УДК 536.416

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПОЛУЧЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СПАЕВ СТЕКЛА С МЕТАЛЛОМ

© 2016 С.А. Дрюк, О.Н. Любимова

Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

Статья поступила в редакцию 25.03.2016

В статье предлагается математическая модель для определения параметров технологического режима изготовления длинных стеклометаллокомпозитных стержней. При постановке задача разделяется на две: стационарного течения вязкой жидкости по трубе круглого сечения и определения термических напряжений и деформаций в экспериментальном образце стеклометаллокомпозита в процессе остывания.

Ключевые слова: *математическое моделирование, вязкая жидкость, термические напряжения, термические деформации*

Развитие многих отраслей современного производства, в том числе строительной индустрии, связано с разработкой новых материалов, обладающих высоким комплексом механических свойств при экономической целесообразности. Предварительные теоретические и экспериментальные исследования свидетельствуют о перспективности разработки многослойных конструкционных материалов на основе стекла и металла (стали, алюминия и титана) – стеклометаллокомпозитов (СМК) [1, 2]. Материалы такого типа могут эффективно применяться в судостроении, химическом машиностроении и строительной индустрии. На текущем этапе материал находится в стадии экспериментальной разработки, исследуются технологические параметры получения экспериментальных образцов на основе стекла и стали, стекла и алюминия, и их физико-механические свойства. Смоделированы технологические режимы изготовления коротких СМК стержней до 250 мм и трехслойной цилиндрической оболочки – алюминий-стекло-алюминий. Стержни состоят из стальной оболочки (толщиной 0,8-2 мм) и стеклянного сердечника (диаметром 8-16 мм), технологический режим их изготовления предполагает прессование стеклянного сердечника при температуре размягчения стекла. Трехслойные цилиндрические оболочки изготавливаются при высоких температурах методом центрефугирования (послойного нанесения слоев из расплавов материалов).

Цель работы: построение математической модели для определения параметров технологического режима изготовления длинных СМК стержней методом протяжки расплава стекломассы в стальную трубку.

Постановка задачи. Основная идея получения длинных СМК стержней заключается в заполнении стекломассой металлического цилиндра при температуре размягчения (точки Литтлтона) стекла с последующим созданием спая сжатия при остывании образца. Для изготовления длинных стержней требуется создать особые условия ввиду технологической сложности равномерного наполнения металлического цилиндра вязкой стекломассой: при вертикальном заполнении сверху образуются воздушные прослойки, а при горизонтальном положении образца вероятно неравномерное распределение остаточных напряжений. В качестве оптимального способа наполнения металлического цилиндра расплавом стекла был выбран способ, схематично приведенный на рис. 1. В камеру термической печи *1* устанавливается тигель *2* со стеклянной шихтой. При определенном температурном режиме шихта расплавляется, образуя вязкую однородную стекломассу *3*. Через поршень *5* с отверстием для образца *4* передается давление P_1, которое позволяет выдавить вязкую стекломассу внутрь образца (рис. 1б). После заполнения стекломассой определенного объема начинается охлаждение экспериментального образца, в процессе которого на его верхний торец, с целью создания определенного уровня напряжений, подается давление P_2.

В данном технологическом режиме моделированию подлежат следующие параметры: T_w – температура размягчения стекла, при достижении которой начинает подаваться давление; P – давление; η – вязкость стекла при температуре T_w; V – свободный объем внутри образца до эксперимента; t_1 – время, за которое при данных параметрах стекломасса заполнит весь свободный объем, эволюция напряженно-деформируемого состояния экспериментального образца в процессе охлаждения при $t \in [t_2, t_2]$.

Математическая модель. Для определения параметров технологического режима разделим задачу на две несвязанные:

- стационарного течения вязкой жидкости по трубе круглого сечения (одинакового вдоль всей длины трубы), $t \in [0, t_1]$, T_w = const (рис. 2);
- определения термических напряжений и деформаций в экспериментальном образце стеклометаллокомпозита в процессе остывания, $t \in [t_2, t_3]$, температура зависит от времени T(t) (рис. 2).

Первая задача в случае параллельного течения вязкой жидкости между неподвижными стенками носит название пуазейлевого течения и при определенных допущениях имеет аналитическое решение [3]. Для трубы кругового сечения аналитическая зависимость скорости течения в зависимости от давления, характерного размера и вязкости имеет вид:

$$v = \frac{\Delta P}{4\eta l}(R^2 - r^2) \qquad (1)$$

где v – скорость течения жидкости; ΔP – разница давлений между верхним и нижним торцами образца; *l* – длина образца; R – внутренний радиус образца; r – текущий радиус.

