УДК 621 : 519.24 : 519.65

ФОРМИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛА ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ МНОГОФАКТОРНОГО РЕЖИМА УПРОЧНЕНИЯ МЕТАЛЛОПОКРЫТИЙ

© 2016 С.В. Агафонов[1], А.В. Данеев[2], С.В. Лямин[2], В.А. Русанов[2]

[1] Иркутский государственный сельскохозяйственный университет
[2] Иркутский государственный университет путей сообщения

Статья поступила в редакцию 03.03.2016

Строится и исследуется нелинейная многомерная регрессионно-тензорная модель в обосновании (необходимые и достаточные условия) оптимального многофакторного физико-химического процесса упрочнения металлопокрытий. Предложена робастно-адаптивная стратегия рационального формирования целевого функционала физико-механического качества металлообработки. Результаты могут стать методологической основой для создания автоматизированного проектирования технологий упрочнения поверхностей сложных композитных металлоизделий на базе комплексных трибологических испытаний.
Ключевые слова: трибологические испытания, регрессионно-тензорная модель, упрочнение металлопокрытия.

Работа выполнена при финансировании Гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ (НШ-5007.2014.09).

ВВЕДЕНИЕ

В основе методов упрочнения рабочих поверхностей силовых машин лежат сложные физико-химические процессы (ФХП), в связи с чем по прежнему актуальны вопросы, связанные с формализацией/разработкой их математических моделей. В данном контексте востребованы регрессионные модели - линейные [1, 2] / нелинейные [2, 3], в том числе матричные [2, 4], где важный класс образуют регрессионно-тензорные системы [5,6]. Эти системы, с одной стороны, весьма близки по своим свойствам к полиноминальным [2], допуская достаточно детальное аналитическое описание на базе тензорного исчисления [7], сильной дифференцируемости векторных отображений [8, с. 480] и теории экстремальных задач [8, с. 499], а с другой, приобретают важную роль в нелинейном моделировании многофакторных трибологических свойств синтезируемых металлопокрытий, в частности, при прогностическом описании поверхностных нано-размерных структур [9, 10].

Ниже развиваются задачи, поставленные в выводах работы [6], при этом целью является не столько формальная точность умозаключений, а ясность концепций в разработке проблем трибологии [11]. В этом контексте решается вопрос формирования функционала физико-механических свойств металлопокрытий для режима упрочнения. Определяются строгие аналитические интерпретации многосвязных условий, определяющих оптимальный режим ФХП, налагаемых нелинейными ограничениями [12, 13] и обеспечивающих адекватность модели ФХП данным трибологических испытаний - многокритериальная идентификация по методу наименьших квадратов (МНК) координат ковариантных тензоров уравнения ФХП как многомерной нелинейной регрессии с минимальной тензорной нормой.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РЕГРЕССИОННО-ТЕНЗОРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ФХП

Пусть R – поле вещественных чисел, R^n – n-мерное векторное пространство над R с евклидовой нормой $\|\cdot\|_{R^n}$, $\mathrm{col}(y_1,\ldots,y_n) \in R^n$ - вектор-столбец с элементами $y_1,\ldots,y_n \in R$ и пусть $M_{n,m}(R)$ - пространство всех $n\times m$-матриц с элементами из R. Далее, через T_m^k обозначим пространство всех ковариантных тензоров k-ой валентности (вещественных полилинейных форм $f^{k,m}$: $R_1^m \times \ldots \times R_k^m \to R$) с тензорной нормой $\left\|f^{k,m}\right\|_T := \left(\sum t_{i\ldots j}^2\right)^{1/2}$, где $t_{i\ldots j}$ – коэффициенты (координаты [7, с. 61]) тензора $f^{k,m}$, значения которых заданы относительно

Русанов Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник. E-mail: v.rusanov@mail.ru
Данеев Алексей Васильевич, доктор технических наук, профессор. E-mail: daneev@mail.ru
Агафонов Сергей Викторович, кандидат технических наук, доцент. E-mail: agafonov38@rambler.ru
Лямин Сергей Васильевич, аспирант.

стандартного (естественного [14, с. 15]) ортонормированного базиса в евклидовом R^m.

