УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ОТ УДАРНОГО ИМПУЛЬСА В СОСТАВНОМ СТЕРЖНЕ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

© 2016 Е.А. Яновская, Е.Н. Сосенушкин, О.К. Иванова

Московский государственный технический университет «СТАНКИН»

Статья поступила в редакцию 16.03.2016

В статье рассматривается динамический процесс мгновенного возбуждения стержней из композиционных материалов ударными импульсами ступенчатой формы. Два упругих стержня взаимодействуют между собой по закону сухого трения после приложения ударной нагрузки к более жесткому стержню. В результате определяются скорости взаимодействия и напряжения, возникающие в материале стержней.

Ключевые слова: *динамическая модель, сухое трение, упругий стержень, композиционный материал, волна, скорость, амплитуда, напряжение*

В промышленном производстве [1] часто возникает потребность в материалах, обладающих, на первый взгляд, несовместимыми характеристиками, когда ни один металл или сплав, полимер или керамика не может обеспечить требуемый комплекс свойств [2]. В этом случае требуется объединение нескольких материалов в единое структурное целое, т.е. создание композиции, позволяет получить совершенно новый материал, свойства которого отличаются от свойств его составляющих. Термин «композиционный» можно применить к любому неоднородному материалу [3-5]. Композиционные материалы (КМ) могут состоять из двух или более компонентов, различающихся по химическому составу и разделенных границей, и иметь свойства, отличные от характеристик входящих в них компонентов [6]. К композиционным относят: слоистые материалы, которые состоят из двух или более слоев различных компонентов; дисперсионные, представляющие собой механическую смесь частиц одного или нескольких компонентов с матричной компонентой; волокнистые армированные, состоящие из волокон одного компонента, расположенных в другом компоненте, являющимся матрицей [7].

Среди перспективных КМ особое место занимают слоистые металлические композиции, которые могут быть изготовлены соединением разнородных металлов в монолитную композицию, сохраняющую надежную связь составляющих при дальнейшей технологической обработке и в условиях эксплуатации [8-10]. Основную часть этих материалов представляют биметаллы - композиции, состоящие из слоев двух металлов [6]. Применение в машиностроении слоистых металлов позволяет не только повысить надежность и долговечность большого класса деталей [11] и оборудования, но и значительно сократить расходы на их изготовление в результате экономии дорогостоящих цветных металлов. Кроме того, использование слоистых композиций способствует разработке более совершенных конструкций машин, приборов, аппаратов [12-16].

К дисперсионным можно отнести большинство материалов, применяемых в порошковой металлургии [17, 18], требующих достаточно сложной подготовки, компактирования с наложением высоких давлений, а в некоторых случаях температур, и сложной технологии спекания [19]. В дисперсионных композиционных материалах основная нагрузка приходится на материал матрицы, а распределенные по объему дисперсные частицы упрочняют ее, препятствуя пластической деформации [20, 21] или разрушению [22, 23]. В волокнистых КМ основную нагрузку несут высокопрочные волокна, а матрица связывает волокна, защищает их от воздействия внешней среды и придает материалу нужные физико-механические характеристики (электро- и теплопроводность, коррозионную стойкость и др.).

КМ, в которых компоненты обычно расположены с определенной периодичностью, представляют интерес из-за их способности ослаблять ударные импульсы [10]. Чрезвычайная сложность взаимодействия волн при распространении ударного импульса в реальном КМ приводит к тому, что современные теоретические методы исследования этой проблемы ограничиваются сильно идеализированными моделями.

Ограничения модели. Предположим, что некоторые КМ можно заменить соответствующими моделями [7-10]. Рассмотрим динамические процессы в материалах, армированных волокнами, которые можно представить как составные стержни. При воздействии на подобные материалы динамическими нагрузками значительная часть энергии рассеивается за счет наличия сил трения между поверхностями контакта стержней. Рассмотрим полубесконечный составной стержень, состоящий из 2 слоёв. Каждый из слоёв будем считать упругим стержнем постоянного поперечного сечения S. Часть поверхностей этих стержней с периметрами нормальных сечений L взаимодействуют друг с другом по закону сухого трения Кулона [24]. В случае, когда имеет место проскальзывание между стержнями, касательные напряжения на боковой поверхности будут равны fN, где N боковое давление на стержне, а f - коэффициент трения между материалами стержней.

При наличии относительного движения между стержнями на их поверхностях будет действовать предельная сила трения, абсолютное значение которой, отнесенное к единице длины стержней для случая сухого трения равно $F_f=fLN$ [24]. Эта сила всегда действует в направлении, противоположном вектору скорости относительного движения сечений. При отсутствии проскальзывания сила трения принимает некоторое значение, не превышающее по абсолютной величине

Яновская Елена Александровна, кандидат технических наук, доцент. E-mail: elena_yanovskaya@bk.ru
Сосенушкин Евгений Николаевич, доктор технических наук, профессор. E-mail: sen@stankin.ru
Иванова Оксана Константиновна, кандидат физико-математических наук, доцент. E-mail: oksivgor@mail.ru

предельное. Будем считать величину силы трения постоянной.

Характер взаимодействия. В данной работе рассматривается случай мгновенного возбуждения стержней импульсами ступенчатой формы. Удар производится по более жесткому стержню. Рассмотрим два упругих стержня, взаимодействующих между собой по закону сухого трения. Считаем, что для первого стержня модуль Юнга имеет значение E_1 и плотность ρ_1, для второго $-E_2$ и ρ_2 Продольные упругие волны, которые распространяются в стержнях, имеют соответственные скорости $a_1=\sqrt{\dfrac{E_1}{\rho_1}}$ и $a_2=\sqrt{\dfrac{E_2}{\rho_2}}$. Будем считать, что $a_2>a_1$. Начало координат поместим на ударяемом конце второго стержня и направим оси x вдоль стержня (рис. 1).

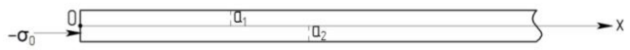


Рис. 1. Расчетная схема

Нормальные напряжения σ_1, σ_2 в стержнях и скорости их сечений υ_1 и υ_2 удовлетворяют системе уравнений, составленной из уравнений движения и закона Гука в продифференцированной форме:

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}=\rho_1\frac{\partial\upsilon_1}{\partial t}+\chi q;\quad \frac{\partial\sigma_1}{\partial t}=E_1\frac{\partial\upsilon}{\partial x} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\sigma_2}{\partial x}=\rho_2\frac{\partial\upsilon_2}{\partial t}-\chi q;\quad \frac{\partial\sigma_2}{\partial t}=E_2\frac{\partial\upsilon}{\partial x};\quad q=\frac{fLN}{S} \qquad (2)$$

Величина $\chi=sign[\upsilon_1-\upsilon_2]$ в случае движения, а в случае покоя принимаем любое значение в пределах от -1 до +1. Системы уравнений (1) и (2) можно свести к неоднородным волновым уравнениям.

