УДК 519.872

ФИЗИЧЕСКАЯ ОЧЕРЕДЬ В ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

© 2016 А.С. Титовцев

Казанский национальный исследовательский технологический университет

Статья поступила в редакцию 09.09.2016

В статье рассмотрена проблема различных типов очередей, возникающих в системах массового обслуживания. Введено понятия физической очереди и получены общие математические формулы первых и вторых моментов основных дискретных и непрерывных случайных величин, характеризующих поведение физических очередей для различных моделей систем массового обслуживания смешанного типа.

Ключевые слова: *физическая очередь, качество обслуживания, система массового обслуживания*

Основные определения. На практике при эксплуатации различного рода технических объектов, работающих по принципу систем массового обслуживания (СМО), весьма часто приходится иметь дело не только с привычной и хорошо изученной математической очередью, но и с другими типами очередей. В частности, можно рассмотреть и другую числовую характеристику СМО, которая, например, в стандартном отчёте системы имитационного моделирования GPSS, носит название «очередь без нулевых входов». В данном случае под нулевым входом понимается такой приход заявки в систему, при котором в многоканальном устройстве имеется, по крайней мере, один свободный канал, и в этом случае вновь поступившая в систему заявка обслуживается немедленно. Таким образом, в отличие от обычной математической очереди, «очередь без нулевых входов» означает такую ситуацию, при которой на момент прибытия в систему новой заявки все каналы в обслуживаемом устройстве могут быть заняты, но при этом очередь, как таковая, может и отсутствовать. В последнем случае поступившая заявка не встречает перед собой других заявок, а находится непосредственно перед обслуживающим устройством, в котором заняты все каналы обслуживания. Определённая таким образом «очередь без нулевых входов» должна рассчитываться с учётом только тех заявок, которые действительно ожидали начала обслуживания и без учёта заявок, которым не пришлось ждать, поскольку на момент их прибытия в систему хотя бы один обслуживающий канал был свободен. Средняя длина очереди без нулевых входов, очевидно, должна быть больше средней длины общеизвестной и более привычной математической очереди. При этом минимальная средняя длина такой очереди – это нуль, как и у обычной математической очереди, то есть в среднем в такой очереди, как и в математической очереди, может находиться любое число заявок.

Таким образом, если обычная математическая очередь рассчитывается как среднее по всем заявкам, побывавшим в системе, то очередь без нулевых входов должна рассчитываться как средняя величина за вычетом тех требований, которые были обслужены немедленно, поскольку попали в систему в тот момент, когда, по крайней мере, один из каналов обслуживания был свободен. В соответствии с терминологией, принятой в системе имитационного моделирования GPSS, будем называть нулевым входом такой приход заявки в систему, при котором имеется, по крайней мере, один свободный канал обслуживания, и заявка в этом случае обслуживается немедленно. Назовём физической очередью очередь, рассчитанную без учёта нулевых входов. В случае занятости всех обслуживающих каналов вновь прибывшая в систему очередная заявка будет вынуждена ожидать обслуживания в накопителе, при этом минимальное количество заявок в накопителе равно нулю.

Как и привычная математическая очередь, рассчитываемая с учётом нулевых входов, физическая очередь также характеризуется моментами числа требований, ожидающих обслуживания, и соответственно, моментами времени ожидания обслуживания вновь прибывшей заявкой в соответствующей очереди. Идея расчёта этих моментов заключается в том, что в этом случае при расчёте параметров очереди следует переопределить условие нормировки с учётом только тех состояний СМО, при которых отсутствуют нулевые входы. Говоря другими словами, нужно учесть при расчётах только те состояния системы, в которых присутствует физическая очередь. Таким образом, алгоритм расчёта параметров физической очереди полностью идентичен алгоритму расчёта математической очереди за исключением вероятностей возможных состояний СМО, которые теперь должны рассчитываться исходя из нового условия нормировки, исключая состояния, соответствующие нулевым входам.

*Титовцев Антон Сергеевич, кандидат технических наук.
E-mail: notna6683@mail.ru*

В данной работе в рамках модели наиболее общей системы массового обслуживания с произвольным количеством источников и ограниченной по длине очереди [5] получены общие математические выражения для первых и вторых моментов числа требований, ожидающих обслуживания в физической очереди. Также рассчитаны соответствующие функции распределения, и как следствие, первый и второй моменты времени ожидания начала обслуживания заявкой в очереди указанного типа.