Пусть $v \in R^m$ – вектор варьируемых физико-химических предикторов [2, с. 38] регрессии ФХП с фиксированным началом в $\omega \in R^m$ (опорный режим упрочнения), $w(\omega + v) \in R^n$ – вектор качественных показателей ФХП. В данной постановке выделим к рассмотрению многомерную нелинейную систему типа «вход-выход», описываемую векторно-тензорным k-валентным уравнением многофакторной регрессии

$$w(\omega+v) = col\left(\sum_{j=0,\dots,k} f_1^{j,m}(v,\dots,v),\dots,\sum_{j=0,\dots,k} f_n^{j,m}(v,\dots,v)\right) + \varepsilon(\omega,v), \quad (1)$$

где $f_i^{j,m} \in T_m^j$, вектор-функция e(w,×): $R^m \rightarrow R^n$ класса

$$\left\|\varepsilon(\omega,v)\right\|_{R^*} = o\left(\left(v_1^2 + \dots + v_m^2\right)^{k/2}\right), \quad (1')$$

$v = \mathrm{col}(v_1,\dots,v_m)$, $f_i^{0,m}$ $(1 \le i \le n)$ – инварианты, т.е. тензоры нулевой валентности [7, с. 62] (трибологические показатели качества [11, с. 5] ФХП в опорном режиме $\omega \in R^m$).

З а м е ч а н и е 1. Описание ФХП регрессионной системой (1) адекватно с учетом утверждения 2 [5] о непрерывной зависимости [8, с. 495] решения дифференциального уравнения ФХП [15] от начально-краевых условий и параметров.

Задача апостериорного регрессионно-тензорного моделирования оптимального ФХП поставлена и подробно исследована в [5, 6] для двухвалентной модели (1), при этом в [5] получены аналитические решения трех позиций данной задачи:

1) для фиксированного индекса k, заданного предиктора w$\in R^m$ и $V \subset R^m$ – открытой окрестности вектора w определены аналитические условия, при которых вектор-функция $w(\cdot)$: $V \rightarrow R^n$ показателей качества ФХП удовлетворяет системе (1);

2) построен алгоритм идентификации координат симметричных [16, с. 271] тензоров $f_i^{j,m}$, $1 \le i \le n$, $0 \le j \le k = 2$ в математической модели ФХП (1) на базе двухкритериальной МНК-задачи (2) (параметрическая МНК-идентификация многомерной регрессионно-тензорной системы (1) с минимальной тензорной нормой):

$$\begin{cases} \min\left(\sum_{i=1,\dots,q}\left(\left\|w_{(l)} - col\left(\sum_{j=0,\dots,k} f_1^{j,m}\left(v_{(l)},\dots,v_{(l)}\right),\dots,\sum_{j=0,\dots,k} f_n^{j,m}\left(v_{(l)},\dots,v_{(l)}\right)\right)\right\|_{R^x}\right)^2\right)^{1/2}, \\ \min\left(\sum_{i=1,\dots,n}\sum_{j=0,\dots,k}\left\|f_i^{j,m}\right\|_T^2\right)^{1/2}; \end{cases} \quad (2)$$

здесь $w_{(l)} \in R^n$, $v_{(l)} \in R^m$, $1 \le l \le q$ - векторы экспериментальных фактор-предикторов ФХП ($w_{(l)}$ – «реакция» на «вариацию» $v_{(l)}$ относительно координат вектора w$\in R^m$, при этом $\left\|v_{(l)}\right\|_{R^m} < 1$, что диктуется условием (1')), q - число трибологических экспериментов ФХП; в данной постановке возможен подход, изложенный в [17, 18];

3) для двухвалентной модели (1) при заданном векторе-предикторе w$\in R^m$ и $\varepsilon(\omega, v) \equiv 0$ получено аналитическое решение «v-оптимизации» квадратичной функции (см. определение 1 [16, с. 215]) варьируемых относительно w фактор-предикторов ФХП:

$$\begin{aligned} &\max\left\{F(v) : v \in R^m\right\}, \\ &F(v) := r_1 w_1(\omega+v) + \dots + r_n w_n(\omega+v), \end{aligned} \quad (3)$$

где вектор-функция $v \rightarrow \mathrm{col}(w_1(\omega+v),\dots,w_n(\omega+v)) = w(\omega+v) \in R^n$ имеет координатное представление согласно идентифицированной модели (1)-(2), $r_i > 0$ - весовые коэффициенты, отражающие «относительный приоритет» между трибологическими характеристиками w_i, $1 \le i \le n$ физико-механических свойств ФХП.