Масса Q вязкого стекла, протекающего в 1 секунду через поперечное сечение образца равна

Дрюк Сергей Андреевич, аспирант. E-mail: druk92@mail.ru
Любимова Ольга Николаевна, кандидат физико-математических наук, профессор. E-mail: berms@mail.ru

$$Q = 2\pi\rho \int_0^R rv\,dr, \qquad (2)$$

где Q – масса вязкого стекла; ρ – плотность стекломассы, тогда время заполнения свободного объема V стекломассой вычисляется по формуле:

$$t_w = \frac{V}{Q}\rho = \frac{\pi R^2 l}{2\pi\rho\int_0^R rv\,dr}\rho = \frac{R^2 l}{2\int_0^R rv\,dr}. \qquad (3)$$

Задача может быть существенно усложнена предположением, что при заполнении стекломассой металлического цилиндра ее вязкость изменяется по высоте.

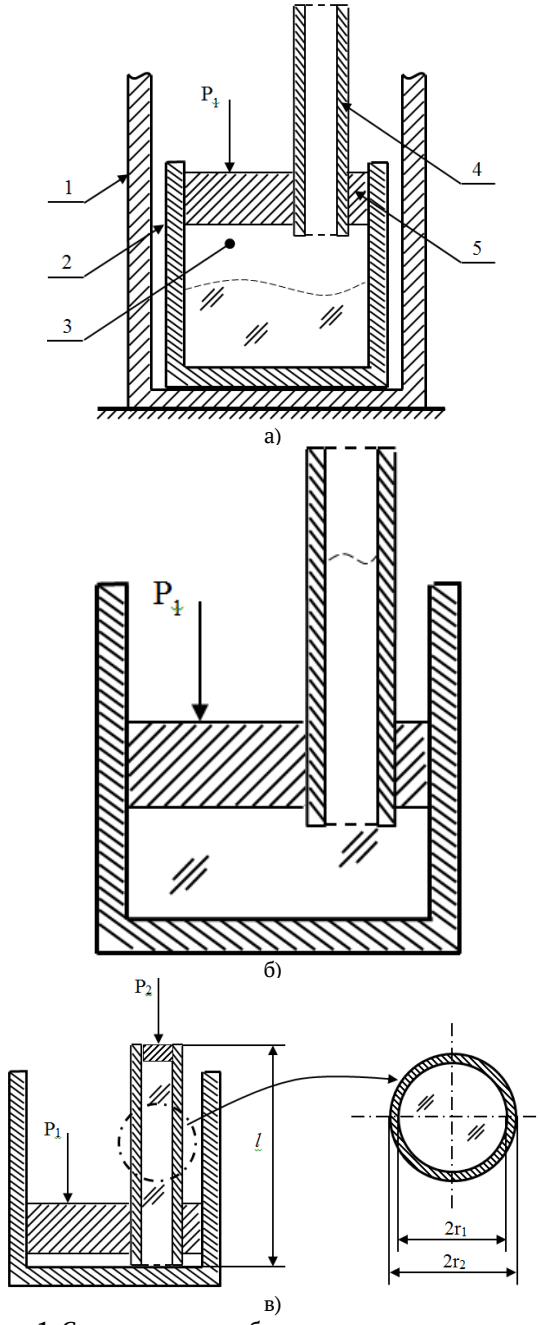

Рис. 1. Схематичное изображение установки для создания экспериментальных образцов СМК стержней: а) принципиальная схема установки - *1* – корпус печи; *2* – тигель; *3* – стекломасса; *4* – образец; *5* – поршень; б) процесс постепенного заполнения образца; в) полностью заполненный стекломассой образец, с установленным на стеклянном торце поршнем 6 для передачи давления P_2

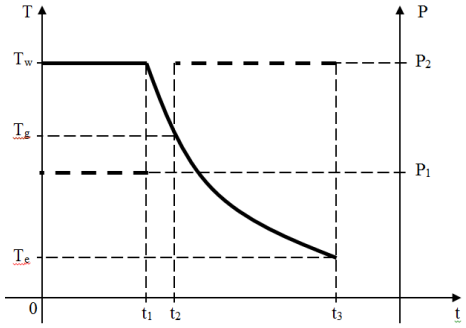

Рис. 2. Режим изменения температуры и давления: T_w – температура размягчения стекла; T_g – температура стеклования; T_e – температура среды

Исследование термических напряжений СМК заключается в определении напряженно-деформируемого состояния в составном цилиндре при изменении температуры. Предположение, что напряжения не оказывают существенного влияния на температуру, позволяет решать последовательно следующие задачи: задачу определения температурных полей в материале; краевую задачу определения напряженно-деформируемого состояния для слоистого материала с температурными и структурными неоднородностями.