Вероятностные характеристики и моменты числа требований в физической очереди. В работе авторов [5] была представлена наиболее общая математическая модель открытой

$$\varepsilon_0 = E_0 = 0; \varepsilon_1 = E_1; \varepsilon_2 = E_1 + E_2; \dots \varepsilon_j = \sum_{i=0}^j E_i = \sum_{i=1}^j E_i; \dots$$

ограничения длины очереди (объёма накопителя) для заявок j -й компоненты;

$$\Lambda_0 = \sum_{j=0}^h \lambda_j; \Lambda_1 = \sum_{j=1}^h \lambda_j; \Lambda_2 = \sum_{j=2}^h \lambda_j; \dots \Lambda_h = \lambda_h;$$

где λ_j — интенсивность потока заявок j -й компоненты; μ — интенсивность обслуживания заявок одним обслуживающим устройством;

$$R_0 = \sum_{j=0}^h \rho_j; R_1 = \sum_{j=1}^h \rho_j; R_2 = \sum_{j=2}^h \rho_j; \dots R_h = \rho_h; R_i = \frac{\Lambda_i}{\mu},$$

где ρ_j — приведенная интенсивность потока заявок j -й компоненты.

Для расчёта параметров физической очереди на базе разработанной и представленной в работе [5] универсальной математической модели необходимо переписать условие нормировки таким образом, чтобы при суммировании в этом условии учитывались лишь те состояния системы, которые соответствуют физической очереди. В результате имеем

$$\sum_{i=m}^{m+\varepsilon_h} P_i = 1 \tag{1}$$

- условие нормировки для расчёта физической очереди.

Подставив соответствующие выражения для вероятностей стационарных состояний P_i в представленное выше условие нормировки, и решая полученное уравнение относительно P_0 , получим следующее выражение величины $\tilde{P}_0$, используемое для расчета физической очереди:

$$\tilde{P}_0 = \left[\frac{R_0^m}{m!} + \frac{R_0^m}{m!} \sum_{g=1}^h \prod_{j=0}^{g-1} \left(\frac{R_j}{m} \right)^{E_j} \times \left\{ \frac{R_g}{m - R_g} \left(1 - \left(\frac{R_g}{m} \right)^{E_g} \right), R_g \neq m \right. \right. \\ \left. \left. E_g, R_g = m \right\} \right]^{-1};$$

Подчеркнём, что в данном случае $\tilde{P}_0$ представляет собой уже не вероятность нулевого

многоканальной СМО, имеющей m обслуживающих устройств одинаковой производительности с экспоненциально распределённым временем обслуживания. Входной поток требований в этом случае является суперпозицией произвольного числа компонент h , каждая из которых представляет собой пуассоновский поток заявок, обслуживаемых в порядке очереди. Для каждого типа требований, поступающих в систему из j -го источника, действует своё ограничение на длину очереди ε_j , при этом $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_h$. В настоящей работе мы также будем использовать обозначения, принятые в работе [5]:

состояния системы P_0 , то есть вероятность полного отсутствия заявок в системе, которая в этом расчёте не нужна, а некоторый коэффициент пропорциональности, который может быть и большим единицы. Физический смысл при этом имеют лишь величины вероятностей соответствующих состояний системы $\tilde{P}_i$, которые, конечно, для всех значений $i \geq m$ остаются меньше, чем единица. При этом формулы для остальных вероятностных характеристик, предназначенных для расчёта параметров физической очереди, будут выглядеть точно так же, как и при расчёте характеристик обычной математической очереди с заменой P_0 на $\tilde{P}_0$. Имеем

$$\tilde{P}_i = \left(\frac{R_{j+1}}{m} \right)^{i-m-\varepsilon_j} \prod_{g=0}^j \left(\frac{R_g}{m} \right)^{E_g} \frac{R_0^m}{m!} \tilde{P}_0, \\ m + \varepsilon_j \leq i \leq m + \varepsilon_{j+1}, \quad 0 \leq j \leq h-1$$

- вероятности всевозможных состояний СМО в стационарном режиме;

$$\tilde{P}_{Bi} = \prod_{g=0}^{i-1} \left(\frac{R_g}{m} \right)^{E_g} \frac{R_0^m}{m!} \tilde{P}_0 \begin{cases} m \left(1 - \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i} \right) \\ m - R_i, R_i \neq m \\ E_i, R_i = m \end{cases}$$

- базовая вероятность для расчёта характеристик СМО;

$$\tilde{P}_{m+\varepsilon_h} = \prod_{g=1}^h \left(\frac{R_g}{m} \right)^{E_g} \frac{R_0^m}{m!} \tilde{P}_0$$

- вероятность полной занятости системы;

$$\tilde{P}_W = \frac{1}{R_0} \sum_{i=1}^h R_i \tilde{P}_{Bi}$$

- вероятность ожидания обслуживания вновь прибывшей заявкой в физической очереди.