Постановка задачи (по материалам выводов работы [6]): определить *необходимые* условия в решении задачи (3) при $k = 3$ (поиск стационарных точек в (3) для трехвалентной модели (1)), дополнив поиском *достаточных* условий «v-оптимизации», т.е. обеспечение «эллиптического характера» критических точек функционала F через зависимость спектральных характеристик его гессиана [14, с. 465] от вариаций вектора $r := \mathrm{col}(r_1,\dots,r_n)$ относительно некоторого «начального» положения $r_0 \in R^n$.

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ФХП

Рассмотрим случай уравнений многомерной регрессии с тензорной структурой валентности $k = 3$; решение задачи (2) при $k = 3$ – несложная модификация доказательства утверждения 3 [5]. В такой постановке систему уравнений (1) можно подать в векторно-матрично-тензорной форме

$$\begin{aligned} w(\omega+v) = c + Av + \mathrm{col}(v'B_1v + f_1^{3,m}(v,\dots,v),\dots,v'B_nv+ \\ + f_n^{3,m}(v,\dots,v)) + \varepsilon(\omega,v), \end{aligned} \quad (4)$$

$c \in R^n$, $A \in M_{n,m}(R)$, $B_i \in M_{m,m}(R)$, $i=1,\dots,n$ (при этом считаем, что каждая B_i – верхняя треугольная матрица), здесь и далее верхний индекс-штрих «'» – операция транспонирования вектора или матрицы, вектор-функция $\varepsilon(\omega,\times)$: $R^m \rightarrow R^n$ удовлетворяет (согласно утверждения 2 [5]) оценке

$$\left\|\varepsilon(w,v)\right\|_{R^x} = o\left(\left(v_1^2 + \dots + v_m^2\right)^{3/2}\right).$$

При $k = 3$ целевой функционал F: $R^m \rightarrow R$ дважды непрерывно дифференцируемый (что гарантирует равенство смешанных производных $\partial^2 F(v_1,\dots,v_m)/\partial v_g \partial v_p$, $\forall\, g, p = 1,\dots,m$), поэтому в решении задачи (3) основным результатом в согласно теоремы 3 [8, с. 505] (см. уточнения в [16, с. 160] и теореме 7.2.5. [14, с. 479]) для трехвалентной модели (4) можно считать следующее предложение.

У т в е р ж д е н и е 1. *Пусть* $B_i^* := (B_i + B_i') \in M_{m,m}(R)$, $1 \le i \le n$, *где каждая* B_i *– матрица системы* (4) *и, сверх того, рассмотрим вектор-функцию*

$$\Phi(v) := (r_1 B_1^* + \ldots + r_n B_n^*)^{-1}(A' + $$
$$+[\nabla_v f_1^{3,m}(v,\ldots,v),\ldots,\nabla_v f_n^{3,m}(v,\ldots,v)])r.$$

Тогда стационарные точки $v^* \in R^m$ *задачи* (3) *суть решения уравнения*

$$v^* + \Phi(v^*) = 0, \qquad (5)$$

при этом достаточным условием, что точка v^* *пространства фактор-предикторов обеспечивает «максимальное качество ФХП» вида*

$$\max\{F(v): v \in R^m\},$$
$$F(v) := r'w(\omega + v)$$

является требование: v^* *как критическая точка функционала* $F(v)$ *должна иметь специальный эллиптический тип, – это в точности тоже самое, что сказать*

$$\det [b_{ij}]_p < 0,\ p=1,\ldots,m, \qquad (6)$$

где $[b_{ij}]_p \in M_{p,p}(R)$, $p=1,\ldots,m$ *– главные подматрицы гессиана* $G(r)$ *в точке* $v^* \in R^m$

$$G(r) = (r_1(B_1^* +$$
$$+2\sum_{1\le g,p\le m} [\partial^2 f_1^{3,m}(v,\ldots,v)/\partial v_g \partial v_p ½\ v^*\ ]) +\ldots+$$
$$+\ r_n(B_n^* + 2[\partial^2 f_n^{3,m}(v,\ldots,v)/\partial v_g \partial v_p ½\ v^*\ ])\ \in$$
$$\in M_{m,m}(R),$$