$$a_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\chi q}{\rho_1}.$$

$$a_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{\chi q}{\rho_2}.$$

Для того, чтобы найти общее решение неоднородного волнового уравнения, необходимо использовать соотношения вдоль характеристик этого уравнения. Характеристиками неоднородных волновых уравнений являются линии

$$dx=\pm a_1dt \text{ и } dx=\pm a_2dt$$

По этим линиям распространяется разрыв решения. Вдоль характеристик имеют место соотношения $\pm d\sigma+a_1\rho_1d\upsilon+a_1\chi q dt=0$ для первого стержня и $\pm d\sigma+a_2\rho_2d\upsilon+a_2\chi q dt=0$ для второго стержня. Решение задачи Коши ищется в виде: для первого стержня:

$$\upsilon_1=-\frac{\chi qt}{2\rho_1}+a_1f(a_1t-x)+a_1\varphi(a_1t+x)$$

$$\sigma_1=\frac{\chi qx}{2}-E_1f(a_1t-x)+E_1\varphi(a_1t+x) \qquad (3)$$

для второго стержня:

$$\upsilon_2=-\frac{\chi qt}{2\rho_2}+a_2f(a_2t-x)+a_2\varphi(a_2t+x)$$

$$\sigma_2=\frac{\chi qx}{2}-E_2f(a_2t-x)+E_2\varphi(a_2t+x) \qquad (4)$$

Постановка задачи и её решение графоаналитическим методом. Для ударяемого стержня σ_2 и υ_2 довлетворяют системе (2). В момент t=0 все сечения стержня, за исключением x=0, считаем неподвижными и ненапряженными, т.е.

$$\sigma=\upsilon=0 \text{ при } t=0 \text{ и } x>0. \qquad (5)$$

На ударяемом конце стержня x=0 имеет место условие

$$\sigma=-\sigma_0. \qquad (6)$$

Область движения от области покоя в рассматриваемой задаче, во всяком случае, до некоторого момента, определятся характеристикой $x=a_2t$ (рис. 2). Решение в области $0\le x\le a_2t$ (обозначим ее I) ищется в виде (4) методом характеристик. Передний фронт возмущения в стержне начинает распространяться как ударный. Условие сохранения количества движения на характеристике $x=a_2t$ имеет вид $[\sigma]+a_2\rho_2[\upsilon]=0$. С учетом условия (5) это соотношение можно переписать как

$$\sigma+a_2\rho_2\upsilon=0 \text{ при } x=a_2t. \qquad (7)$$

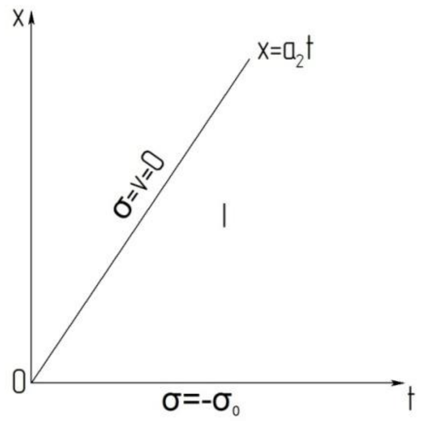


Рис. 2. Область движения от точки покоя

Из условий (5) и (7) находим решение в области I для второго стержня, учитывая, что χ=-1

$$\begin{cases}\upsilon=-\dfrac{qt}{2\rho_2}+\upsilon_0\\[2mm] \sigma=\dfrac{qx}{2}-\sigma_0\end{cases}\text{, где } \upsilon_0=\frac{\sigma_0}{a_2\rho_2} \qquad (8)$$

Для первого стержня σ_1 и υ_1 удовлетворяют системе (1). В момент t=0 все сечения стержня, в том числе и x=0, считаем неподвижными и ненапряженными, т.е.

$$\sigma=\upsilon=0 \text{ при } t=0 \text{ и } x>0 \qquad (9)$$

$$\sigma=0 \text{ при } x=0 \qquad (10)$$

Область движения от области покоя в этом случае отделяется фронтом $x=a_2t$, который не является характеристикой (1) (рис. 3).

Решение в областях $a_1t<x\le a_2t$ (I_a) и $0\le x\le a_1t$ (I_σ) ищется в виде (3) методом характеристик. Условие сохранения количества движения на фронте $x=a_2t$ распадается на два условия $[\sigma]=0$ и $[\upsilon]=0$. Эти два соотношения можно переписать в виде

$$[\sigma] \pm a_2 \rho_1 [\upsilon] = 0 \qquad (11)$$

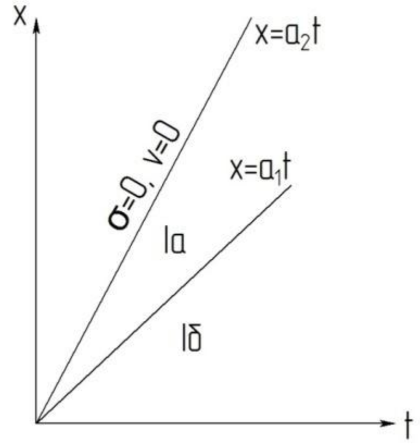


Рис. 3. Схема поиска решения

Из условий (9) и (11) находим решение в области I_a для первого стержня, считая χ=-1

$$\begin{cases} \upsilon = \dfrac{q a_2 (a_2 t - x)}{\rho_1 (a_2^2 - a_1^2)} \\ \sigma = -\dfrac{q a_1^2 (a_2 t - x)}{a_2^2 - a_1^2} \end{cases} \qquad (12a)$$

При $x=a_2t$ условие количества движения с учетом решения в области I_a дает:

$$[\sigma] + a_1 \rho_1 [\upsilon] = 0 \text{ или}$$

$$\sigma + \frac{q a_1^2 (a_2 t - x)}{a_2^2 - a_1^2} + a_1 \rho_1 \upsilon - \frac{q a_2 a_1 (a_2 t - x)}{a_2^2 - a_1^2} = 0 \qquad (13)$$

Из условий (10) и (13) находим решение в области $I_б$. В этой области χ=-1.

$$\begin{cases} \upsilon = \dfrac{q}{\rho_1} \dfrac{a_2 t}{a_1 + a_2} \\ \sigma = -\dfrac{q a_1 t}{a_1 + a_2} \end{cases} \qquad (12б)$$

Решения (8) и (12) справедливы в области I до тех пор, пока $\upsilon_1 < \upsilon_2$, т.е. χ=-1. Найдем линию, на которой скорости обоих стержней выравниваются. При $a_1 t < x \le a_2 t$

$$x = \frac{2\rho_2 a_2^2 + \rho_1 (a_2^2 - a_1^2)}{2\rho_2 a_2} t - \frac{\upsilon_0 \rho_1}{q} \frac{a_2^2 - a_1^2}{a_2}$$

Обозначим

$$\frac{2\rho_2 a_2^2 + \rho_1 (a_2^2 - a_1^2)}{2\rho_2 a_2} \equiv k;$$

$$\frac{\upsilon_0 \rho_1}{q} \frac{a_2^2 - a_1^2}{a_2} \equiv x_0, \quad x = kt - x_0.$$

при $0 \le x \le a_1 t$

$$t = t^* \equiv \frac{2\upsilon_0 \rho_2 \rho_1 (a_1 + a_2)}{q(2\rho_2 a_2 + \rho_1 (a_1 + a_2))}.$$

Согласно рис. 4 на линии

$$\begin{cases} x = kt - x_0 & a_1 t < x \le a_2 t \\ t = t^* & \text{при } 0 \le x \le a_1 t \end{cases} \qquad (14)$$

скорости выравниваются.

