

УДК 621.398

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕАВТОНОМНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

© 2016 О.М. Державин, Е.Ю. Сидорова

Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва

Статья поступила в редакцию 01.11.2016

Рассматривается вопрос понижения порядка сингулярно возмущенной модели описания нелинейной динамической системы на основе теоремы Тихонова о предельном переходе. Показывается возможность проверки условий теоремы путем линеаризации в решении вырожденной системы уравнения для быстрых переменных, что упрощает практическое использование теоремы.

Ключевые слова: *сингулярно возмущенная модель, динамическая система, теорема Тихонова, линеаризованная модель*

Сингулярно возмущенные модели описания динамических систем возникают довольно часто в задачах автоматического управления [1]. Причиной этого может быть наличие в системе малых параметров, учет которых увеличивает порядок модели. Кроме того, сингулярные возмущения могут вводиться искусственно с целью получения систем управления, обладающих определенными свойствами. Наиболее изучены сингулярно возмущенные модели, имеющие вид систем дифференциальных уравнений с малыми параметрами при части производных (что соответствует наличию малых параметров при старших производных у моделей «вход-выход»). При обращении указанных малых параметров в нуль порядок модели понижается и, если выполнены определенные условия, то упрощенная модель может использоваться вместо исходной. Это определяет особый интерес исследователей к сингулярно возмущенным моделям. Математическим обоснованием возможности такого упрощения модели является теория сингулярных возмущений, разработанная для дифференциальных уравнений. Основоположителем данной теории А.Н. Тихоновым доказаны теоремы, устанавливающие достаточные условия близости решений сингулярно возмущенной и вырожденной (пониженного порядка) систем дифференциальных уравнений. К ним, в первую очередь, относится теорема о предельном переходе [2]. Однако применение этих результатов на практике сопряжено с рядом трудностей, одной из которых является сложность проверки условий теоремы для моделей нелинейных систем. В работах [3-5] предложен подход, позволяющий устранить указанную трудность. Суть данного подхода

заключается в сведении проверки условий теоремы Тихонова для модели нелинейной динамической системы к проверке аналогичных условий для ее линеаризованной модели. При этом задача решалась путем линеаризации всей исходной системы.

В настоящей работе предлагается альтернативный способ решения задачи путем линеаризации только одной подсистемы уравнений с малыми параметрами при производных (т.е. уравнений для так называемых «быстрых» переменных). Это расширяет возможности применения теоремы о предельном переходе при решении практических задач.

Условия теоремы о предельном переходе. Рассмотрим вначале подробнее условия теоремы Тихонова о предельном переходе. Пусть имеется сингулярно возмущенная модель описания процессов в нелинейной неавтономной динамической системе. Рассмотрим задачу Коши для нее:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}}{dt} = f(\bar{y}, \bar{z}, t), \\ \mu \frac{d\bar{z}}{dt} = F(\bar{y}, \bar{z}, t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

при $\bar{y}(0) = \bar{y}_0, \bar{z}(0) = \bar{z}_0, \quad (2)$

где $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$, $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ – векторы n -мерного пространства, $\bar{z} = (z_1, \dots, z_m)^T$, $F = (F_1, \dots, F_m)^T$ – векторы m -мерного пространства, $\mu > 0$ – малый параметр.

Система уравнений (1) при заданных начальных условиях (2) соответствует модели процесса в динамической системе. Порядок этой модели k , он равен $k = n + m$. Если положить в (1) $\mu = 0$, то получим вырожденную модель:

Державин Отто Михайлович, доктор технических наук, профессор. E-mail: derzhavinom@mpei.ru
Сидорова Елена Юрьевна, старший преподаватель. E-mail: e.y.sidorova@gmail.com

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}}{dt} = f(\bar{y}, \bar{z}, t), \\ 0 = F(\bar{y}, \bar{z}, t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (3)$$

при $\bar{y}(0) = \bar{y}_0$. (4)

Порядок системы уравнений (3) равен n , поскольку m векторных уравнений $F(\bar{y}, \bar{z}, t) = 0$ не являются дифференциальными. Поэтому для решения задачи Коши здесь задаются лишь n начальными условиями для переменных $y_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$), совпадающих с начальными значениями из (2). Приведем формулировку теоремы Тихонова о предельном переходе [2], которая устанавливает достаточные условия близости при $\mu \rightarrow 0$ решения исходной задачи (1), (2) к определенному решению вырожденной задачи (3), (4) (причем для $\bar{z}$ это справедливо вне малой окрестности начальной точки).