или эквивалентно-характеристические числа λ_p *матрицы* $G(r)$ *удовлетворяют*

$$\lambda_p < 0,\ p=1,\ldots,m. \qquad (7)$$

С л е д с т в и е 1. *При* $k = 2$ *гессиан* $G(r)$ *функционала* $F(v)$ *инвариантен к положению критической точки и равен*

$$G(r) = r_1 B_1^* + \ldots + r_n B_n^*,$$

при этом, если $\operatorname{rank} G(r) = m$, *то решение уравнения* (5) *единственно и имеет вид*

$$v^* = -G^{-1}(r)\, A'r.$$

Ясно, что (5) - пересечение m квадрик [16, с. 219], поэтому если (6), равносильно (7), не выполняются, то критическая/кие точка/и (5) является гиперболической (седловой). Таким образом, наличие седловой точки гарантирует смена хотя бы в одном (не во всех) неравенстве «<» из (6) или (7) на «>» (см., например, (16) [6]); смена неравенства «<» на рефлексивное «$\le$» вызывает в v^* структуру стационарной параболической точки функционала (v), при этом $\operatorname{rank} G(r) < m$, следовательно, необходим дополнительный анализ (5). В таком положении для обеспечения эллиптического характера (6) требуется параметрическая коррекция функционала (3).

Ясно, что одним из факторов, влияющих на геометрию $F(\cdot)$ в критической точке v^*, является координатная настройка вектора r, что определяет для (3) постановку «адаптивной коррекции» $r \to r'w(\omega + v)$, анализ которой проведем ниже.

АДАПТАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА КАЧЕСТВА ФХП НА АФФИННОМ СЕМЕЙСТВЕ ЕГО ГЕССИАНОВ

В этом разделе рассмотрим задачу: на базе регрессионно-тензорной модели (4) построить численную процедуру выбора вектора весовых коэффициентов $r \in R^n$, обеспечивающего эллиптический характер фиксированной стационарной точки v^* (некоторое решение уравнения (5)) целевого функционала $F(v) = r'w(\omega + v)$, исходя из выполнения алгебраических (спектральных) условий (7).

З а м е ч а н и е 2. Не смотря на алгебраическую эквивалентность (6) ~ (7), попытка использовать в построении адаптивной коррекции $r \to r'w(\omega + v)$ разложение определителей (6) почти неизбежно обречена на неудачу вследствие большого количества членов, присутствующих в таком разложении.

Необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (3) удается получить лишь в исключительных случаях; общая задача в подобных постановках, как правило, оказывается *NP*-сложной. Ниже для функционала $F(\cdot)$ обсудим подход к этой проблеме, основанный на идеях теории локализации и возмущений собственных значений матрицы [14, с. 408]. Другим плодотворным инструментом представляется трансформация условий (7) к так называемой проблеме квадратичной устойчивости, обычно сводящейся к построению функции Ляпунова в аффинном семействе матриц [19, с. 199] в предположении, что само это семейство функционально (благодаря второй формуле из (3)) зависит от координат вектора $r \in R^n$.

Пусть задан начальный вектор $r_0 \in R^n$ весовых коэффициентов из (3). Например, целенаправленный выбор вектора r_0 может осуществляться, исходя из равенства его координат r_{0i}, $1 \le i \le n$ значениям некоторых (заданных) функций $\Upsilon_i: R \to R$ от функционалов $J_i(v) := w_i(\mathrm{w} + v)$, $i=1,\ldots,n$ в «вспомогательных задачах» прогнозирования качества ФХП по отдельным показателям w_i, $1 \le i \le n$; согласно следствия 2 [5] при двухвалентной модели регрессии (1) это положение характеризует:

У т в е р ж д е н и е 2. *Если* $k = 2$, *то вектор начальных весовых коэффициентов* $r_0 = \mathrm{col}(r_{01},\ldots,r_{0n})$ *с координатами*

$$r_{0i} = \Psi_i(z_i),\ z_i = \max\{J_i(v): v \in R^m\},\ 1 \le i \le n,$$

имеет аналитическое представление

$$r_0 = \mathrm{col}(\Psi_1(c_1 - e_1' A\, B_1^{*-1} A' e_1/2),\ldots,\Psi_n(c_n -$$
$$- e_n' A\, B_n^{*-1} A' e_n/2)).$$

З а м е ч а н и е 3. Фраза «*Если* $k = 2$» не является ключевой, поскольку данная конструкция вектора r_0 может быть также использована и при трехвалентной (относительно предикторов) форме регрессионно-тензорной модели (4); ясно, что при этом r_0 можно «корректировать» из условия нормировки $\|r_0\|_{R^n}=1$.