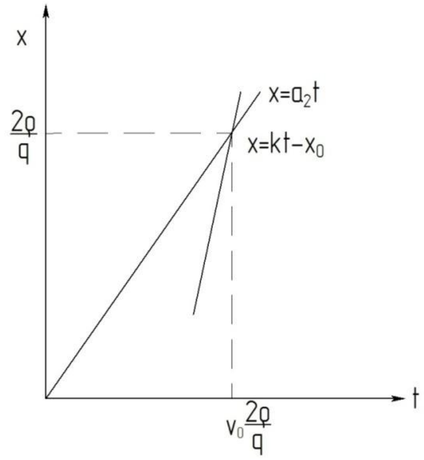


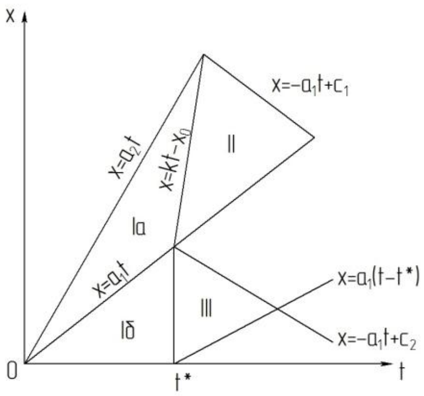
Рис. 4. Поиск точки пересечения линий

Рассмотрим прямую $x = kt - x_0$. Скорость υ_0 имеет тот же знак, что и σ_0. Это означает, что x_0>0 всегда, т.к. a_2>a_1. Можно показать, что a_2<k.

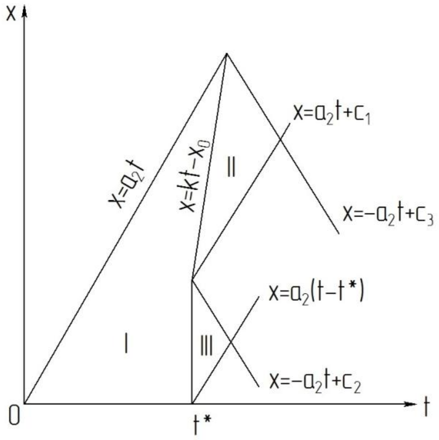
$$\frac{2\rho_2 a_2^2 + \rho_1 (a_2^2 - a_1^2)}{2\rho_2 a_2} > a_2$$

$$2\rho_2 a_2^2 + \rho_1 (a_2^2 - a_1^2) > 2\rho_2 a_2^2$$

$$\rho_1 (a_2^2 - a_1^2) > 0.$$



а)



б)

Рис. 5. Геометрическая интерпретация характеристик

Прямые $x=kt - x_0$ и $t = t^*$ пересекутся в точке $x = a_1 t^*$. Это означает, что ломаная линия (14) является непрерывной. На линии (14) скорости движения сечений υ_1 и υ_2 выравниваются, но каким будет дальнейшее движение – неизвестно. Для того чтобы выяснить характер дальнейшего движения, необходимо рассмотреть задачи Коши для первого и второго стержней в областях, образованных соответствующими характеристиками (рис. 5а, б). Периодически будем обращаться к уравнениям математической физики [25-28].

Для первого стержня в области *II* ищется решение системы (1) в виде (3). На границе области *II* $x=kt-x_0$ выполнены условия

$$\upsilon=\frac{q}{\rho_1}\frac{a_2}{a_2^2-a_1^2}\left((a_2-k)t+x_0\right)$$

$$\sigma=-q\frac{a_1^2}{a_2^2-a_1^2}\left((a_2-k)t+x_0\right) \tag{15}$$

Решаем эту задачу методом характеристик. В области *II* получаем решение:

$$\upsilon_1^{II}=\frac{(\chi+1)qk(kt-x-x_0)}{\rho_1\left(a_1^2-k^2\right)}-\frac{qa_2(x-a_2t)}{\rho_1\left(a_2^2-a_1^2\right)}$$

$$\sigma_1^{II}=-\frac{(\chi+1)qa_1^2(kt-x-x_0)}{a_1^2-k^2}-\frac{qa_1^2(x-a_2t)}{a_2^2-a_1^2} \tag{16}$$

В области *III* для системы (1) решение ищется в виде (3). На границе области *III* $0\leqslant x\leqslant a_1t$, $t=t^*$ выполнены условия

$$\upsilon=\upsilon^*\equiv\frac{2\upsilon_0a_2\rho_2}{2\rho_2a_2+\rho_1(a_1+a_2)}$$

$$\sigma=-q\frac{a_1x}{a_1+a_2} \tag{17}$$

Также решая методом характеристик, находим решение в области *III*

$$\upsilon_1^{III}=\frac{q}{\rho_1}\left(\chi+\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)\left(t^*-t\right)+\upsilon^*$$

$$\sigma_1^{III}=-q\frac{a_1x}{a_1+a_2}. \tag{18}$$

Для второго стержня в области *II* ищется решение системы (2) в виде (4). На границе области *II* ($x=kt-x_0$) выполнены условия

$$\upsilon=-\frac{qt}{2\rho_2}+\upsilon_0$$

$$\sigma=\frac{qkt}{2}-\left(\sigma_0+\frac{qx_0}{2}\right) \tag{19}$$

Решая эту задачу методом характеристик в области *II*, получим

$$\upsilon_2^{II}=\frac{(\chi+1)qk(x-kt+x_0)}{\rho_2\left(a_2^2-k^2\right)}-\frac{qt}{2\rho_2}+\upsilon_0$$

$$\sigma_2^{II}=-\frac{(\chi+1)qa_2^2(x-kt+x_0)}{a_2^2-k^2}-\frac{qx}{2}-\sigma_0.$$

В области *III* для системы (2) решение ищется в виде (4). На границе области *III* $0\leqslant x\leqslant a_1t$, $t=t^*$ выполнены условия

$$\upsilon=\upsilon^*$$

$$\sigma=\frac{qx}{2}-\sigma_0 \tag{20}$$

Также решая методом характеристик, находим решение в области *III*

$$\upsilon_2^{III}=\frac{2\chi+1}{2\rho_2}q\left(t-t^*\right)+\upsilon^*$$

$$\sigma_2^{III}=\frac{qx}{2}-\sigma_0 \tag{21}$$

После того, как найдены решения для обоих стержней в областях *II* и *III*, можно определить значение χ в этих областях. Очевидно, что в дальнейшем стержни будут двигаться как единое целое, при условии, что $|\chi|<1$

Запишем систему уравнений для совместного движения стержней. Для этого сложим систему уравнений (1) с системой (2). При этом необходимо учесть, что $\upsilon_1=\upsilon_2$. Обозначим $\sigma_1+\sigma_2=\sigma$ Нормальное напряжение σ в составном стержне и скорость его сечения υ, удовлетворяет системе уравнений, состоящей из уравнения движения и закона Гука:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}=(\rho_1+\rho_2)\frac{\partial\upsilon}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=(E_1+E_2)\frac{\partial\upsilon}{\partial x} \tag{22}$$

Обозначим $\rho=\rho_1+\rho_2$, $E=E_1+E_2$. Продольные упругие волны при совместном движении стержней будут распространяться в составном стержне со скоростью $a=\sqrt{\dfrac{E_1+E_2}{\rho_1+\rho_2}}$.