Теорема. Решение полной системы (1), (2) стремится при $\mu \rightarrow 0$ к решению вырожденной системы, если:

1) корень $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$ является устойчивым корнем присоединенной системы;

2) начальные значения $\bar{z}_0$ входят в область влияния корня $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$ при начальных значениях $\bar{y}_0, t_0 = 0$.

(Изучаемое предельное равенство имеет место для всех t , для которых решение присоединенной системы лежит внутри области устойчивости D корня $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$.) Поясним смысл условий теоремы, следуя работам [2, 6]. Пусть $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$ – одно из решений (корней) системы уравнений $F(\bar{y}, \bar{z}, t) = 0$, определенное в замкнутой ограниченной области D пространства $(\bar{y}, t)$. Корень $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$ является *изолированным*, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что система уравнений $F(\bar{y}, \bar{z}, t) = 0$ не имеет решений, отличных от $\varphi(\bar{y}, t)$ для $\|\bar{z} - \varphi(\bar{y}, t)\| < \varepsilon$.

Присоединенная система определяется системой уравнений

$$\frac{d\bar{z}}{d\tau} = F(\bar{y}, \bar{z}, t), \quad (5)$$

в которой независимой переменной является новая переменная $\tau = t/\mu$, а $\bar{y}$ и t рассматриваются как параметры (чтобы подчеркнуть это над $\bar{z}$ пишется знак «~»). Очевидно, что корень $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$ системы уравнений $F(\bar{y}, \bar{z}, t) = 0$

является *точкой покоя* присоединенной системы (5).

Изолированный корень $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$ является *устойчивым корнем* в некоторой ограниченной замкнутой области D пространства $(\bar{y}, t)$, если для всех точек $(\bar{y}, t) \in D$ точки $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$ являются асимптотически устойчивыми по Ляпунову точками покоя присоединенной системы (5). При этом под *областью влияния* изолированного корня $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$ при заданных значениях $\bar{y}_0, t_0 = 0$ (т.е. при начальных значениях параметров $\bar{y}, t$) понимается совокупность таких точек $\bar{z}_0$, для которых решения $\bar{z}(\tau)$ присоединенной системы $\frac{d\bar{z}}{d\tau} = F(\bar{y}_0, \bar{z}, 0)$ с начальными условиями $\bar{z}(\tau) = \bar{z}_0$ стремятся при $\tau \rightarrow \infty$ к $\varphi(\bar{y}_0, 0)$.

Как отмечалось выше, прикладной смысл теоремы Тихонова заключается в обосновании возможности понижения порядка сингулярно возмущенной модели процесса в динамической системе. При этом погрешность решения является величиной порядка μ .

Декомпозиция сингулярно возмущенной модели нелинейной динамической системы на основе уравнений первого приближения. Следуя [2], будем предполагать, что все входящие в рассмотрение функции непрерывны и все дифференциальные уравнения имеют однозначно определенные решения, и, кроме того, что функция $\varphi(\bar{y}, t)$ имеет ограниченные частные производные по всем переменным.

Введем в рассмотрение линеаризованную присоединенную систему. Для этого положим в (1) малый параметр μ равным нулю. Будем предполагать, что система уравнений $F(\bar{y}, \bar{z}, t) = 0$ разрешима относительно $\bar{z}$ и пусть $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$ – один из ее корней. Подставим этот корень в остальные уравнения системы (1) и найдем соответствующее ему решение вырожденной системы (3) при начальных условиях (4): $\bar{y}(t), \bar{z}(t) = \varphi(\bar{y}(t), t)$. Знак «~» над переменными указывает на то, что решение является приближенным.