В этом случае относительная пропускная способность системы $\tilde{q} = \tilde{P}_W$, абсолютная пропускная способность, очевидно, $\tilde{A} = \Lambda_0 \tilde{q}$.

Моменты числа заявок, ожидающих обслуживания в физической очереди рассчитываются по той же схеме, что и для математической очереди, однако в соответствующие формулы подставляются вероятности с тильдой, полученные с учётом соответствующего условия нормировки. Подробный вывод формул для моментов длины очереди приводится в работе [5]. В результате имеем

- среднее число заявок, находящихся в физической очереди

$$\bar{l} = \sum_{i=1}^h \left\{ \begin{aligned} & \frac{R_i}{m-R_i} [\tilde{P}_{Bi} - E_i \tilde{P}_{m+\varepsilon_i}], \quad R_i \neq m \\ & \frac{E_i(E_i+1)}{2} \tilde{P}_{m+\varepsilon_{i-1}}, \quad R_i = m \end{aligned} \right\} + \sum_{i=2}^h \varepsilon_{i-1} \frac{R_i}{m} \tilde{P}_{Bi};$$

- второй начальный момент числа требований в физической очереди

$$\bar{l}^2 = \sum_{i=1}^h \left[\varepsilon_{i-1}^2 \tilde{P}_{Bi} + \left\{ \frac{R_i}{m-R_i} \left(\frac{m+R_i}{m-R_i} + 2\varepsilon_{i-1} \right) \tilde{P}_{Bi} - \frac{mE_i}{m-R_i} \left(E_i + \frac{2R_i}{m-R_i} + 2\varepsilon_{i-1} \right) \tilde{P}_{m+\varepsilon_i}, R_i \neq m \right\} + \left(E_i - 1 \right) E_i \left(\frac{2E_i - 1}{6} + \varepsilon_{i-1} \right) \tilde{P}_{m+\varepsilon_i}, R_i = m \right] + \varepsilon_h^2 \tilde{P}_{m+\varepsilon_h}.$$

Приведём также варианты этих зависимостей для нескольких частных случаев, представляющих определённый практический интерес. Для комбинированной модели массового обслуживания, представленной в работе [4], имеем

$$\tilde{P}_0 = \left[\frac{R_0^m}{m!} \left(1 + \left\{ \begin{aligned} & \frac{R_1}{m-R_1} \left[1 - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \right], R_1 \neq m \\ & E_1, \quad R_1 = m \end{aligned} \right\} + \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{\rho}{m-\rho} \right) \right]^{-1};$$

при этом вероятности стационарных состояний

$$\tilde{P}_i = \begin{cases} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{i-m} \frac{R_0^m}{m!} \tilde{P}_0, & m \leq i \leq m + E_1 \\ \left(\frac{\rho}{m} \right)^{i-m-E_1} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R_0^m}{m!} \tilde{P}_0, & i \geq m + E_1 \end{cases}.$$

В данной модели принята следующая система обозначений:

$$\rho_0 = \frac{\lambda_0}{\mu}; \quad \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}; \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu};$$

$$R_0 = \frac{\Lambda_0}{\mu} = \rho_0 + \rho_1 + \rho; \quad R_1 = \frac{\Lambda_1}{\mu} = \rho_1 + \rho.$$