Найдем характеристики и соотношения вдоль них для системы (22). Характеристиками являются линии $dx=\pm adt$. Соотношения вдоль этих характеристик $d\sigma=\pm a\rho d\upsilon$. Решение системы (23) будем искать в виде

$$\sigma_1=f_1(at+x)+\varphi_1(at-x)+\sigma_{10}(x)$$

$$\sigma_2=f_2(at+x)+\varphi_2(at-x)+\sigma_{20}(x)$$

$$\upsilon=f_3(at+x)+\varphi_3(at-x)+At,$$

где $\sigma_{10}(x)$; $\sigma_{20}(x)$ - граничные условия.

Неоднородность в решениях появляется за счет того, что необходимо разделить напряжения в первом и втором стержнях. Для системы (22) решение имеет вид:

$$\sigma_1=E_1f(at+x)+E_1\varphi(at-x)+\sigma_{10}(x)$$

$$\sigma_2=E_2f(at+x)+E_2\varphi(at-x)+\sigma_{20}(x) \tag{23}$$

$$\upsilon=af(at+x)-a\varphi(at-x)+\frac{t}{\rho}\left(\frac{d\sigma_{10}(x)}{dx}+\frac{d\sigma_{20}(x)}{dx}\right).$$

Решения будем искать в областях, образованных характеристиками $dx=\pm adt$. (рис. 6). Решения в областях *II*, *III* и *IV* будем искать в виде (24). В области *II* решаем систему (22), при условии, что на её границе $x=kt-x_0$:

$$\sigma_{10}=-\frac{qa_1^2(a_2t-x)}{a_2^2-a_1^2}$$

$$\sigma_{20}=\frac{qx}{2}-\sigma_0$$

$$\upsilon=-\frac{qt}{2\rho_2}+\upsilon_0.$$

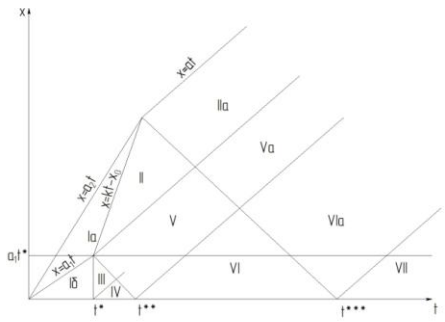


Рис. 6. Геометрическая интерпретация поиска решений

В этом случае $t = \dfrac{x + x_0}{k}$ и значения σ_{10}, σ_{20} и υ на границе перепишутся так:

$$\sigma_{10} = + \frac{qa_1^2\left((k - a_2)x - a_2 x_0\right)}{k\left(a_2^2 - a_1^2\right)}$$

$$\sigma_{20} = \frac{qx}{2} - \sigma_0$$

$$\upsilon = -\frac{q}{2\rho_2}\frac{x + x_0}{k} + \upsilon_0 \tag{24}$$

Решая (23) при условии (24), находим решение во *II* области. Оно будет иметь вид:

$$\sigma_1 = \frac{E_1(kt - x - x_0)}{a^2 - k^2}\left(\begin{array}{c}\dfrac{q}{2\rho_2} + \dfrac{q}{2\rho} + \\ + \dfrac{qa_1^2(k - a_2)}{\rho k\left(a_2^2 - a_1^2\right)}\end{array}\right) + $$

$$+ \frac{qa_1^2\left((k - a_2)x - a_2 x_0\right)}{k\left(a_2^2 - a_1^2\right)}$$

$$\sigma_2 = \frac{E_2(kt - x - x_0)}{a^2 - k^2}\left(\begin{array}{c}\dfrac{q}{2\rho_2} + \dfrac{q}{2\rho} + \\ + \dfrac{qa_1^2(k - a_2)}{\rho k\left(a_2^2 - a_1^2\right)}\end{array}\right) + \frac{qx}{2} - \sigma_0$$

$$\upsilon = -\frac{k(kt - x - x_0)}{a^2 - k^2}\left(\begin{array}{c}\dfrac{q}{2\rho_2} + \dfrac{q}{2\rho} + \\ + \dfrac{qa_1^2(k - a_2)}{\rho k\left(a_2^2 - a_1^2\right)}\end{array}\right) - \frac{qt}{2\rho_2} + \upsilon_0 \tag{25}$$

Значение χ в области *II* по модулю меньше 1. Это можно проверить, подставив σ_1 и υ из (26) в систему уравнений (1) или σ2 и υ в систему (2). В области *III* решаем систему (22), при условии, что на её границе $0 \leqslant x \leqslant a_1 t$, $t = t^*$

$$\sigma_{10} = -\frac{qa_1 x}{a_1 + a_2}, \quad \sigma_{20} = \frac{qx}{2} - \sigma_0; \quad \upsilon = \upsilon^*. \tag{26}$$

Решение в области *III* имеет вид:

$$\sigma_1 = -\frac{qa_1 x}{a_1 + a_2}$$

$$\sigma_2 = \frac{qx}{2} - \sigma_0$$

$$\upsilon = \upsilon^* + \frac{t - t^*}{\rho}\frac{q}{2}\frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} \tag{27}$$

Значение χ в области *III* также по модулю меньше 1.

В области *IV* решаем задачу Коши для системы (23). Решение ищется в виде (24). При x=0 $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -\sigma_0$ (или $\sigma_1 + \sigma_2 = -\sigma_0$), (28)

при $x = a(t - t^*)$: $\sigma_{10} = -\dfrac{qa_1 a(t - t^*)}{a_1 + a_2}$

$$\sigma_{20} = \frac{qa(t - t^*)}{2} - \sigma_0 \tag{29}$$

$$\upsilon_0 = \upsilon^* + \frac{t - t^*}{\rho}\frac{q}{2}\frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}$$

На характеристике x=a(t – t*) для нахождения решения используем закон сохранения количества движения $[\sigma] + a\rho[\upsilon] = 0$. С учетом условий (29) он перепишется следующим образом:

$$\sigma - (\sigma_{10} + \sigma_{20}) + a\rho\upsilon - a\rho\upsilon_0 = 0 \tag{30}$$

Из условий (28) и (29) находим решение в области *IV*. Оно будет иметь вид

$$\sigma_1 = -\frac{qa_1 x}{a_1 + a_2}$$

$$\sigma_2 = \frac{qx}{2} - \sigma_0$$

$$\upsilon = \upsilon^* + \frac{t - t^*}{\rho}\frac{q}{2}\frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} \tag{31}$$

Очевидно, что в области IV $|\chi|<1$.