Линеаризуем уравнение $\mu \frac{d\bar{z}}{dt} = F(\bar{y}, \bar{z}, t)$ в окрестности решения вырожденной системы на отрезке $t_1 \leq t \leq T$ (где t_1 – величина порядка μ , т.е. линеаризация осуществляется вне малой окрестности начальной точки $\bar{z}_0$ – это связано с тем, что при переходе к вырожденной системе

начальное условие $\bar{z}_0$ отбрасывается). Полученное уравнение первого приближения будет иметь вид:

$$\mu \frac{d\Delta\bar{z}}{dt} = \left. \frac{\partial F(\bar{y}, \bar{z}, t)}{\partial \bar{y}} \right|_L \cdot \Delta\bar{y} + \left. \frac{\partial F(\bar{y}, \bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} \right|_L \cdot \Delta\bar{z} - \mu \left(\frac{\partial \varphi(\bar{y}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(\bar{y}, t)}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{d\bar{y}}{dt} \right), \quad (6)$$

где $L = L(t) =$

$= \{(\bar{y}, \bar{z}, t) : \bar{y} = \bar{y}(t); \bar{z} = \varphi(\bar{y}, t); t_1 \leq t \leq T\}$ – кривая, соответствующая решению вырожденной системы;

$$\Delta\bar{y} = \bar{y} - \bar{\bar{y}}, \quad \Delta\bar{z} = \bar{z} - \bar{\bar{z}} = \bar{z} - \varphi(\bar{\bar{y}}, t);$$

$$\left. \frac{\partial F(\bar{y}, \bar{z}, t)}{\partial \bar{y}} \right|_L = \left[\frac{\partial F_i(\bar{y}, \bar{z}, t)}{\partial y_k} \right]_{k=1, \bar{n}}^{i=1, \bar{m}},$$

$$\left. \frac{\partial F(\bar{y}, \bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} \right|_L = \left[\frac{\partial F_i(\bar{y}, \bar{z}, t)}{\partial z_j} \right]_{j=1, \bar{m}}^{i=1, \bar{m}},$$

(коэффициенты матриц зависят от времени, а также от выбора корня φ уравнения $F(\bar{y}, \bar{z}, t) = 0$, определяющего решение вырожденной системы).

Переходом в (6) к новой независимой переменной $\tau = \frac{t}{\mu}$ получаем *линеаризованную присоединенную систему* (при этом параметр μ в правой части кладется равным нулю):

$$\frac{d\Delta\bar{z}}{d\tau} = \left. \frac{\partial F(\bar{y}, \bar{z}, t)}{\partial \bar{y}} \right|_L \cdot \Delta\bar{y} + \left. \frac{\partial F(\bar{y}, \bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} \right|_L \cdot \Delta\bar{z}, \quad (7)$$

в которой $\Delta\bar{y}$ и t рассматриваются как параметры. Точка покоя линеаризованной присоединенной системы (7) является корнем уравнения

$$0 = \left. \frac{\partial F(\bar{y}, \bar{z}, t)}{\partial \bar{y}} \right|_L \cdot \Delta\bar{y} + \left. \frac{\partial F(\bar{y}, \bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} \right|_L \cdot \Delta\bar{z} \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow \Delta\bar{z} = \Psi(\Delta\bar{y}, t).$$

Условие 1) теоремы Тихонова для линеаризованной присоединенной системы (7) формулируется как требование, чтобы корень $\Delta\bar{z} = \Psi(\Delta\bar{y}, t)$ являлся устойчивым корнем линеаризованной присоединенной системы.

Аналог условия 2) для нелинейной присоединенной системы в линейном случае не требуется, поскольку линеаризация проводится не всей модели (1), а только уравнения с малым

параметром. И, кроме того, из выполнения условия 1) теоремы Тихонова для линеаризованной присоединенной системы следует, что любые начальные условия принадлежат области влияния устойчивого корня $\Delta\bar{z}$, ввиду линейности этой системы.

