УДК 539.3 : 539.376

ПОЛЗУЧЕСТЬ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

© 2015 В.С. Глущенков[1, 2], Н.А. Архипова[2]

[1] Самарский филиал Московского городского педагогического университета
[2] Самарский государственный университет путей сообщения

Статья поступила в редакцию 06.11.2015

В работе рассматривается макроскопический (эффективный) закон ползучести многокомпонентного стохастически армированного изотропного композиционного материала типа «матрица – шаровые включения».
Ключевые слова: макроскопический (эффективный) закон ползучести, функция ползучести, композиционные материалы.

Рассмотрим многокомпонентный композиционный материал, первый компонент которого является матрицей, а другие – отдельными, хаотически распределенными в матрице включениями различных материалов, имеющих шаровую форму. Индексом m будем обозначать характеристики материала матрицы, индексом s – материала включений, $s = 0, 1, 2, \ldots, n$, (индекс 0 соответствует порам).

Запишем локальные уравнения материала матрицы композиционного материала в виде:

$$2\mu_m^0 e_{ij}(\mathrm{r}, t) = s_{ij}(\mathrm{r}, t) + \int_0^t \Gamma_m(t-\tau) s_{ij}(\mathrm{r}, \tau) d\tau, \quad \varepsilon_{kk}(\mathrm{r}, t) = \frac{\sigma_{kk}(\mathrm{r}, t)}{3K_m}, \tag{1}$$

или:

$$e_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int_0^t J_m(t-\tau) ds_{ij}(\mathbf{r}, \tau), \quad \varepsilon_{kk}(\mathbf{r}, t) = \frac{\sigma_{kk}(\mathbf{r}, t)}{3K_m}, \tag{2}$$

то есть будем считать, что объёмные деформации не обладают наследственными свойствами. Пусть локальные свойства материалов включений не проявляют наследственных свойств и имеют вид:

$$e_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t)}{2\mu_s}, \quad \varepsilon_{kk}(\mathbf{r}, t) = \frac{\sigma_{kk}(\mathbf{r}, t)}{3K_s}. \tag{3}$$

Записи (1) и (2) девиаторных соотношений для материала матрицы отличаются тем, что в соотношении (2) отсутствует мгновенный модуль упругости сдвига.

Глущенков Вячеслав Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и информатики. E-mail: glushenkov_vs@mail.ru
Архипова Наталья Александровна, старший преподаватель кафедры высшей математики.
E-mail: arkipova_n_a@mail.ru

Здесь и далее $\Gamma_m(t)$, $J_m(t)$ – ядро ползучести и функция ползучести (податливость) при чистом сдвиге материала матрицы; μ_m^0, – мгновенный модуль упругости сдвига материала матрицы; μ_m, K_m, μ_s, K_s – сдвиговые и объёмные модули упругости компонентов композиционного материала; $\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t)$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t)$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций; $s_{ij}(\mathbf{r}, t) = \sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}(\mathbf{r}, t)$, $e_{ij}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}(\mathbf{r}, t)$ – девиаторные составляющие тензоров напряжений и деформации; δ_{ij} – символ Кронекера; t – время; $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$.

Функция ползучести материала матрицы $J_m(t)$ определяется по экспериментальным кривым ползучести при чистом сдвиге $(\mathrm{s}_{12}(\mathrm{r}, t) = s_{12}(\mathrm{r}, 0) = s_{12}^0 = const)$:

$$J_m(t) = \frac{e_{12}(t)}{s_{12}^0}. \tag{4}$$

Ядро ползучести материала матрицы определяется соотношением:

$$\Gamma_m(t) = 2\mu^0 \frac{dJ_m(t)}{dt}. \tag{5}$$

Применяя к (2), (3) преобразование Лапласа–Карсона, получим в пространстве изображений определяющие соотношения упругого деформирования компонентов композиционного материала:

$$\overline{s}_{ij}(\mathrm{r}, p) = 2\overline{\mu}_m(p)\overline{e}_{ij}(\mathrm{r}, p), \quad \overline{\sigma}_{kk}(\mathrm{r}) = 3\overline{K}_m\overline{\varepsilon}_{kk}(\mathrm{r}), \tag{6}$$

$$\overline{s}_{ij}(\mathrm{r}) = 2\overline{\mu}_s\overline{e}_{ij}(\mathrm{r}), \quad \overline{\sigma}_{kk}(\mathrm{r}) = 3\overline{K}_s\overline{\varepsilon}_{kk}(\mathrm{r}). \tag{7}$$

Здесь чертой сверху обозначены трансформанты Лапласа–Карсона; для постоянных модулей упругости $\bar{K}_m = K_m$, $\bar{\mu}_s = \mu_s$, $\bar{K}_s = K_s$; $2\bar{\mu}_m(p) = \dfrac{1}{\bar{J}_m(p)}$ p — параметр преобразования.

В пространстве изображений соотношения для определения эффективных модулей упругости матричного композиционного материала с шаровыми включениями [1] запишутся в виде:

$$\bar{\mu}^*(p) = \bar{\mu}_m(p) + \frac{\sum_{s=0}^{n} (\bar{\mu}_s - \bar{\mu}_m(p)) c_s \alpha_s(p)}{c_m + \sum_{s=0}^{n} c_s \alpha_s(p)},$$
$$\bar{K}^*(p) = \bar{K}_m + \frac{\sum_{s=0}^{n} (\bar{K}_s - \bar{K}_m) c_s \gamma_s(p)}{c_m + \sum_{s=0}^{n} c_s \gamma_s(p)}, \tag{8}$$

$$\alpha_s(p) = \frac{1}{1 + \frac{6}{5}\frac{\bar{K}_m + 2\bar{\mu}_m(p)}{3\bar{K}_m + 4\bar{\mu}_m(p)} \frac{(\bar{\mu}_s - \bar{\mu}_m(p))}{\bar{\mu}_m(p)}},$$
$$\gamma_s(p) = \frac{1}{1 + \frac{3(\bar{K}_s - \bar{K}_m)}{3\bar{K}_m + 4\bar{\mu}_m(p)}}, \tag{9}$$

Таким образом, в пространстве изображений эффективный закон деформирования композиционного материала будет иметь вид:

$$\left\langle \bar{s}_{ij}(\mathbf{r},\, p) \right\rangle = 2\bar{\mu}^*(p) \left\langle \bar{e}_{ij}(\mathbf{r},\, p) \right\rangle,$$
$$\left\langle \bar{\sigma}_{kk}(\mathbf{r},\, p) \right\rangle = 3\bar{K}^*(p) \left\langle \bar{\varepsilon}_{kk}(\mathbf{r},\, p) \right\rangle. \tag{10}$$

Здесь c_m, c_s – объёмные концентрации компонентов композиционного материала, звёздочкой обозначены макроскопические (эффективные) величины, угловыми скобками – средние по объёму композиционного материала значения.

Применяя к этим соотношениям операцию обращения и учитывая, что для сдвиговых и объёмных функций ползучести $J^*(t)$, $U^*(t)$ выполняются соотношения:

$$\bar{J}^*(p) = \frac{1}{2\bar{\mu}^*(p)}, \quad \bar{U}^*(p) = \frac{1}{3\bar{K}^*(p)}, \tag{11}$$

окончательно найдём макроскопический закон ползучести:

$$\left\langle e_{ij}(t) \right\rangle = = \int_0^t J^*(t-\tau)\, d(\left\langle s_{ij}(\tau) \right\rangle),$$
$$\left\langle \varepsilon_{kk}(t) \right\rangle = \int_0^t U^*(t-\tau)\, d(\left\langle \sigma_{kk}(\tau) \right\rangle). \tag{12}$$

Из выражений (8), (9), (10), (11), (12) следует, что композиционный материал обладает объёмными наследственными свойствами, хотя его компоненты таких свойств не проявляют. Отмеченное свойство объясняется сложным перераспределением во времени системы внутренних напряжений в композиционном материале в процессе его деформирования.

