УДК 620.193

ОЦЕНКА ОПАСНОСТИ КАПЛЕУДАРНОЙ ЭРОЗИИ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ КОНТАКТНЫХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ

© 2016 М.А. Скотникова, В.В. Елисеев, А.А. Москалец

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Статья поступила в редакцию 02.03.2016

Удары капель жидкости по поверхности тела, вызывающие эрозию, рассматриваются как упругое контактное взаимодействие. Средствами теории упругости и компьютерной математики определено напряженное состояние тела и найдены параметры нагрузки, при которой начинаются пластические деформации. Выведена формула для скорости капель. при которой начинается эрозия.

Ключевые слова: *каплеударная эрозия, контактное взаимодействие, напряжения в полупространстве, условие текучести, компьютерная математика*

Каплеударная эрозия (КЭ) – это поверхностное разрушение тел под действием струи газа с каплями жидкости. Большое практическое значение изучения этого сложного и вредного явления обусловлено, в частности, возникновением КЭ в лопаточных аппаратах [1-8]. Выполнено много серьезных исследований как экспериментального, так и теоретического характера [9-17]. Литература по теме представлена не только множеством статей, но и монографий [16, 18-20]. Для полного понимания сущности КЭ желательно разобраться в двух процессах: гидродинамике капли при ударе о поверхность тела и деформировании тела локальной ударной нагрузкой. Многие авторы считают причиной КЭ накопление пластических контактных деформаций. Такая точка зрения принимается и в данной работе.

Цель работы: математическое моделирование возникновения КЭ посредством решения контактной задачи теории упругости.

Тело считается упругим полупространством, а капля – шариком радиусом *R*, падающим с некоторой скоростью *v* (рис. 1). Предпринята попытка построения на плоскости параметров *v, R* границы области, в которой КЭ не возникает. Работа опирается на литературу по контактным задачам теории упругости [21, 22], а также компьютерную математику [23]. Именно последняя (*Mathcad*) позволила довести классическое решение контактной задачи по Герцу до полной картины контактных напряжений в теле.

Формулы Герца. В результате решения задачи линейной теории упругости о контактном взаимодействии полупространства и шара (рис. 1) выведены следующие известные формулы Герца [20, 21]:

$$\frac{1}{R}=\frac{3Q\beta}{4a^3},\ \delta=\left(\frac{3Q\beta}{4}\right)^{2/3}R^{-1/3};$$
$$Q=p_0\frac{2}{3}\pi a^2,\ \beta\equiv\frac{1-\nu_0^2}{E_0}+\frac{1-\nu^2}{E} \qquad (1)$$

где *Q* – прижимающая сила, *a* – радиус контактного круга, δ – сближение тел; *E*, E_0 – модули Юнга материалов (нолик относится к шару), *v*, v_0 – коэффициенты Пуассона.

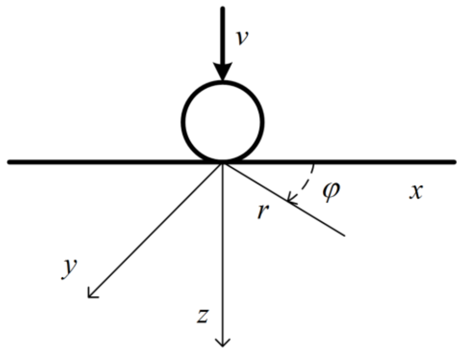

Рис. 1. Расчетная схема контакта

Для контактного давления и силы имеем формулы

$$p(r)=p_0\sqrt{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2},\ Q=2\pi\int_0^a p(r)\,r\,dr,$$

где p_0 – значение в центре.

Нелинейное соотношение между силой и сближением можно выразить через потенциальную энергию взаимодействия Π:

$$Q=\frac{4}{3\beta}R^{1/2}\delta^{3/2}=\Pi'(\delta),$$
$$\Pi=\frac{4}{3\beta}R^{1/2}\frac{2}{5}\delta^{5/2}=\frac{2}{5}R^{-1/3}\left(\frac{3\beta}{4}\right)^{2/3}Q^{5/3} \qquad (2)$$

Эти формулы можно использовать для расчета максимального сближения и силы при ударе. По закону сохранения энергии (*m* – масса шарика, ρ_0 – плотность)

$$\Pi=\frac{1}{2}mv^2,\ \ m=\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0 \qquad (3)$$

Однако формул Герца недостаточно для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) тела.

