхней половине которого распространялась свободная струя с  $u_\infty = 10 \text{ м/с}$ , в нижней половине прямоугольника газ был неподвижен. Сетка пред-



Рис. 1. Блок-схема метода ПММК

ставляла собой 100 x 10 ячеек. Температура струи и неподвижного газа равнялась 273 К. Давление равнялось 101,325 Па. В процессе расчета было выполнено 100000 шагов по времени. Результат представлен на рис. 3. Сечение, в котором измерялась компонента скорости  $u$ , находилось в 9 см от входной границы расчетной области.

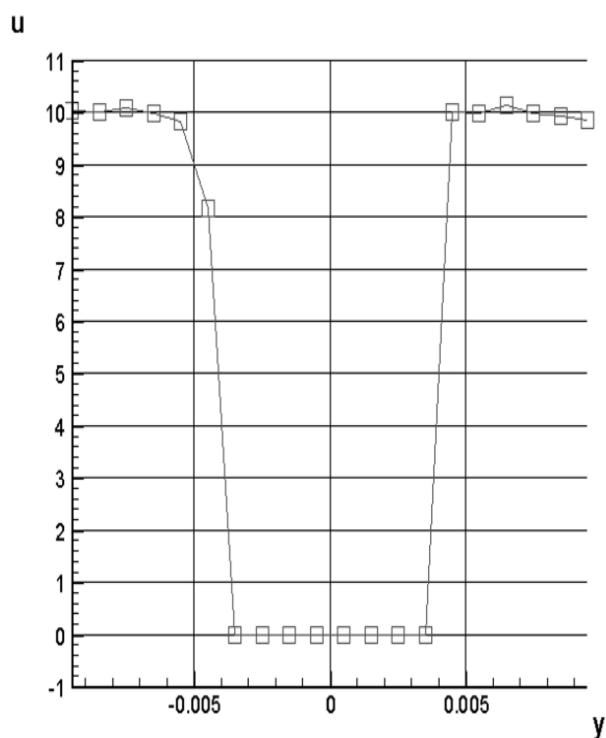


Рис. 2. Профиль продольной компоненты скорости  $u$  за плоской пластиной

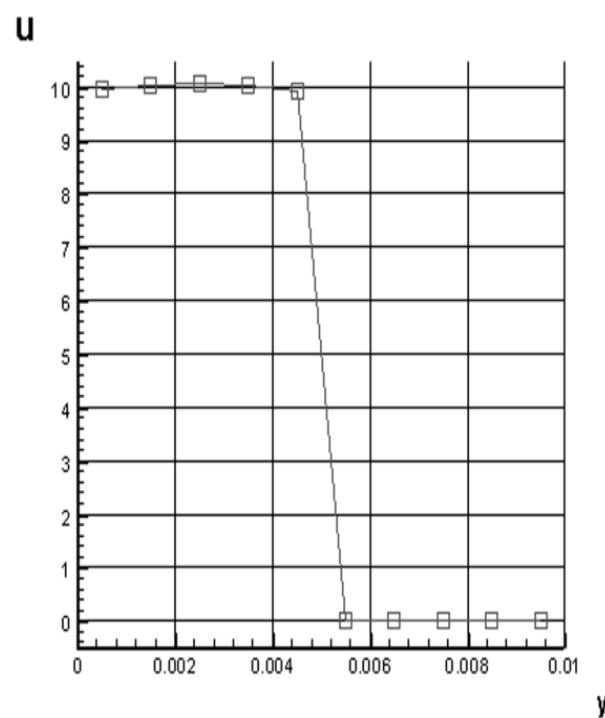


Рис. 3. Профиль продольной компоненты скорости  $u$  в зоне контакта струи с неподвижным газом

## ВЫВОДЫ

По численным результатам моделирования методом ПММК можно сделать следующий вывод, что близлежащие слои течения слабо влияют друг на друга. При моделировании обтекания плоской пластины, граничный к пластине слой увлекает с собой только соседний неподвижный слой за пластиной. При моделировании течения свободной струи, увлечения соседнего неподвижного слоя не происходит.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bird, G.A.* The DSMC method / G.A.Bird. – The University of Sydney. 2013.
2. *Tuer, T.W.* Springer G.S., A test particle Monte Carlo method / T.W.Tuer, G.S.Springer // Computers & Fluids. Vol. 1. 1973. - P. 399-417
3. *Hamming, R.W.* Numerical Methods for Scientists and Engineers / R.W.Hamming. -New York. -McGraw-Hill. 1962.
4. *Haviland, J.K.* The solution of two molecular flow problems by the Monte Carlo method / J.K.Haviland // Methods in Computational Physics. Adler B. ed. 4. Academic Press. New York. 1965. - P. 109-209.

## DIRECT SIMULATION MONTE-CARLO METHOD APPLICATION TO THE PROBLEM OF DILUTE GAS FLOWS

© 2015 V.V. Nikonov

Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov  
(National Research University)

The problem of direct numerical simulation of dilute gas flow by Monte-Carlo method is considered. The results of numerical solution of two problems (the flow past flat plate and the free stream) are obtained. When the flow past flat plate is considered, the nearest to the boundary flow involves to the motion only neighboring unmoved layer. When the free stream is considered, the involving to the motion nearest to stream layer isn't happened. It is shown, that nearest layers in dilute gas weak affects each other.

*Keywords:* dilute gas, direct simulation, numerical simulation, Monte-Carlo method, flat plate, free stream, flow layer.