Перейдем к основным утверждениям работы, позволяющим судить о близости процессов в сингулярно возмущенной (1) и вырожденной (3) моделях нелинейной динамической системы на основе исследования свойств линеаризованной присоединенной системы (7).

Будем предполагать, что определитель

$$\text{матрицы } \bar{F}_z = \left. \frac{\partial F(\bar{y}, \bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} \right|_L = \left[\left. \frac{\partial F_i(\bar{y}, \bar{z}, t)}{\partial z_j} \right|_L \right]_{j=1, \bar{m}}^{i=1, \bar{m}}$$

отличен от нуля при $\forall t \in [t_1, T]$ (t рассматривается как параметр). Это позволяет разрешить уравнение (8) относительно $\Delta\bar{z}$, т.е. гарантирует существование точки покоя $\Delta\bar{z} = \Psi(\Delta\bar{y}, t)$ линеаризованной присоединенной системы (7), по которой мы будем судить о свойствах нелинейной присоединенной системы (5).

Утверждение 1.

Выполнение условия 1) теоремы Тихонова для линеаризованной присоединенной системы (7) является достаточным условием его выполнения для исходной нелинейной сингулярно возмущенной модели (1).

Утверждение 2.

Пусть собственные значения матрицы Якоби $\bar{F}_z$ имеют ненулевую вещественную часть при $\forall t \in [t_1, T]$ (t – параметр), тогда выполнение условия 1) теоремы Тихонова для линеаризованной присоединенной системы (7) является необходимым и достаточным условием выполнения аналогичного условия для исходной нелинейной сингулярно возмущенной модели (1).

Доказательство утверждения 1.

Пусть для линеаризованной присоединенной системы (7) выполнено условие 1) теоремы Тихонова. Покажем, что при сделанном предположении о неравенстве нулю якобиана $\det \bar{F}_z$ аналогичное условие будет справедливо и для нелинейной присоединенной системы (5). Рассмотрим нелинейную присоединенную систему (5) и соответствующую ей линеаризованную присоединенную систему (7). Матрица

$$\bar{F}_z = \left. \frac{\partial F(\bar{y}, \bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} \right|_L \text{ в системе (7) зависит от } t.$$

Напомним, что переменные $\bar{y}$, $\Delta\bar{y}$ в системах (5) и (7) соответственно, а также время t в обеих присоединенных системах рассматриваются как параметры.

Поскольку во всех точках кривой $L(t)$ якобиан $\det \bar{F}_z(t)$ отличен от нуля, то по теореме о неявной функции [7] в некоторой окрестности каждой точки кривой $L(t)$ система уравнений

$$\begin{cases} F_1(\bar{z}, \bar{y}, t) = 0, \\ \vdots \\ F_m(\bar{z}, \bar{y}, t) = 0, \end{cases}$$

имеет единственное решение $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$. Т.о., корень $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$ изолирован, что является обязательным условием теоремы. Далее остается показать, что этот корень есть асимптотически устойчивая точка покоя нелинейной присоединенной системы (5).

Необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости по Ляпунову точки покоя $\Delta \bar{z} = \Psi(\Delta \bar{y}, t)$ линейной присоединенной системы (7) (в которой t рассматривается как параметр) является выполнение условия

$$\operatorname{Re} \bar{\lambda}_i(t) < 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad \text{при } t_1 \leq t \leq T, \quad (9)$$

где $\bar{\lambda}_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, – собственные значения матрицы $\bar{F}_z$ из (7).