Контактные напряжения в полупространстве. Для бесконечного тела нельзя применять распространенные программы конечноэлементного анализа (ANSYS). Зато весьма эффективны классические аналитические подходы. Например, решение Папковича-Нейбера [21, 24], представляющее вектор перемещения **u** через гармонические функции:

Скотникова Маргарита Александровна, доктор технических наук, профессор. E-mail: skotnikova@mail.ru
Елисеев Владимир Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор. E-mail: yeliseyev@inbox.ru
Москалец Артем Анатольевич, аспирант. E-mail: artem.moskalec@gmail.com

$$\mathbf{u} = -z\overline{\nabla}B - \overline{\nabla}B_0 + [(3-4\nu)B - z\partial_z B - \partial_z B_0]\mathbf{k} \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{k}$ – орт оси z (рис. 1), $\overline{\nabla}$ – оператор Гамильтона в перпендикулярной плоскости, ***B***, B_0 – гармонические скаляры ($\Delta B = \Delta B_0 = 0$ – с оператором Лапласа); $\partial_z \equiv \partial/\partial z$.

Определив соответствующие перемещениям (4) деформации и далее напряжения (по закону Гука), обращаются к граничным условиям. На плоскости z=0 отсутствуют касательные напряжения, а нормальное напряжение равно нулю вне контактного круга и давлению с минусом – в круге. В результате, во-первых, находится соотношение

$$(1-2\nu)B = \partial_z B_0 \Rightarrow B_0 = -(1-2\nu)\int_z^{\infty} B\,dz \quad . \tag{5}$$

Во-вторых, для гармонической функции B получается задача Неймана с заданной нормальной производной на границе, решаемая с потенциалом простого слоя (контактного круга) [21]:

$$B(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\mu}\int \frac{p(\mathbf{r}_1)\,do_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} \tag{6}$$

Здесь $\mu = E/2(1+\nu)$ – модуль сдвига, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор в полупространстве; $\mathbf{r}_1$ – радиус-вектор на площадке контакта – по ней производится интегрирование.

Рассматриваемая задача осесимметричная, поэтому используем цилиндрические координаты r, φ, z (рис. 1). При этом компоненты векторов и тензоров будут функциями лишь двух переменных r, z. Формулу (6) можно записать в виде

$$B(r,z) = \frac{p_0}{4\pi\mu}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a} f(\mathrm{r}, z, \rho, \theta)\,d\rho,$$
$$f \equiv \frac{\rho\sqrt{1-(\rho/a)^2}}{\sqrt{r^2 - 2r\rho\cos\theta + \rho^2 + z^2}} \tag{7}$$

При интегрировании в круге по переменной $\mathbf{r}_1$ используются полярные координаты ρ, θ. Для радиус-вектора $\mathbf{r}$ остаются r, φ, z, причем в осесимметричном случае можно считать φ=0. Двойной интеграл (7), зависящий от параметров r, z, надежно вычисляется в *Mathcad* [23]. Во избежание расходимости на оси z интегрируем по ρ не от нуля, а от некоторого малого значения (например, $\lambda = 10^{-2}a$). Дифференцировать по r, z оказывается можно под интегралом, используя символьные вычисления – понадобится далее при вычислении перемещений и деформаций.

Определяя вторую функцию B_0 согласно (5), получим для нее интеграл как в (7), но вместо f будет

$$f_0(r,z,\rho,\theta) = -(1-2\nu)\rho\sqrt{1-(\rho/a)^2}\,G(z,\xi),$$
$$G(z,\xi) \equiv \ln(z^2 + \sqrt{z^2+\xi})\Big|_z^M,\ M \to \infty;$$
$$\xi \equiv r^2 - 2r\rho\cos\theta + \rho^2 \tag{8}$$

Для сходимости интеграла в расчетах принималось M=10 a. Интегрирование и дифференцирование в *Mathcad* надежно работали и для B_0. По найденным функциям B, B_0 найдем деформации:

$$\varepsilon_r = -\partial_r^2(zB + B_0),\ \varepsilon_\varphi = -\frac{1}{r}\partial_r(zB + B_0),$$
$$\varepsilon_z = 2(1-2\nu)\partial_z B - z\partial_z^2 B - \partial_z^2 B_0,$$
$$\varepsilon_{rz} = (1-2\nu)\partial_r B - z\partial_r\partial_z B - \partial_r\partial_z B_0 \tag{9}$$

Введены компактные выражения частных производных. Подставив (9) в закон Гука, определим напряжения σ_r, σ_φ, σ_z, τ_{rz}. Далее найдем компоненты девиатора напряжений и норму Мизеса τ [24]:

$$S_r = (2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_z)/3, \ldots, S_{rz} = \tau_{rz};$$
$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2}(S_r^2 + S_\varphi^2 + S_z^2) + \tau_{rz}^2} \tag{10}$$

Выражения компонент S_φ, S_z отличаются заменой индексов. Начало пластических деформаций определяется условием текучести

$$\tau(r,z) = k\ , \tag{11}$$

где k – предел текучести материала. Для титана, например, k=500 МПа. При достаточно слабом контактном воздействии (малая скорость капли) везде в материале будет $\tau<k$. Эрозия начнется, предположительно, при выполнении условия (11) в некоторой точке. Данный расчет должен показать, где и когда это произойдет.