Во всех последующих областях найти решение системы (22) в виде (23) не удастся, т.к. в этих областях решается задача Гурса [25, 26]. Поэтому решение будем искать в виде

$$\sigma_1 + \sigma_2 = Ef(at + x) + E\varphi(at - x)$$

$$\upsilon = af(at + x) - a\varphi(at - x). \tag{32}$$

Необходимо заметить, что нужно разделять σ_{10}, σ_{20} для $0 \leqslant x \leqslant a_1 t^*$ и $x > a_1 t^*$. В первом случае нужно брать значения σ_{10}, σ_{20} на прямой $t = t^*$ при $0 \leqslant x \leqslant a_1 t$, а во втором – значения на прямой $x = kt - x_0$. В точке $\left(t \equiv \upsilon_0 2\dfrac{\rho_2}{q},\ a_2 t\right)$ передний фронт отходит от линии $x = a_2 t$ и движется с некоторой заранее неизвестной скоростью b_1. Если $b_1 \neq a$, то решение в области *IIa* будет тривиальным. Это означает, что область образована характеристиками $x = at + (a_2 - a)2\upsilon_0\dfrac{\rho_2}{q}$ и $x = -at + (a_2 + a)2\upsilon_0\dfrac{\rho_2}{q}$.

Вдоль характеристики $x = at + \ldots$ выполнено условие

$$\sigma = \upsilon = 0. \tag{33}$$

При $x = -at + c$ нам известны σ_1, σ_2 и υ из (25). Используем эти условия в области *IIa* при решении задачи Гурса. Решение будет иметь следующий вид:

$$\sigma = \frac{E(at - x)}{2a^2(a - k)}\left(\begin{array}{c}\dfrac{qa}{2\rho_2} + \dfrac{qk}{2\rho} + \\ + \dfrac{qa_1^2(k - a_2)}{\rho\left(a_2^2 - a_1^2\right)}\end{array}\right) + E\upsilon_0\lambda - \sigma_0$$

$$\sigma_1 = -\frac{E_2}{E}\frac{qa_1^2\left((k - a_2)x - a_2 x_0\right)}{k\left(a_1^2 - a_2^2\right)} -$$

$$- \frac{E_1}{E}\frac{qx}{2} + \frac{E_1}{E}\left(\frac{E(at - x)}{2a^2(a - k)}(\ldots)\right) + E_1\upsilon_0\lambda$$

$$\sigma_2=\frac{E_1}{E}\frac{qx}{2}+\frac{E_2}{E}\frac{qa_1^2\left((k-a_2)x-a_2x_0\right)}{k\left(a_1^2-a_2^2\right)}+$$

$$+\frac{E_2}{E}\left(\frac{E(at-x)}{2a^2(a-k)}(\ldots)\right)+E_2\upsilon_0\lambda-\sigma_0$$

$$\upsilon=-\frac{(at-x)}{2a(a+k)}\left(\begin{array}{l}\frac{qa}{2\rho_2}+\frac{qk}{2\rho}+\\+\frac{qa_1^2(k-a_2)}{\rho\left(a_2^2-a_1^2\right)}\end{array}\right)-a\upsilon_0\lambda+\frac{a_2\rho_2}{a\rho}\upsilon_0, \quad (34)$$

где

$$\lambda=\left(\frac{\rho_2(a+a_2)k}{a\left(a^2-k^2\right)}-\frac{\rho_1\left(a_2^2-a_1^2\right)}{a_2\left(a^2-k^2\right)}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2\rho_2}+\frac{1}{2\rho}+\frac{a_1^2(k-a_2)}{\rho k\left(a_2^2-a_1^2\right)}\right)+$$

$$+\frac{\rho_2}{E}\left(\frac{a+a_2}{2}+\frac{a_1^2(k-a_2)(a+a_2)}{k\left(a_2^2-a_1^2\right)}\right)-\frac{E_1}{E\cdot k}$$

В области V решаем задачу Гурса. На характеристиках $x=-at+(a+a_1)t^*$ используем условие (31), $x=at-(a-a_1t^*)$ - условие (26). Решение системы уравнений (23) в области V имеет вид

$$\sigma_1+\sigma_2=-\frac{q(at+x)}{2(a+k)}\left(\frac{a\rho}{2\rho_2}-\frac{k}{2}-\frac{a_1^2(k-a_2)}{a_2^2-a_1^2}\right)-$$

$$-\frac{q(at-x)}{4}\frac{a_2-a_1}{a_2+a_1}+E\sigma_V^{**}-\sigma_0$$

$$\upsilon=-\frac{aq(at+x)}{2E(a+k)}\left(\frac{a\rho}{2\rho_2}-\frac{k}{2}-\frac{a_1^2(k-a_2)}{a_2^2-a_1^2}\right)+$$

$$+\frac{qa(at-x)}{4E}\frac{a_2-a_1}{a_2+a_1}-a\upsilon_V^{**}+\upsilon_0,$$

где

$$\upsilon_V^{**}=\frac{\upsilon_0\rho_1\left(a_2^2-a_1^2\right)}{2Ea_2(a+k)}\left(\frac{a\rho}{2\rho_2}+\frac{a}{2}+\frac{a_1^2(a+a_2)}{a_2^2-a_1^2}\right)+$$

$$+\frac{qat^*}{4E}\frac{a_2-a_1}{a_2+a_1}+\frac{\upsilon^*}{2a},$$

$$\sigma_V^{**}=-\frac{\upsilon_0\rho_1\left(a_2^2-a_1^2\right)}{2Ea_2(a+k)}\left(\frac{a\rho}{2\rho_2}+\frac{a}{2}+\frac{a_1^2(a+a_2)}{a_2^2-a_1^2}\right)+$$

$$+\frac{qat^*}{4E}\frac{a_2-a_1}{a_2+a_1}-\frac{qt^*}{2a\rho_2}$$

при $x\le a_1t^*$

$$\sigma_1=-\frac{E_2}{E}\frac{qa_1x}{a_1+a_2}-\frac{E_1}{E}\frac{qx}{2}-$$

$$-\frac{E_1}{E}\left(\begin{array}{l}\frac{q(at+x)}{2(a+k)}(\ldots)+\\+\frac{q(at-x)}{4}\frac{a_2-a_1}{a_2+a_1}\end{array}\right)+E_1\sigma_V^{**}$$

$$\sigma_2=\frac{E_1}{E}\frac{qx}{2}+\frac{E_2}{E}\frac{qa_1x}{a_1+a_2}-$$

$$-\frac{E_2}{E}\left(\begin{array}{l}\frac{q(at+x)}{2(a+k)}(\ldots)+\\+\frac{q(at-x)}{4}\frac{a_2-a_1}{a_2+a_1}\end{array}\right)+E_2\sigma_V^{**}-\sigma_0$$