Обозначим через $\lambda_i(\bar{y}, t)$, $i = \overline{1, m}$, собственные значения матрицы

$$F_z = \left. \frac{\partial F(\bar{y}, \bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=\varphi(\bar{y}, t)} = \left[\left. \frac{\partial F_i(\bar{y}, \bar{z}, t)}{\partial z_j} \right|_{\bar{z}=\varphi(\bar{y}, t)} \right]_{j=\overline{1, m}}^{i=\overline{1, m}},$$

элементы которой отличаются от элементов матрицы $\bar{F}_z$ тем, что вычисляются не в точках кривой $L(t)$, а в точках $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$. Очевидно, что $\bar{\lambda}_i(t) = \lambda_i(\bar{y}(t), t)$, где $\bar{y}(t)$ – решение вырожденной системы (3).

Как показано в [8], при выполнении условия (9) в силу непрерывности $\lambda_i(\bar{y}, t)$, что обеспечивается непрерывностью F_z , существует область параметров $\bar{y}$, t :

$$D_1 = \{(\bar{y}, t) : \|\bar{y} - \bar{y}(t)\| \leq \eta; t_1 \leq t \leq T\} \subseteq D$$

(где $\eta > 0$ – некоторая постоянная), такая, что $\operatorname{Re} \bar{\lambda}_i(\bar{y}, t) < 0$ при $(\bar{y}, t) \in D_1$, $i = \overline{1, m}$ (область D устойчивости корня $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$ введена выше в разделе «Исходные понятия» данной статьи). Отсюда следует, что $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$ является асимптотически устойчивой точкой покоя нелинейной присоединенной системы (5) равномерно

относительно области параметров $D_1 \subseteq D$. Т.о., из выполнения условия 1) теоремы Тихонова для линейаризованной присоединенной системы (7) следует выполнение аналогичного условия и для нелинейной системы (5), что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству второго утверждения.

Доказательство утверждения 2.

Выполнение условия 1) для нелинейной сингулярно возмущенной модели (1) при его выполнении для линейаризованной присоединенной системы (7) следует из доказанного выше **утверждения 1** и из того факта, что при асимптотической устойчивости точки покоя $\Delta \bar{z} = \Psi(\Delta \bar{y}, t)$ линейаризованной присоединенной системы (7) собственные значения матрицы $\bar{F}_z$ всегда имеют ненулевую вещественную часть.

Докажем необходимость условий **утверждения 2**. Требуется показать, что если собственные значения матрицы $\bar{F}_z$ имеют ненулевую вещественную часть при $\forall t \in [t_1, T]$ (t – параметр), то из выполнения условия 1) теоремы Тихонова для нелинейной присоединенной системы (5) следует выполнение аналогичного условия и для линейаризованной присоединенной системы (7).

Пусть для нелинейной присоединенной системы (5) выполнено условие 1) теоремы Тихонова. Так как точка покоя $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$ нелинейной присоединенной системы (5) асимптотически устойчива по Ляпунову, то согласно первому методу Ляпунова собственные значения $\lambda_i(\bar{y}, t)$, $i = \overline{1, m}$, матрицы F_z имеют неположительную вещественную часть при всех $(\bar{y}, t) \in D$. Поэтому и $\bar{\lambda}_i(t) = \lambda_i(\bar{y}(t), t)$, $i = \overline{1, m}$, также имеют неположительную вещественную часть. Но так как по условию утверждения $\operatorname{Re} \bar{\lambda}_i(t) \neq 0$ при $\forall t \in [t_1, T]$, $i = \overline{1, m}$, то отсюда следует, что $\operatorname{Re} \bar{\lambda}_i(t) < 0$ при $\forall t \in [t_1, T]$. А значит, точка покоя $\Delta \bar{z} = \Psi(\Delta \bar{y}, t)$ линейаризованной присоединенной системы (7) – линейной системы с постоянными коэффициентами ($\Delta \bar{y}$ и t рассматриваются как параметры) – асимптотически устойчива по Ляпунову равномерно относительно параметров $\Delta \bar{y}$ и t .

Необходимость доказательства изолированности корня $\Delta \bar{z} = \Psi(\Delta \bar{y}, t)$ векторного уравнения

$$\frac{\partial F(\bar{y}, \bar{z}, t)}{\partial \bar{y}} \Big|_L \cdot \Delta \bar{y} + \frac{\partial F(\bar{y}, \bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} \Big|_L \cdot \Delta \bar{z} = 0$$

отсутствует в силу его линейности. Существование же этого корня следует из сделанного предположения о неравенстве нулю определителя $\det \bar{F}_z$ (при $\forall t \in [t_1, T]$).