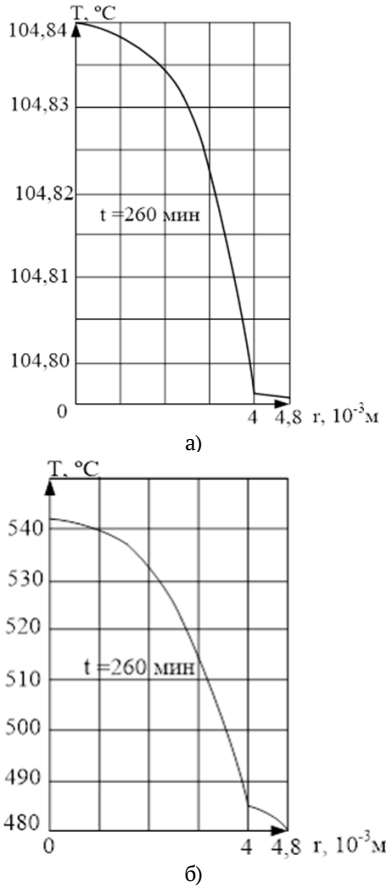

Рис. 3. Пример распределения температурных полей в СМК в фиксированный момент времени: а) при $d < 80\cdot10^{-3}$ м; б) при $d > 80\cdot10^{-3}$ м

Определение полей температуры для слоистых материалов заключается в постановке краевой задачи теплопроводности, с учетом изменяющихся теплофизических характеристик и условием идеального контакта на границе разных материалов и равномерного нагрева вдоль образующей [5]. Результатом решения

температурной задачи являются пространственно-временные поля распределения температуры T(r, t), с учетом которых далее решается задача определения напряжений и деформаций. Решение температурной задачи показало, что для диаметров образцов $d < 80 \cdot 10^{-3}$ м температура незначительно изменяется по диаметру композиционного стержня и ее можно считать не зависящей от радиуса (рис. 3), что позволяет сделать предположение о том, что в целом температура внутри стержня может быть задана как температура режима, т.е. T = T(t).

Математическое моделирование охваты-вает временной период от момента перехода стекломассы в стеклообразное состояние T_g до полного остывания стеклометаллокомпозита (см. рис. 2). Считаем, что стекло находится в упругом состоянии, а металлическая оболочка при достижении определен-ного уровня напряжений - в состоянии упругопластического деформирования. Деформирование двуслойного цилиндра в процессе остывания является следствием разницы механических характеристик материалов и давления на стеклянный сердечник распределенного по верхнему торцу (рис. 1в). Геометрия цилиндра позволяет сделать предположение о осесимметричной деформации цилиндра. Поэтому краевая задача механики в упругой области состоит из уравнений равновесия записанных в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0,$$
$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0, \qquad (4)$$

соотношений Коши

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$
$$e_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}\right), \qquad (5)$$

уравнений состояния

$$\sigma_{rr} = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r} - (3\lambda + 2\mu)\int_0^t \alpha dT,$$
$$\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{u_r}{r} - (3\lambda + 2\mu)\int_0^t \alpha dT,$$
$$\sigma_{zz} = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} - (3\lambda + 2\mu)\int_0^t \alpha dT,$$
$$\sigma_{rz} = 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

гдн σ_{rr}, σ_{zz}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zr}, e_{rr}, e_{zz}, $e_{\varphi\varphi}$, e_{zr}, u_r, u_r – компоненты тензоров напряжений, деформаций и перемещений, соответственно, отличные от нуля вследствие предположения осесимметричной деформации и являются функциями от координат r (радиус), z (длина), t (время); α – коэффициент линейного температурного расширения, λ, μ – параметры Ламе, зависящие от механических свойств материала. Поскольку в нашей задаче рассматривается двухслойный цилиндр, выполненный из различных материалов (см. рис. 1в), механические характеристики для $0 \leqslant z \leqslant l$ имеют вид:

$$\alpha, \lambda, \mu = \begin{cases} \alpha_g(t), \lambda_g(t), \mu_g(t), 0 \le r \le r_1, \\ \alpha_m(t), \lambda_m(t), \mu_m(t), r_1 \le r \le r_2. \end{cases}$$