Далее, обозначим через $v^0\in R^m$ некоторую критическую точку функционала $F(\cdot)$ (фиксированное решение уравнения (5)) в положении, когда $r=r_0$, через $G_0\in M_{m,m}(R)$ - гессиан функционала $F(\cdot)$ вычисленный в точке v^0, и пусть

$$G_i := B_i^* + 2\sum_{1\le g,p\le m}\left[\left.\frac{\partial^2 f_i^{3,m}(v,\ldots,v)}{\partial v_g \partial v_p}\right|_{v^0}\right], 1\le i\le n.$$

Тогда при варьировании вектора r согласно представления

$$r_i = r_{0i} + \Delta r_i > 0,\ 1\le i\le n$$

параметрическое семейство гессианов $G(r)$ из утверждения 1, определяется аффинным матричным многообразием вида

$$G(r)=\left(G_0+\sum_{i=1,\ldots,n}\Delta r_i G_i\right)\in M_{m,m}(R); \qquad (8)$$

гессианы (8) при любых $r_0+\Delta r\in R^n$ суть симметричные матрицы [14, с. 200].

В случае произвольной матрицы единственное описание её собственных значений состоит в том, что это решения её характеристического уравнения. Для гессиана $G(r)$ собственные значения можно, посредством теоремы Куранта - Фишера [14, с. 215], также охарактеризовать как ряда задач оптимизации. В круге приложений теоремы Куранта - Фишера рассуждения теоремы Вейля [14, с. 218], о связях между собственными значениями гессиана G_0 и любого гессиана из многообразия

$G_0 + S_{1\le i\le n}\Delta r_i G_i$,

позволяют отчасти прояснить «вариационный» смысл проводимых ниже робастно-адаптивных построений в коррекции $r\to r'w(\omega+v)$. С учетом введенных выше конструкций потенциал робастно-адаптив-ной настройки функционала $F(v)=r'w(\omega+v)$, обеспечивающего (при варьировании $r\in R^n$) в критической точке неравенства (7), содержит утверждение 3; модификация теоремы 6.3.12 [14, с. 444] на базе теоремы 4.1.3 [14, с. 204], учитывающей симметрическую структуру гессианов (8).

Утверждение 3. *Пусть* $\{(l_p(r_0), x_p): p=1, \ldots, m\}\subset R'R^m$ *- собственные пары гессиана* G_0 *и* $g_{pi} = x_p¢G_i x_p/x_p¢x_p$. *Тогда характеристические числа* $\{l_p(r): p=1,\ldots,m\}\subset R$, *гессиана* $G(r)$, *где* $r=r_0+\mathrm{D}r$, *имеют вид*

$$\lambda_1(r)=\lambda_1(r_0)+\sum_{i=1,\ldots,n} g_{1i}\mathrm{D}r_i + o(\|\Delta r\|_{R^n}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (9)$$
$$\lambda_m(r)=\lambda_m(r_0)+\sum_{i=1,\ldots,n} g_{mi}\mathrm{D}r_i + o(\|\Delta r\|_{R^n}).$$

Система (9) представляет возможность оценить, насколько чувствительны собственные числа гессианов (8) к изменению весовых коэффициентов Δr_i, $1\le i\le n$; разумеется, этот анализ приближенный (справедлив при небольших $\|\Delta r\|_{R^n}$; см. также формулы теории возмущений [16, с. 152]), что с учетом следствия 1 отражает:

Следствие 2. *Если* $k=2$, $n=m$, $\Lambda(r_0):=\mathrm{col}(\lambda_1(r_0),\ldots,\lambda_m(r_0))$ *– вектор собственных значений матрицы-гессиана* $(r_{01}B_1^*+\ldots+r_{0m}B_m^*)$ *и* $\{x_p\}_{p=1,\ldots,m}$ *- соответствующие им собственные векторы,* $\Lambda^*:=\mathrm{col}(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*)$ *– вектор эталонных по критерию* (7) *характеристических чисел гессиана* $G(r)$, $B:=[b_{pi}]$ *–* $m\times m$*-матрица с элементами* $b_{pi}=x_p{}'B_i^*x_p/x_p{}'x_p$, *то при* $r=r_0+\Delta r$ *и* $r_{0i}+\Delta r_i>0$, $1\le i\le m$, *где* $\Delta r = B^{-1}(\Lambda^*-\Lambda(r_0))$, *можно ожидать, что собственные значения у* $G(r)$ *равны эталонным* $\{\lambda_P^*: p=1,\ldots,m\}$.