Таким образом, утверждение 2 полностью доказано.

Выводы: В работе доказаны два утверждения, позволяющие судить о выполнении одного из требований теоремы Тихонова о предельном переходе для нелинейной сингулярно возмущенной модели динамической системы по уравнениям первого приближения. В частности, показано, что для асимптотической устойчивости точки покоя нелинейной присоединенной системы достаточно, а при определенных условиях также необходимо, чтобы была асимптотически устойчива точка покоя линеаризованной присоединенной системы. При этом линеаризация осуществляется вдоль траектории решения вырожденной системы.

Использование теоремы о предельном переходе предполагает также выполнение ее второго условия – принадлежности начальных значений переменных для исходной нелинейной сингулярно возмущенной модели области влияния выбранной точки покоя. Доказанные в работе утверждения позволяют сделать вывод о том, что о наличии требуемой области начальных условий для нелинейной сингулярно возмущенной модели системы, отвечающих условию 2), можно судить по ее линеаризованной присоединенной системе. Действительно, из выполнения условия 1) для линеаризованной присоединенной системы следует асимптотическая устойчивость «в малом» точки покоя нелинейной присоединенной системы и ее изолированность от других точек покоя. Это гарантирует, что требуемая область начальных условий для нелинейной модели системы будет, как минимум, конечная. Оценка же величины данной области представляет собой известную отдельную сложную задачу. Отметим только, что полученные результаты

позволяют утверждать о возможности применения для ее решения второго метода Ляпунова с использованием функций Ляпунова вида квадратичной формы, построение которых всегда возможно при устойчивости линеаризованных моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Naidu, D.S.* Singular perturbations and time scales in control theory and applications: an overview // *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series B: Applications & Algorithms*. 2002. Vol. 9. P. 233-278.
2. *Тихонов, А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // *Матем. сборник*. 1952. Т. 31 (73). № 3. С. 575-586.
3. *Державин, О.М.* О решении задачи понижения по Тихонову порядка модели нелинейной динамической системы на основе ее линейного приближения / *О.М. Державин, Е.Ю. Сидорова* // *Вестник МЭИ*. 2007. №2. С. 141-147.
4. *Державин, О.М.* О понижении порядка по первому приближению сингулярно возмущенной модели нелинейной динамической системы с несколькими малыми параметрами / *О.М. Державин, Е.Ю. Сидорова* // *Труды международной научно-технической конференции «Информационные средства и технологии»*. 2008. Т. 3. С. 97-99.
5. *Державин, О.М.* Исследование неавтономной сингулярно возмущенной динамической модели нелинейной системы на основе уравнений первого приближения / *О.М. Державин, Е.Ю. Сидорова* // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2010. № 10. С. 22-27.
6. *Васильева, А.Б.* Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // *УМН*. 1963. Т. 18. № 3 (111). С. 15-86.
7. *Фихтенгольц, Г.М.* Основы математического анализа. Т. 2. – М.: Наука, 1964. 464 с.
8. *Васильева, А.Б.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / *А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов*. – М.: Наука. 1973. 272 с.

ABOUT ONE APPROACH TO INVESTIGATION OF NONLINEAR NONAUTONOMOUS SINGULARLY PERTURBED MODEL OF DYNAMICAL SYSTEM

© 2016 O.M. Derzhavin, E.Yu. Sidorova

National Research University "MPEI", Moscow

A question of the singularly perturbed nonlinear dynamical system model order reduction using Tikhonov's theorem is considered. It is shown that the conditions of the theorem can be checked by the linearization of the fast subsystem in the solution of the degenerate system. This fact simplifies the using of the theorem in practice.

Key words: *singularly perturbed model, dynamical system, Tikhonov's theorem, linearized model*