при $x>a_1t^*$

$$\sigma_1=-\frac{E_2}{E}\frac{qa_1^2\left((k-a_2)x-a_2x_0\right)}{k\left(a_1^2-a_2^2\right)}-$$

$$-\frac{E_1}{E}\frac{qx}{2}-\frac{E_1}{E}(\ldots)+E_1\sigma_V^{**}$$

$$\sigma_2=\frac{E_1}{E}\frac{qx}{2}+\frac{E_2}{E}\frac{qa_1^2\left((k-a_2)x-a_2x_0\right)}{k\left(a_1^2-a_2^2\right)}-$$

$$-\frac{E_2}{E}(\ldots)+E_2\sigma_V^{**}-\sigma_0 \quad (35)$$

В области VI решаем задачу Коши. При $x=-at+(a+a_1)t^*$ используем условие (35) и закон сохранения количества движения $[\sigma]+a\rho[\upsilon]=0.$ При x=0 считаем, что σ_1=0, σ_2=- σ_0. Находим, что в области VI решение системы уравнений (22) имеет вид:

$$\sigma_1+\sigma_2=-\frac{qx}{a+k}\left(\frac{a\rho}{2\rho_2}-\frac{k}{2}-\frac{a_1^2(k-a_2)}{a_2^2-a_1^2}\right)-\sigma_0$$

$$\upsilon=-\frac{qt}{\rho(a+k)}\left(\frac{a\rho}{2\rho_2}-\frac{k}{2}-\frac{a_1^2(k-a_2)}{a_2^2-a_1^2}\right)+\upsilon_{VI}^{**}+\upsilon_0,$$

где $\upsilon_{VI}^{**}=a\sigma_V^{**}-a\upsilon_V^{**}$

при $x\le a_1t^*$

$$\sigma_1=-\frac{E_2}{E}\frac{qa_1x}{a_1+a_2}-\frac{E_1}{E}\frac{qx}{2}+\frac{E_1}{E}\frac{qx}{a+k}(\ldots)$$

$$\sigma_2=\frac{E_1}{E}\frac{qx}{2}+\frac{E_2}{E}\frac{qa_1x}{a_1+a_2}+\frac{E_2}{E}\frac{qx}{a+k}(\ldots)-\sigma_0. \quad (36)$$

при $x>a_1t^*$

$$\sigma_1=-\frac{E_2}{E}\frac{qa_1^2\left((k-a_2)x-a_2x_0\right)}{k\left(a_1^2-a_2^2\right)}-$$

$$-\frac{E_1}{E}\frac{qx}{2}+\frac{E_1}{E}\frac{qx}{a+k}(\ldots)$$

$$\sigma_2=\frac{E_1}{E}\frac{qx}{2}+\frac{E_2}{E}\frac{qa_1^2\left((k-a_2)x-a_2x_0\right)}{k\left(a_1^2-a_2^2\right)}\frac{qx}{2}+$$

$$+\frac{E_2}{E}\frac{qx}{a+k}(\ldots)-\sigma_0.$$

В области Va решаем задачу Гурса на характеристиках $x=at-(a-a_1t^*)$ используем условие (36)

$$x=-at+(a_2+a)2\upsilon_0\frac{\rho_2}{q}$$ - условие (37).

Решая эту задачу в области Va для системы (23) находим

$$\sigma_1+\sigma_2=-(at-x)\frac{q}{4}\frac{a_2-a_1}{a_2+a_1}+E\sigma_{Va}^{**}+\frac{\sigma_0}{4}$$

$$\upsilon=(at-x)\frac{qa}{4E}\frac{a_2-a_1}{a_2+a_1}-a\upsilon_{Va}^{**}-\frac{\upsilon_0}{4},$$

где

$$\sigma_{Va}^{**}=\upsilon_{Va}^{**}=\frac{\sigma_V^{**}-\upsilon_V^{**}}{2} \quad (37)$$

$$\sigma_1=-\frac{E_2}{E}\frac{qa_1^2\left((k-a_2)x-a_2x_0\right)}{k\left(a_1^2-a_2^2\right)}-\frac{E_1}{E}\frac{qx}{2}+$$

$$+\frac{E_1}{E}\left(-(at-x)\ldots\right)+E_1\sigma_{Va}^{**}$$

$$\sigma_2 = \frac{E_1}{E}\frac{qx}{2} + \frac{E_2}{E}\frac{qa_1^2\left(\left(k-a_2\right)x - a_2x_0\right)}{k\left(a_1^2 - a_2^2\right)} +$$

$$+\frac{E_2}{E}\left(-\left(at-x\right)\ldots\right) + E_2\sigma_{Va}^{**} - \sigma_0 .$$

В области *VIa* также решаем задачу Гурса на характеристиках $x = at-(a+a_1)t^*$ используем условие (36)

$$x = -at + \left(a_2 + a\right)2\upsilon_0\frac{\rho_2}{q}$$ - условие (37).

Решая задачу Гурса в области *VIa*, находим решение для системы (23):

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{q\left(at-x\right)}{2}\left(\frac{a\rho}{2\rho_2} - \frac{k}{2} - \frac{a_1^2\left(k-a_2\right)}{a_2^2 - a_1^2}\right) -$$

$$-\frac{E\upsilon_{VI}^{**}}{2a} - \frac{\sigma_0}{2} - \frac{\upsilon_0}{2a\rho}$$

$$\upsilon = -\frac{q\left(at-x\right)}{2a\rho}\left(\frac{a\rho}{2\rho_2} - \frac{k}{2} - \frac{a_1^2\left(k-a_2\right)}{a_2^2 - a_1^2}\right) +$$

$$+\frac{\upsilon_{VI}^{**}}{2} + \frac{\sigma_0}{2a\rho} + \frac{\upsilon_0}{2}.$$

при $x \le a_1t^*$

$$\sigma_1 = -\frac{E_2}{E}\frac{qa_1x}{a_1+a_2} - \frac{E_1}{E}\frac{qx}{2} +$$

$$+\frac{E_1}{E}\left(\ldots\right) + \frac{E_1}{E}\frac{\sigma_0}{2} - \frac{E_1\upsilon_0}{2a\rho} \qquad (38)$$

$$\sigma_2 = \frac{E_1}{E}\frac{qx}{2} + \frac{E_2}{E}\frac{qa_1x}{a_1+a_2} +$$

$$+\frac{E_2}{E}\left(\ldots\right) - \frac{E_1\sigma_0}{E} - \frac{E_2\sigma_0}{2E} - \frac{E_2\upsilon_0}{2a\rho}$$

при $x > a_1t^*$

$$\sigma_1 = -\frac{E_2}{E}\frac{qa_1^2\left(\left(k-a_2\right)x - a_2x_0\right)}{k\left(a_1^2 - a_2^2\right)} -$$

$$-\frac{E_1}{E}\frac{qx}{2} + \frac{E_1}{E}\left(\ldots\right) + \frac{E_1}{E}\frac{\sigma_0}{2} - \frac{E_1\upsilon_0}{2a\rho}$$