Краевые условия на границе сопряжения двух разных материалов записываем, предполагая, наличие идеального контакта:

$$\sigma_{rr}(r_1 - 0, z, t) = \sigma_{rr}(r_1 + 0, z, t),$$
$$u_r(r_1 - 0, z, t) = u_r(r_1 + 0, z, t). \qquad (7)$$

Краевые условия на внешней боковой поверхности и на торцах запишем, учитывая равномерно распределенное давление на стеклянный сердечник со стороны верхнего торца, и отсутствие нагрузки на внешней поверхности цилиндра и на нижнем торце

$$\sigma_{rr}(r_2, z, t) = 0, \quad 0 \le z \le l,$$
$$\sigma_{zz}(r, l, t) = -P_2\frac{r_1^2}{r_2^2}, \quad \sigma_{zz}(r, 0, t) = P_2,$$
$$0 \le r \le r_1,$$
$$\sigma_{zz}(r, l, t) = 0, \quad \sigma_{zz}(r, 0, t) = P_2,$$
$$r_1 \le r \le r_2. \qquad (8)$$

Начиная с некоторого момента времени при охлаждении образца в нем формируются напряжения за счет разницы коэффициентов линейного температурного расширения и модулей упругости первого рода, которые приводят к процессу пластического течения в металлической оболочке. В таком случае уравнения равновесия (4) необходимо интегрировать отдельно в области пластического течения $r \in [r_1, r_2]$ и в области обратимого деформирования $r \in [0, r_1]$ при условии

$$\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 2K. \qquad (9)$$

где K – предел текучести.

Отметим, что требование непрерывности этих параметров на границе области пластического течения приводит к необходимости определения поля перемещений не только в области обратимого деформирования, но и в области с накопленными необратимыми деформациями. Распределение предела текучести будем считать известной функцией, линейно зависящей от текущей температуры:

$$K = K_0\left(1 - \frac{T}{2}\right),$$

где K_0 – предел текучести при начальной температуре.

Выводы: при относительно простой постановке задачи (4) – (9) следует отметить сложность получения аналитических зависимостей и построения численного решения ввиду наличия разных материалов, их реологических свойств и различного типа деформирования. Используя методы численного интегрирования можно исследовать процесс накопления необратимых деформаций, пользуясь заданным распределением температур и определенного в зависимости от такого распределения предела текучести.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Пикуль, В.В.* Эффективность стеклометаллокомпозита // Перспективные материалы. 2000. №6. С. 63-65.

2. *Lyubimova, O.N.* Structure and constitution of glass and steel compound in glass-metal composite / O.N. Lyubimova, A.V. Morkovin, S.A. Dryuk, P.A. Nikiforov // «Applied Mechanics and Materials», AIP Conference Proceedings. 2014. 1623. P. 379-382.
3. *Ландау, Л.Д.* Гидродинамика: Теоретическая физика: т.VI, 3-е изд., перераб. / *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц* – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 986. 736 с.
4. *Смирнов, В.С.* Теория прокатки и штамповки. – М.: Изд-во «Металлургия», 1967. 460 с.
5. *Зарубин, В.С.* Математические модели термомеханики / *В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 168 с.

MATHEMATICAL MODELING THE PROCESS OF RECEIVING CYLINDRICAL SEALS OF GLASS WITH METAL

© 2016 S.A. Dryuk, O.N. Lyubimova

Far Eastern Federal University, Vladivostok

In article the mathematical model for determination the parameters of technological mode of production the long the glass-metal composite cores is offered. At statement the task is divided into two: a stationary current of viscous liquid on a round section pipe and determination of thermal stresses and deformations in experimental sample of glass-metal composite in the course of cooling.

Key words: *mathematical modeling, viscous liquid, thermal stress, thermal deformations*

Sergey Dryuk, Post-graduate Student. E-mail: druk92@mail.ru
Olga Lyubimova, Candidate of Physics and Mathematics, Professor. E-mail: berms@mail.ru