Замечание 4. Поскольку при $n=m$ система уравнений (9) справедлива для малых значений $\|\Delta r\|_{R^m}$, то остается открытым вопрос: будет ли сходиться итерационный вычислительный процесс

$$r_j=(r_{j-1}+\Delta r_{j-1})\in R^m,\ j=1,2,\ldots$$

построенный в силу следствий 1, 2 из расчета $\Delta r_{j-1} = B^{-1}(\Lambda^*-\Lambda(r_{j-1}))$, если начальное расхождение $\|\Lambda^*-\Lambda(r_0)\|_{R^m}$ значительно?; ясно, что согласно структуры функционала (3) на каждом итерационном шаге «j» для координат вектора $r_j\in R^m$ необходима проверка условий $r_{ij}>0$, $1\le i\le m$.

В контексте замечания 4 приведем результат вычисления верхней оценки для относительного возмущения $\|\Delta r\|_{R^m}$. Пусть $\|\cdot\|_M$ – матричная норма в $M_{m,m}(R)$, согласованная [20, с. 181] с $\|\cdot\|_{R^m}$, причем $\|E\|_M=1$, где $E\in M_{m,m}(R)$ – единичная матрица; например [20, с. 179], фробениусова матричная норма

$$\|D\|_F := \left(m^{-1}\sum d_j^2\right)^{1/2}, D=[d_j]\in M_{m,m}(R),$$

или [20, с. 186] спектральная (индуцированная) матричная норма

$$\|D\|_S := \sup\{\|D_x\|_{R^m} : x\in R^m, \|x\|_{R^m}=1\} = \max_{1\le i\le m}\lambda_i^{1/2}(D'D).$$

Итак, возвращаясь к следствию 2, имеем (согласно прототипа – системе (9)):

$$B\,\Delta r = \Lambda^*-\Lambda(r_0)$$

с $\det B\neq 0$. Предположим, что вектор $\Lambda^*-\Lambda(r_0)$ переходит в $\Lambda^*-\Lambda(r_0)+\delta$ (в частности, за счет слагаемого $o(\|\Delta r\|_{R^m})$ из системы (9)), а матрица B переходит в $B+D$. В такой постановке вектор адаптивной настройки Δr получит (в силу модификации следствия 2) приращение θ, переходя к значению $\Delta r+\theta$, которое удовлетворяет линейному алгебраическому уравнению:

$$(B+D)(\Delta r+\theta)=\Lambda^*-\Lambda(r_0)+\delta;$$

ясно, что $\delta\in R^m$, $\Delta\in M_{m,m}(R)$ моделируют возмущения «желаемого изменения» вектора собственных чисел $\Lambda^*-\Lambda(r_0)$, а также неточность параметрической оценки матрицы B (заметим, если $\|D\|_M\|B^{-1}\|_M<1$, то $\|D\|_M<\|B\|_M$ [20, с. 197]). Результат вычисления верхней оценки относительного возмущения $\|\theta\|_{R^m}/\|\Delta r\|_{R^m}$ формулирует следствие 3 (технические детали см. в [20, с. 197]).

Следствие 3. *Пусть, в дополнение к предпо-*

ложениям следствия 2, $s(B) := = ||B||_M ||B^{-1}||_M$ *– условное число* [20, с. 197] *матрицы B, где* $||\cdot||_M$ *– матричная норма* $||\cdot||_F$ *или* $||\cdot||_S$*. Тогда справедлива оценка*

$$||\theta||_{R^m}/||\Delta r||_{R^m} \le s(B)(1 - s(B)||D||_M/||B||_M)$$
$$(||\delta||_{R^m}/||\Lambda^* - \Lambda(r_0)||_{R^m} + ||D||_M/||B||_M).$$

Если $||\cdot||_M = ||\cdot||_S$ *и* λ_1, λ_m *– наименьшее и наибольшее собственные значения B'B, то в последнем неравенстве можно считать* $s(B) = (\lambda_m/\lambda_1)^{1/2}$.