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{E}\frac{qx}{2} + \frac{E_2}{E}\frac{qa_1^2\left(\left(k-a_2\right)x - a_2x_0\right)}{k\left(a_1^2 - a_2^2\right)} + \frac{E_2}{E}\left(\ldots\right) +$$

$$+\frac{E_1\sigma_0}{E} - \frac{E_2\sigma_0}{2E} - \frac{E_2\upsilon_0}{2a\rho}$$

Найдем решение в области VII. Здесь решается задача Коши. При $x = at-\left(a_2+a\right)2\upsilon_0\frac{\rho_2}{q}$ используется условие (39). При x=0 считаем, что σ_1=0, σ_2=- σ_0. Таким образом, в области *VII* решение системы уравнений (23) имеет вид:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = -\sigma_0$$

$$\upsilon = \frac{a_2\rho_2}{a\rho}\upsilon_0$$

при $x \le a_1t^*$

$$\sigma_1 = -\frac{E_2}{E}\frac{qa_1x}{a_1+a_2} - \frac{E_1}{E}\frac{qx}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{E_1}{E}\frac{qx}{2} + \frac{E_2}{E}\frac{qa_1x}{a_1+a_2} - \sigma_0 \qquad (40)$$

при $x > a_1t^*$

$$\sigma_1 = -\frac{E_2}{E}\frac{qa_1^2\left(\left(k-a_2\right)x - a_2x_0\right)}{k\left(a_1^2 - a_2^2\right)} - \frac{E_1}{E}\frac{qx}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{E_1}{E}\frac{qx}{2} + \frac{E_2}{E}\frac{qa_1^2\left(\left(k-a_2\right)x - a_2x_0\right)}{k\left(a_1^2 - a_2^2\right)} - \sigma_0.$$

Обсуждение результатов решения. Рассмотрев одиннадцать областей и найдя в них решения, мы нашли решения во всем рассматриваемом квадранте x⩾0, t⩾0. Качественные выводы из полученного решения задачи можно получить, рассмотрев зависимость $\upsilon(t,\ x=0)$ и $\sigma(x,t)$ при фиксированном t (рис. 7, 8а,б).

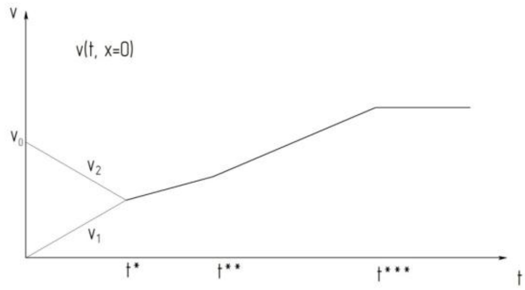


Рис. 7. Зависимость скорости от времени

До момента $t = t^*$ скорость υ_1 возрастает от нуля до некоторого значения υ^*, а скорость υ_2 убывает от некоторого значения υ_0 до того же значения υ^*. Затем скорость совместного движения стержней возрастает по линейному закону. В момент времени $t = t^{***}$ скорость принимает постоянное значение $\frac{a_2\rho_2\upsilon_0}{a\rho}\cdot$. В фиксированный момент времени t, такой что $t < t^*$, напряжение в первом стержне в области $0 \le x < a_1t$ убывает по линейному закону от нуля до некоторого значения, а затем при $a_1t \le x \le a_2t$ значение σ_1 возрастает по линейному закону до нуля.

При $x > a_2t$ значение σ_1 остается равным нулю. Во втором стержне напряжение возрастает от значения -σ_0 до некоторого значения σ_2 при $x = a_2t$, при $x > a_2t$ значение напряжения равно нулю. При $x = a_2t$ происходит скачек в значении напряжения для второго стержня, т.к. фронт $x = a_2t$ для него является ударным.

В фиксированный момент времени t, такой что $t > t^{***}$, напряжения в первом стержне убывают по линейному закону от нуля до некоторого значения σ_1 при $x = a_1t^*$ При $x > a_1t$ напряжение σ_1 возрастает до нуля по линейному закону и при значении напряжения в первом стержне остается равным нулю. Напряжение во втором стержне возрастает по линейному закону от значения $-\sigma_0$ до нуля при $x = at + 2\upsilon_0\frac{\rho_2}{q}\left(a_2 - a_1\right)$ и при $x > at + 2\upsilon_0\frac{\rho_2}{q}\left(a_2 - a_1\right)$ оно остается равным нулю.