В качестве ядра ползучести материала матрицы рассмотрим ядро вида:

$$\tilde{A}_m(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k e^{-\lambda_k t}\ . \tag{13}$$

Подставляя это выражение в (1), получим

$$e_{12}(t) = \frac{s_{12}^0}{2\mu^0}\left(1 + \sum_{k=1}^{k} A_k \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau\right) =$$
$$= \frac{s_{12}^0}{2\mu^0}\left(1 + \sum_{k=1}^{k} \frac{A_k}{\lambda_k}\left(1 - e^{-\lambda_k t}\right)\right).$$

Отсюда и из (4) следует:

$$J_m(t) = \frac{e_{12}(t)}{s_{12}^0} =$$
$$= \frac{1}{2\mu^0}\left(1 + \sum_{k=1}^{K} \frac{A_k}{\lambda_k}\right) - \frac{1}{2\mu^0}\sum_{k=1}^{k} \frac{A_k}{\lambda_k} e^{-\lambda_k t}. \tag{14}$$

Параметры в выражении функции ползучести можно определить методом наименьших квадратов при сравнении с экспериментальными данными.

В пространстве изображений функция ползучести (14) имеет вид:

$$\overline{J_m(p)} = \frac{1}{2\mu^0}\left(1 + \sum_{k=1}^{k} \frac{A_k}{\lambda_k}\right) -$$
$$- \frac{1}{2\mu^0}\sum_{k=1}^{k} \frac{A_k}{\lambda_k}\frac{p}{p+\lambda_k}. \tag{15}$$

Из (15) получим:

$$\bar{\mu}_m(p) = \frac{1}{2\overline{J_m(p)}} =$$
$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{\mu^0}\left(1 + \sum_{k=1}^{k} \frac{A_k}{\lambda_k}\right) - \frac{1}{\mu^0}\sum_{k=1}^{k} \frac{A_k}{\lambda_k}\frac{p}{p+\lambda_k}\right)}. \tag{16}$$

В предположении, что $c_0 = 0$ (композиционный материал не содержит пор) и включения матричного композиционного материала являются абсолютно жёсткими, то есть, $\mu_s \to \infty$, $s = 1,\, 2,\, \ldots, n$ из (8), (9) следует:

$$\overline{\mu^*(p)} = \bar{\mu}_m(p)\left(1 + \frac{5}{2}\frac{c}{1-c}\right), \quad c = \sum_{s=1}^{n} c_s\ , \tag{17}$$

или с учётом (16):

$$\overline{\mu^*(p)} = \frac{1}{2\overline{J_m(p)}}\left(1+\frac{5}{2}\frac{c}{1-c}\right), \qquad (18)$$

то есть:

$$\overline{J^*(p)} = \frac{1}{2\overline{\mu^*(p)}} = \frac{\overline{J_m(p)}}{\left(1+\frac{5}{2}\frac{c}{1-c}\right)}. \qquad (19)$$

После применения обратного преобразования Лапласа - Карсона, получим эффективную функцию ползучести рассматриваемого композиционного материала:

$$J^*(t) = \frac{1}{2\mu^0}\left(\left(1+\sum_{k=1}^{k}\frac{A_k}{\lambda_k}\right)-\sum_{k=1}^{k}\frac{A_k}{\lambda_k}e^{-\lambda_k t}\right)\times \\ \times\left(1+\frac{5}{2}\frac{c}{1-c}\right)^{-1}. \qquad (20)$$

Рассмотрим соотношение

$$\langle e_{12}(t)\rangle = \int_0^t J^*(t-\tau)d\langle s_{12}(t)\rangle, \qquad (21)$$