З а м е ч а н и е 5. Конструкция спектрального условного числа $s(B) = (l_m/l_1)^{1/2}$ (условное число, полученное с использованием спектральной нормы $||\cdot||_S$) прозрачна в силу $s(B) = ||B||_S ||B^{-1}||_S$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью статьи было указать на естественную связь, существующую между проблемой определения области значений матричной функции-гессиана в критической точке целевого функционала физико-механического качества (3) процесса упрочнения металлопокрытия, выраженного уравнением (1), и вектором r весовых коэффициентов в (3), отражающих «приоритет» между w_i, $1 \le i \le n$ - моделируемыми трибологическими свойствами ФХП. В данном контексте утверждение 1 и следствие 1 показывают, что в отличие от трехвалентной ($k = 3$) в двухвалентной ($k = 2$) модели нелинейной регрессии ФХП гессиан $G(r)$ инвариантен к положению критической точки. При этом оба варианта ($2 = k = 3$) позволяют выявить зависимость $r \to G(r)$ на базе модели ФХП (1), идентифицированной по критерию (2).

Собственные значения матрицы – это в точности корни её характеристического полинома, поэтому результат утверждения 3 по существу основан на том, что собственные значения (7) непрерывно r-зависят от элементов матрицы-гессиана $G(r)$ в процессе текущей параметрической коррекции целевого функционала F из (3). Однако следует заметить, что некоторая информация утрачивается, когда имеем дело лишь с характеристическим многочленом, ибо существует много различных матриц с заданным характеристическим полиномом. Поэтому не удивительно, что более сильные результаты по моделированию спектра гессиана $G(r)$, в частности, утверждение 3 и следствие 2 учитывают строение матрицы $G(r)$; последние допускают техническое упрощение, исходя из положения, что любая матрица-гессиан ортогонально подобна вещественной диагональной матрице [19, с. 73].

Численные методы отыскания собственных значений и собственных векторов представляют собой один из наиболее важных разделов общей теории матриц. В статье не затрагивалось каких-либо сторон этой темы при анализе вектора Λ^*-$\Lambda(r_0)$ и матрицы B из следствия 2, но следствие 3 дает верхнюю оценку для относительного возмущения Δr через относительные возмущения Λ^*-$\Lambda(r_0)$ и B и условное число $s(B)$; $s(B)$ участвует в оценке во всех случаях, будут ли возмущения происходить только в Λ^*-$\Lambda(r_0)$, только в B или в Λ^*-$\Lambda(r_0)$ и B одновременно.

В завершение обозначим другой подход в адаптивной коррекции $r \to r'w(\omega + v)$, связанный с использованием достаточных условий робастной *устойчивости* матрицы $G(r)$ (что тоже равносильно условиям (6), (7)). В данном контексте можно потребовать, чтобы в семействе $G_0 + \Sigma_{1 \le i \le n} \mathrm{D}r_i G_i$ при интервальных допусках на изменение координат вектора Δr можно было построить функцию Ляпунова $V(x) = x_p'Px_p$, где $P \in M_{m,m}(R)$ – симметричная положительно-определенная матрица; т.е. существовала матрица $P > 0$, для которой матричное уравнение Ляпунова $G(r)P + PG(r) = Q$ имело решение при заданной симметричной положительно-определенной матрице $Q \in M_{m,m}(R)$; переход к адаптивно-робастной квадратичной устойчивости и методы её решения предложены в [21-24]. Эта теория, благодаря обилию имеющихся в ней вычислительных задач, а также вследствие блестящих возможностей, которые она открывает для приложений многомерного регрессионно-тензорного анализа, может приобрести теперь большое самостоятельное прикладное значение в задачах синтеза оптимальных металлопокрытий. Сделать это в краткой статье, разумеется, не представляется возможным, и мы с легким сердцем отказываемся от этого, будучи уверены, что детальные исследования этого вопроса не замедлит последовать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stapleton J.H.* Linear Statistical Models. New York: Wiley, 1995. 467 p.
2. *Дрейпер Н.Р., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2007. 912 с.
3. *Ross G.J.* Nonlinear Estimation. New York: Springer-Verlag, 1990. 237 p.
4. *Rusanov V.A., Agafonov S.V., Daneev A.V., Lyamin S.V.* Computer modeling of optimal technology in materials engineering // Lecture Notes in Electrical Engineering. 2014. Vol. 307, pp. 279-286.
5. *Русанов В.А., Агафонов С.В., Думнов С.Н., Рудых А.Г.* Регрессионно-тензорное моделирование многофакторной оптимизации процесса низкотемпературного сульфохромирования. I // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2012. № 1. С. 17-30.
6. *Русанов В.А., Агафонов С.В., Думнов С.Н., Рудых А.Г.* Регрессионно-тензорное моделирование многофакторной оптимизации процесса низкотемпературного сульфохромирования. II // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2012. № 4. С. 62-72.
7. *Акивис М.А., Гольдберг В.В.* Тензорное исчисление. М.: Наука, 1972. 352 с.
8. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.