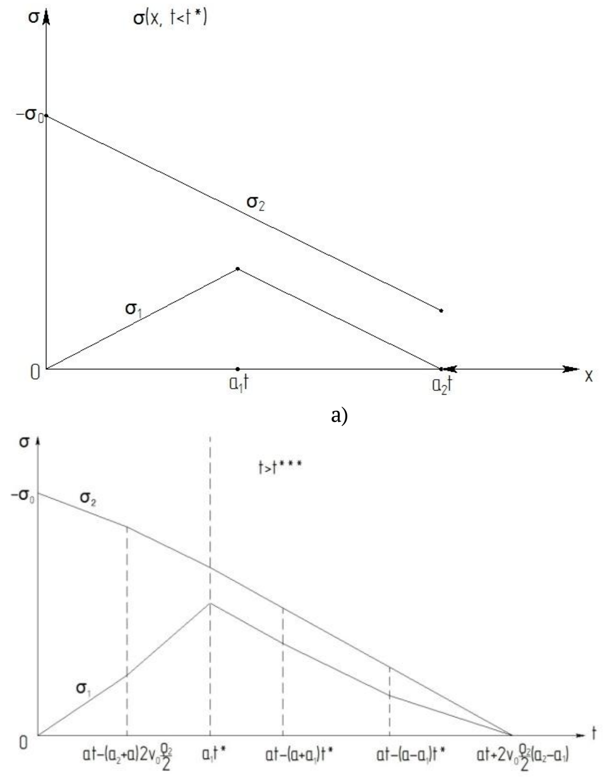


Рис. 8. Изменение напряжений:
а) от координаты, б) от времени

Вывод: из предложенного грофоаналитического решения задачи можно получить соотношения для напряжений и скоростей в составных стержнях и материалах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Сосенушкин, Е.Н.* Развитие систем пластического деформирования // Вестник МГТУ «Станкин». 2010. №1. С. 30-38.
2. *Grigor'ev, S.N.* Complex surface modification of carbide tool by Nb plus Hf plus Ti alloying followed by hard facing (Ti plus Al)N / *S.N. Grigor'ev, S.V. Fedorov, M.D. Pavlov* et al. // Journal of Friction and Wear. 2013. Т. 34, № 1. P. 14-18.
3. *Кобелев, А.Г.* Технология слоистых металлов / *А.Г. Кобелев, И.Н. Потапов, Е.В. Кузнецов*. – М.: Металлургия, 1991. 248 с.
4. *Ponomarev, A.S.* Effect of process features of pressure treatment on the microstructure and quality of parts of pipeline fittings from higt-strength cast iron / *A.S. Ponomarev, E.N. Sosenushkin, V.N. Klimov* // Metal Science and Heat Treatment. 2012. Т.54. №1-2. P. 22-27.
5. *Adaskin, A.M.* Use of the effect of stress relaxation for changing the shape of articles from nonplastic steels and alloys // Metal Science and Heat Treatment. 2012. Т. 54, № 1-2. Р. 47-51.
6. *Емельянов, В.В.* Технические требования и режимы прокатки биметаллических листов для изготовления из них изделий способом ротационной вытяжки / *В.В. Емельянов, Е.Н. Сосенушкин* // Заготовительные производства в машиностроении. №7. 2015. С. 39-42.
7. *Никитин, Л.В.* Динамика упругих стержней с внешним сухим трением // Успехи механики. 1988. Т. 11. Вып. 4. С .53-106.
8. *Никитин, Л.В.* Распространение волн в упругом стержне при наличии сухого трения // Инженерный журнал. МТТ, 1963. Т. 3. Вып. 1. С. 154-157.
9. *Никитин, Л.В.* Удар жестким телом по упругому стержню с внешним сухим трением // Инженерный журнал, МТТ, 1967. №2. С. 166-170.
10. *Nikitin, L.* Effects of dry friction оп the formation of seismic pulses / *L. Nikitin, A. Khamraev, E. Yanovskaya* // Physics of the Earth and Planetary Interiors, 50(1988) 26-31. Elsevier Science Publishers B.V. – Amsterdam (Printed in the Netherlands). – С. 21-38
11. *Елисеева, Ю.В.* Математическое моделирование процессов, явлений и структур в сложных системах / *Ю.В. Елисеева, О.А. Казаков, Л.А. Уварова* и др. // Вестник МГТУ «Станкин». 2008. №1. С.44-59.
12. *Уварова, Л.А.* Математическое моделирование процессов переноса электромагнитных волн в нелинейных средах / *Л.А. Уварова, К.А. Будный, Е.М. Красикова* // Вестник МГТУ «Станкин». 2010. №4. С. 110-115.
13. *Уварова, Л.А.* Моделирование переноса частиц в цилиндрических системах/ *Л.А. Уварова, Л.В. Плетнев* // Вестник МГТУ «Станкин». 2011. №4, С. 63-66.
14. *Яновская, Е.А.* К задаче о колебаниях мембраны, с сосредоточенными массами // Сб. «Численное моделирование в задачах механики». – М.: Изд-во Московского университета, 1991. С. 43-47.
15. *Яновская, Е.А.* Колебания мембраны под действием распределенных нагрузок // Сб. «Аналитические и экспериментальные методы в механике». - М.: Изд-во Московского университета, 1995. С. 66-70.
16. *Яновская, Е.А.* Колебания прямоугольной пластины под действием сосредоточенных нагрузок // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологичес-ких систем. Выпуск 10. – М.: Изд-во «Янус-К», 2007. С. 28-29.
17. *Дмитриев, А.М.* Разработка технологии производства корпуса гидроцилиндра из железного порошка / *А.М. Дмитриев, Н.В. Коробова, М.Д. Петров* // Вестник МГТУ «Станкин». 2014. №1(28). С. 54-58.
18. *Сосенушкин, Е.Н.* Технологические процессы производства изделий из порошковых матери-алов. Учебное пособие с грифом УМО АМ. – М.: МГТУ «СТАНКИН», 1995. 96 с.
19. *Сосенушкин, Е.Н.* Технологические процессы и оснастка для переработки пластмасс и порошков. Часть 2. Технологические процессы и оснастка для переработки порошковых материалов. Учебное пособие с грифом УМО АМ. – М.: МГТУ «Станкин», 2012. 173 с.
20. *Sosenushkin, E.N.* The Parameters of the Stress State in the Operations of Plastic Deformation / *E.N. Sosenushkin, V.A. Kadymov, E.A. Yanovskaya* et al. // Key Engineering Materials Submitted: 2015-09-16. ISSN: 1662-9795, Vol. 684, pp 57-66, doi:10.4028/www.scientific.net/KEM.684.57/Revised: 2015-11-13. Accepted: 2015-11-13. © 2016 Trans Tech Publications, Switzerland Online: 2016-02-18.
21. *Sosenushkin, E.N.* Stress state parameters of the plastic forming operations / *E.N. Sosenushkin, V.A. Kadymov, E.A. Yanovskaya* et al. // Materials of the IX International Research and Practice Conference on European Science and Technology. V2. December 24-25. 2014. Munich, Germany. P.451-459.
22. *Сосенушкин, Е.Н.* Исследование влияния дефекта структуры на эксплуатационные характеристики чугунных деталей / *Е.Н. Сосенушкин, Л.С.Фран-цузова* // Сб. научных трудов «Проблемы формирования и развития современного технологического общества». – Егорьевск: ЕТИ ГОУ МГТУ «СТАНКИН», 2005. С. 111-113.
23. *Котелкин, А.В.* Оценка технического состояния сварных соединений по уровню остаточных напряжений / *А.В. Котелкин, А.Д.Звонков, Е.Н. Сосенушкин* и др. // Заготовительные производства в машиностроении. 2015. №7. С. 10-14.
24. *Бушенин, Н.В.* Курс теоретической механики т. 2 / *Н.В. Бушенин, А.Л. Лунец, Д.Р. Меркин*. – М.: Наука, 1979. С. 50-53.
25. *Арсенин, В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984. 384 с.
26. *Владимиров, В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. 512 с.
27. *Елисеева, Ю.В.* Один метод вычисления собственных значений дискретных задач Штурма-Лиувилля высших

порядков / *Ю.В. Елисеева, А.А. Бондаренко* // Вестник МГТУ «Станкин».2011. №1. С. 95-102.
28. *Иванова, О.К.* Исследования в области фундаментальной и прикладной математики. Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье / *О.К. Иванова, А.В. Боголюбов, А.В. Зарелуа* и др. // Вестник МГТУ «СТАНКИН», 2008. №2. С.66-74.

DYNAMIC MODEL OF WAVES DISTRIBUTION FROM THE IMPACT IMPULSE IN THE COMPOUND CORE TAKING INTO ACCOUNT FRICTION

 E.A. Yanovskaya, E.N. Sosenushkin, O.K. Ivanova

MGTU «STANKIN», Moscow

In article dynamic process of momentary excitement of cores from composite materials is considered by impact impulses of a step form is considered. Two elastic cores interact among themselves under the law of dry friction after the annex of impact loading to more rigid core. As a result the speeds of interaction and stresses occurred in material of cores are defined.

Key words: *dynamic model, dry friction, elastic core, composite material, wave, speed, amplitude, stress*

Elena Yanovskaya, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor. E-mail: elena_yanovskaya@bk.ru
Evgeniy Sosenushkin, Doctor of Technical Sciences, Professor. E-mail: sen@stankin.ru
Oksana Ivanova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor. E-mail: oksivgor@mail.ru