после интегрирования которого запишем макроскопический закон ползучести композиционного материала в виде:

$$\langle e_{12}(t)\rangle = \frac{s_{12}^0}{2\mu^0}\left(\left(1+\sum_{k=1}^{k}\frac{A_k}{\lambda_k}\right)-\sum_{k=1}^{K}\frac{A_k}{\lambda_k}e^{-\lambda_k t}\right)\times \\ \times\left(1+\frac{5}{2}\frac{c}{1-c}\right)^{-1}. \qquad (22)$$

Для модельного композиционного материала с абсолютно жёсткими включениями на рис. 1 приведены экспериментальные и расчётные значения кривых сдвиговой ползучести при различных объёмных концентрациях включений; на рис. 2 – зависимости значений деформации композиционного материала от объёмной концентрации включений в различные моменты времени. Время t измеряется в условных единицах.

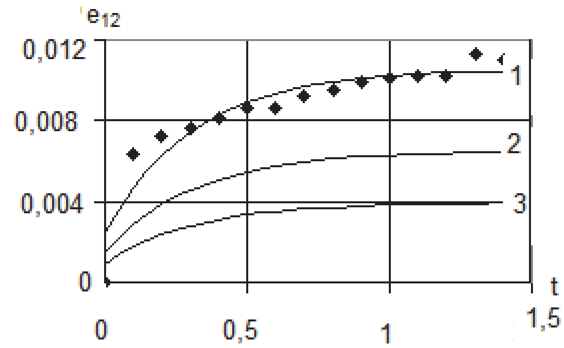

Рис. 1. Кривые ползучести материала матрицы $(c = 0)$ и композиционного материала при различных объёмных концентрациях абсолютно жёстких включений;
◆ – экспериментальные данные;
1 – $(c = 0)$; 2 – $(c = 0{,}1)$;3 – $(c = 0{,}4)$

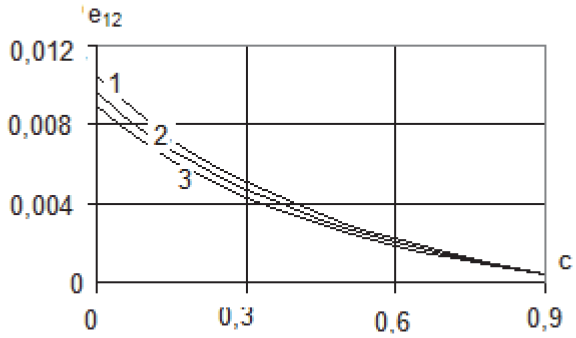

Рис. 2. Зависимости значений деформации композиционного материала от объёмной концентрации абсолютно жёстких включений в различные моменты времени;
1 – $(t = 1{,}5)$; 2 – $(t = 0{,}7)$; 3 – $(t = 0{,}5)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Глущенков, В.С.* Макроскопические свойства деформирования нелинейных матричных многокомпонентных композиционных материалов, хаотически армированных эллипсоидальными включениями / *В.С. Глущенков* // Неоднородные материалы и конструкции. Избранные труды Всероссийской конференции по проблемам науки и технологий. – М.: РАН, 2013. – С. 71–94.

THE CREEPAGE OF COMPOSITE MATERIALS WITH ABSOLUTELY RIGID INCLUSIONS

© 2015 V.S. Glushchenkov[1, 2], N.A. Arkhipova[2]

[1] Samara Branch of the Moscow City Teachers' Training University
[2] Samara State Railway Transport University

The paper considers the macroscopic (effective) law of creepage of multicomponent stochastically reinforced isotropic composite material such as "the matrix - spherical inclusions."
Keywords: macroscopic (effective) creepage law, the function of creepage, composite materials.

Vyacheslav Glushchenkov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor at the Higher Mathematics and Computer Science Department. E-mail: glushenkov_vs@mail.ru
Natalia Arkhipova, Senior Lecturer at the Higher Mathematics Department. E-mail: arki-pova_n_a@mail.ru