9. *Хомич В.Ю., Шмаков В.А.* Образование периодических наноразмерных структур на поверхности твердых тел при фазовых и структурных превращениях // Доклады РАН. 2012. Т. 446. № 3. С. 276-278.
10. *Герасимов С.А., Куксенова Л.И., Лаптева В.Г. и др.* Повышение характеристик механических свойств теплостойких сталей методом активизации процесса азотирования // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 2. С. 90-96.
11. *Труханов В.М.* Прогнозирование ресурса деталей, узлов, механизмов и технического объекта в целом на стадии проектирования // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. № 3. С. 38-42.
12. *Яковлев Н.Н., Лукашев Е.А., Радкевич Е.В.* Исследование процесса направленной кристаллизации методом математической реконструкции // Доклады РАН. 2012. Т. 445. № 4. С. 398-401.
13. *Гилев В.Г., Безматерных Н.В., Морозов Е.А.* Исследование микроструктуры и микротвердости псевдосплава сталь - медь после лазерной термической обработки // Металловедение и термическая обработка металлов. 2014. № 5. С. 34-39.
14. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 656 с.
15. *Kärger J., Grinberg F., Heitjans P.* Diffusion fundamentals. Leipzig: Leipziger Univ., 2005. 615 p.
16. *Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986. 304 с.
17. *Статников Р.Б., Матусов И.Б.* О решении задач многокритериальной идентификации и доводки опытных образцов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. № 5. С. 20-29.
18. *Сарычев А.П.* Моделирование в классе систем регрессионных уравнений на основе метода группового учета аргументов // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». 2013. № 2. С. 8-24.
19. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 304 с.
20. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982. 270 с.
21. *Ackerman J.* Robust control: systems with uncertain physical parameters. New York: Springer-Verlag, 1993. 404 p.
22. *Boyd S.L., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear matrix inequalities in systems and control theory. Philadelphia: SIAM, 1994. 193 p.
23. *Kreinovich V., Lakeyev A.V., Rohn J., Kahl P.* Computational complexity and feasibility of data processing and interval computational. Dordrecht: Kluwer. 1998. 472 p.
24. *Calafiore G., Polyac B.T.* Stochastic algorithms for exact and approximate feasibility of robust LMIs // IEEE Trans. Autom. Control. 2001. V. 46. No 11. P. 1755-1759.

FORMATION OF FUNCTIONAL OF OPTIMIZATION PARAMETERS OF THE MULTIPLE-FACTOR MODE HARDENINGS OF METAL COATINGS

© 2016 S.V. Agafonov[1], A.V. Daneev[2], S.V. Lyamin[2], V.A. Rusanov[2]

[1] Irkutsk State Agricultural University
[2] Irkutsk State Transport University

The nonlinear multidimensional regression and tensor model in justification (necessary and sufficient conditions) of optimum multiple-factor physical and chemical process of hardening of metal coatings is under construction and investigated. Robast-adaptive strategy of rational formation of target functional of physics-mechanical quality of metal working is offered. Results can become a methodological basis for creation of the automated design of technologies of hardening of surfaces of difficult composite hardware on the basis of complex the tribological tests.

Key words: tribological tests, regression and tensor model, hardening of a metal coating.

Vyacheslav Rusanov, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Research Fellow. E-mail: v.rusanov@mail.ru
Aleksei Daneev, Doctor of Technics, Professor. E-mail: daneev@mail.ru
Sergei Agafonov, Candidate of Technics.
Sergei Lyamin, Graduated Student.