В силу симметрии достаточно рассмотреть норму Мизеса на оси z: $\tau(0, z) = T(z)$. Построенный средствами Mathcad график этой функции показан на рис. 2.

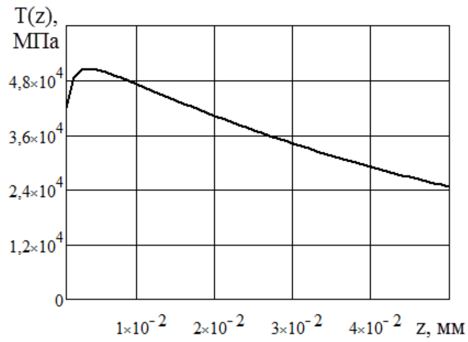

Рис. 2. Зависимость нормы Мизеса от глубины

На графике видно, что максимум нормы Мизеса достигается не на поверхности, а очень близко от нее в глубине тела. График типичный, проведены десятки расчетов с различными параметрами. Радиус контактного круга для графика a=10-4 м. Другие параметры: E=10^{11} Па; ν=0,3; k=5 10^8 Па (титан). Считалось p_0=1, поскольку решение пропорционально этому множителю. Максимум на рис. 2 равен T_1=5,06 10^4 МПа и достигается на глубине z_1 3,96 10^{-3} мм. При начале пластической деформации будет

$$p_0 T_1 = k \Rightarrow p_0 = 9{,}88 \cdot 10^{-3}. \tag{12}$$

Оказалось, что значение p_0 не зависит от радиуса контактного круга a. Этот впечатляющий результат, впрочем, можно было предвидеть по соображениям подобия.

Расчет для удара капли. Все формулы для этого расчета уже представлены выше. Сначала из (1) находим силу Q при начале пластической деформации:

$$a=\left(\frac{3Q}{2\pi p_0}\right)^{1/2}=\left(\frac{3Q\beta R}{4}\right)^{1/3}\Rightarrow Q=\left(\frac{3\beta}{4}\right)^2\left(\frac{2\pi p_0}{3}\right)^3 \qquad (13)$$

Далее из (2, 3) определим соответствующую скорость капли

$$v=\frac{\beta^2\pi^2}{2\sqrt{10\rho_0}}\,p_0^{5/2}=\frac{1.56\cdot\beta^2}{\sqrt{\rho_0}}\cdot\left(\frac{k}{T_1}\right)^{2.5}. \qquad (14)$$

Константа T_1 определена выше (подчеркнуто). Величина скорости не зависит от радиуса капли R (удивительный результат) и по степенному закону зависит от предела текучести k и параметра β. Но возникает серьезная проблема – свойства воды как упругого тела. Для любого изотропного тела имеем пару упругих модулей; например, модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Или же модули изменения объема $K=E/3(1-2\nu)$ и сдвига μ. Модуль K для воды определяется известной скоростью распространения звука. А вот модуль сдвига обычно принимают равным нулю. Но тогда вся логика наших расчетов рушится – $\beta\to\infty$. Однако найдены экспериментальные данные по упругим свойствам воды [9, 25], где сообщается: ν=0,5; μ=1,3 10^{-5}. Используя эти значения вместе с результатом (12) в формуле (14), получим критическое значение скорости капли v=177 м/с.

Обсуждение. При экспериментальном определении эрозионной стойкости различных материалов установлено, что процессы эрозии (глубина эрозионного износа $l_э$) протекают во времени в соответствии с рис. 3. Различают три типичных этапа протекания процессов эрозии (глубины эрозионного износа $l_э$) во времени. На первом этапе τ_1, так называемом инкубационном периоде, видимых повреждений поверхности нет, потерь массы материала зафиксировать не удаётся. В ряде работ показано, что собственно эрозии материала предшествует рост микронапряжений, увеличение плотности дислокаций в металле предельного значения 10^{12}-10^{13} см$^{-1}$, зарождение под поверхностных микротрещин. Второй этап τ_2 характеризуется тем, что имеет место максимальная скорость эрозии и в течение этого отрезка времени она остаётся практически постоянной. Во время третьего этапа τ_3 по скорость эрозии снова ослабевает. Поэтому для оценки эрозионной стойкости материалов обычно используют значение скорости эрозии на первом или втором этапе, которое зависит от скорости встречи лопатки с частицами воды, формы и размеров этих частиц, частоты соударений, эрозионной стойкости материала лопаток и рельефа эродирующей поверхности. Приближённо глубину эрозионного износа $l_э$ (или износ металла Δm) в зависимости от времени τ (или массы выпадающей влаги) можно на участках τ_2 и τ_3 представить прямой линией.

В литературе известны лишь качественные объяснения вида кривой износа, основанные на представлениях об изменении характера взаимодействия между каплей и поверхностью в результате изменений рельефа эродированной поверхности. Согласно этим представлениям, по истечении инкубационного периода на поверхности появляются и накапливаются небольшие разрушения (начальный этап износа), возрастают глубина впадин (этап высокой скорости износа), углубления впадин до нескольких диаметров капель и заострение перемычек между кавернами (замедление износа), формирование «сотовой» и иглообразной формы поверхности, типичной для эрозии турбинных лопаток (участок минимальной скорости износа). Для определения эрозионной стойкости металла большое значение имеет первый (начальный) период, продолжительность которого в значительной степени характеризует сопротивляемость материала микроударному разрушению.

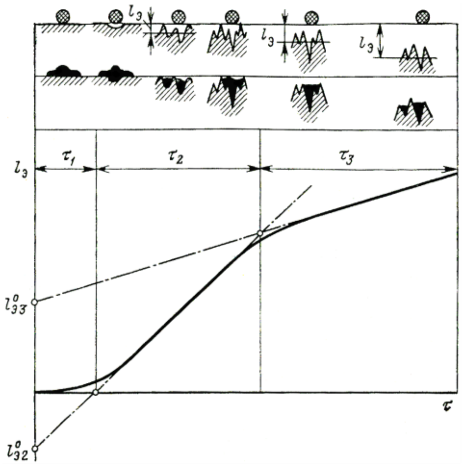

Рис. 3. Характерная кривая каплеударного разрушения металла и отвечающие её участкам формы эродированной поверхности

Выводы: основным результатом работы является формула (14) для скорости капли при начале эрозии. Ее величина определяется упругими свойствами и пределом текучести материала, но не зависит от размера капли. Содержащаяся в формуле константа T_1 определяется из решения задачи теории упругости средствами компьютерной математики. Хотя работа опирается на точные решения, ее представления являются модельными и нуждаются в экспериментальной проверке.

Работа выполнена в рамках государственного задания при финансовой поддержке Минобрнауки России. Коды проектов: № 933-2014, № 1972-2014.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Аверкина, Н.В.* Влажно-паровая эрозия дисков и валов паровых турбин / *Н.В. Аверкина, И.В. Железняк, Ю.Я. Качуринер* и др. // Электрические станции. 2010. № 8. С. 27-35.
2. *Дергачев, К.В.* Особенности разработки и программной реализации имитационной модели эрозионного изнашивания рабочих лопаток мощных влажно-паровых турбин / *К.В. Дергачев, Д.А. Коростелев* // Вестник Брянского государственного технического университета. 2008. № 4. С. 49-57.
3. *Ланина, А.А.* Исследование высокоскоростного каплеударного воздействия на поверхность лопаток паровых турбин // Инструмент и технологии. № 28-29. 2008. С. 84-87.
4. *Селянский, А.С.* Ударная эрозия рабочих лопаток цилиндра низкого давления // Вісник НТУУ «КПІ». Машинобудування. 2009. № 55. С. 37-42.
5. *Шубенко, А.Л.* Влияние эрозии на основные эксплуатационные характеристики рабочей лопатки последней ступени цилиндра низкого давления мощной паровой турбины / *А.Л. Шубенко, А.Э. Ковальский, Ю.С. Воробьев* и др. // Проблемы машиностроения. 2010. Т. 13. № 1. С. 3-11.
6. *Byeong-Eun, Lee.* Development of a water droplet erosion model for Large Steam Turbine Blades / *Byeong-Eun Lee, Kap-Jong Riu, Se-Hyun Shin, Soon-Bum Kwon* // KSME International Journal, 2003. T. 17. № 1, C. 114-121.
7. *Sandeep, Soni.* Erosion behaviour of steam turbine blades of glass-epoxy / *Sandeep Soni, J.P. Pandey* // International Journal of Advanced Engineering Technology, 2011. C. 110-117.

8. *Qulan Zhou.* Water Drop Erosion on Turbine Blades: Numerical Framework and Applications / *Qulan Zhou, Na Li, Xi Chen* et al. // Materials Transactions, 2008. T. 49. № 7. C. 1606-1615.
9. *Апакашев, Р.А.* Определение предела прочности и модуля сдвига воды при малых скоростях течения / *Р.А. Апакашев, В.В. Павлов* // Изестия РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 1. С. 3-7.
10. *Варавка, В.Н.* Прочность и механизмы разрушения высокопластичных материалов при воздействии дискретного водно-капельного потока / *В.Н. Варавка, О.В. Кудряков* // Вестник Донского государственного технического университета. 2011. Т. 11. № 8-2 (59). С. 1376-1384.
11. *Варавка, В.Н.* Прогнозирование эрозионного износа титановых сплавов в условиях длительного каплеударного воздействия / *В.Н. Варавка, О.В. Кудряков, А.Ф. Медников* // Вестник Донского государственного технического университета, 2011. № 9. С. 1574-1585.
12. *Варавка, В.Н.* Закономерности и параметры каплеударной эрозии титановых сплавов / *В.Н. Варавка, О.В. Кудряков* // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2011. № 6. С. 92-98.
13. *Кудряков, О.В.* Механизмы формирования эрозионного износа металлических материалов при высокоскоростных капельных соударениях / *О.В. Кудряков, В.Н. Варавка* // Материаловедение. 2012. № 5. С. 36-43.
14. *Рыженков, В.А.* О механизме зарождения и развитии разрушения при каплеударном воздействии двухфазного потока / *В.А. Рыженков, Г.В. Качалин, А.Ф. Медников* // Естественные и технические науки. 2012. № 5 (61). С. 289-295.
15. *Тарелин, А.А.* Электрофизические аспекты каплеударного разрушения элементов проточной части паровых турбин / *А.А. Тарелин, Н.В. Сурду, А.В. Нечаев* // Вестник НТУ «ХПИ». 2012. № 7. С. 88-96.
16. *Фаддеев, И.П.* Эрозия влажнопаровых турбин. – Л.: Машиностроение, 1974. 208 с.
17. *Skotnikova, M.A.* Transformation in Two Phase Titanium Alloys under High speed Mechanical Loading / *M.A. Skotnikova, N.A. Krylov, G.D. Motovilina* et al. // Вопросы материаловедения. 2007. № 4 (52). С. 359-365.
18. *Спринжер, Дж.* Эрозия при воздействии капель жидкости. – М.: Машиностроение, 1981. 200 с.
19. *Ташлицкий, Н.И.* Эрозия рабочих лопаток последней ступени влажно-паровой турбины. Библиографические ссылки // Вестник машиностроения. 2011. № 1. С. 95-96.
20. *Перельман, Р.Г.* Эрозия элементов паровых турбин / *Р.Г. Перельман, В.В. Пряхин*. – М.: Энергоатомиздат, 1986. 184 с.
21. *Лурье, А.И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. 940 с.
22. *Джонсон, К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. 510 с.
23. *Кирьянов, Д.В.* Mathcad 14. – СПб: БХВ-Петербург, 2007. 704 с.
24. *Елисеев, В.В.* Механика деформируемого твердого тела. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 231 с.
25. *Коренченко, А.Е.* Определение модуля сдвига воды в экспериментах с плавающим диском / *А.Е. Коренченко, В.П. Бескачко* // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 1. С. 100-103.

RISK ASSESSMENT FOR WATER DROP EROSION WITH APPLICATION OF ELASTIC CONTACT DEFORMATION THEORY

 M.A. Skotnikova, V.V. Eliseyev, A.A. Moskalets

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

The impact of a water drop is considered to be an elastic contact interaction. The stressed condition and characteristics of load that cause plastic deformation are defined by means of the theory of elasticity and computer mathematics. The formula for droplet's velocity that gives rise to the erosion is derived.

Key words: *water droplet erosion, contact interaction, stress in the semi-infinite space, yield condition, computer mathematics*

*Margarita Skotnikova, Doctor of technical Sciences, Professor.
E-mail: skotnikova@mail.ru
Vladimir Eliseev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor.
E-mail: yeliseyev@inbox.ru
Artem Moskalets, Post-graduate Student. E-mail:
artem.moskalec@gmail.com*