В этом случае первый и второй моменты числа заявок, ожидающих обслуживания в физической очереди имеют вид

$$\bar{l} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{R_1}{m-R_1} (\tilde{P}_{B1} - E_1 \tilde{P}_{m+E_1}), \quad R_1 \neq m \\ & \frac{E_1+1}{2} \tilde{P}_{B1}, \quad R_1 = m \end{aligned} \right\} + \rho \left(\frac{E_1}{m} + \frac{1}{m-\rho} \right) \tilde{P}_{FLS};$$

$$\bar{l}^2 = \left\{ \begin{aligned} & \frac{R_1}{m-R_1} \left[\frac{m+R_1}{m-R_1} \tilde{P}_{B1} - E_1 \left(E_1 + \frac{2m}{m-R_1} \right) \tilde{P}_{m+E_1} \right], R_1 \neq m \\ & \frac{(E_1+1)(2E_1+1)}{6} \tilde{P}_{B1}, R_1 = m \end{aligned} \right\} + \rho \left[\frac{E_1^2}{m} + \frac{1}{m-\rho} \left(2E_1 + \frac{m+\rho}{m-\rho} \right) \right] \tilde{P}_{FLS},$$

где $\tilde{P}_{FLS} = \sum_{i=m+E_1}^{\infty} \tilde{P}_i$ — вероятность полной загрузки накопителя, ρ — приведенная интенсивность потока заявок, для которых не действуют ограничения на длину очереди.

Для частной модели СМО с полным набором накопителей, предложенной в работе [6], вероятности стационарных состояний системы при расчёте физической очереди принимают вид

$$\tilde{P}_0 = \left[\frac{R_0^m}{m!} + \frac{R_0^m}{m!} \sum_{g=1}^h \prod_{j=1}^g \frac{R_j}{m} \right]^{-1};$$

$$\tilde{P}_i = \prod_{g=1}^{i-m} \frac{R_g}{m} \frac{R_0^m}{m!} \tilde{P}_0, \quad m+1 \leq i \leq m+h.$$

и тогда моменты числа заявок, ожидающих обслуживания в физической очереди

$$\tilde{l}^{(K)} = \sum_{i=m+1}^{m+h} (i-m)^K \prod_{g=1}^{i-m} \frac{R_g}{m} \frac{R_0^m}{m!} \tilde{P}_0, \quad K=1, 2.$$

Для модели Х. Такаджи [7] вероятности стационарных состояний системы для расчёта физической имеют вид:

$$\tilde{P}_0 = \left[\frac{R_0^m}{m!} + \frac{R_0^m}{m!} \left\{ \frac{R_1 \left[1 - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \right]}{m - R_1}, R_1 \neq m \right. \right. \\ \left. \left. E_1, R_1 = m \right. \right\}^{-1} ; \\ \tilde{P}_i = \left(\frac{R_1}{m} \right)^{i-m} \frac{R_0^m}{m!} \tilde{P}_0, \quad m \leq i \leq m + E_1$$

и моменты числа заявок, ожидающих обслуживания в физической очереди

$$\tilde{l} = \left\{ \frac{R_1}{m - R_1} (\tilde{P}_{B1} - E_1 \tilde{P}_{m+E_1}), R_1 \neq m \right. \\ \left. \frac{E_1 + 1}{2} \tilde{P}_{B1}, R_1 = m \right\}; \\ \tilde{l}^2 = \left\{ \frac{R_1}{m - R_1} \left[\frac{m + R_1}{m - R_1} \tilde{P}_{B1} - \right. \right. \\ \left. \left. - E_1 \left(E_1 + \frac{2m}{m - R_1} \right) \tilde{P}_{m+E_1} \right], R_1 \neq m \right. \\ \left. \frac{(E_1 + 1)(2E_1 + 1)}{6} \tilde{P}_{B1}, R_1 = m \right\}.$$

Точно такая же система формул будет, очевидно, действительной и для однокомпонентной модели СМО с очередью конечной длины (по классификации Дж. Кендалла – модель М/М/м/Е). В этом случае в вышеуказанных формулах следует лишь положить $R_0 = R_1 = \rho_1$, откуда в соответствии с [2, 3] имеем

$$\tilde{P}_0 = \left[\frac{R_0^m}{m!} \frac{m}{m - \rho} \right]^{-1}; \quad \tilde{P}_i = \left(\frac{\rho}{m} \right)^{i-m} \frac{R_0^m}{m!} \tilde{P}_0, \quad i \geq m. \tag{2}$$

В этом случае первый и второй моменты числа заявок, ожидающих обслуживания в физической очереди

$$\tilde{l} = \frac{\rho}{m - \rho} \tilde{P}_{FLS}; \quad \tilde{l}^2 = \frac{\rho(m + \rho)}{(m - \rho)^2} \tilde{P}_{FLS}.$$

Для наиболее простой однокомпонентной модели с неограниченной очередью (модель М/М/м) в формулах (2) следует принять $R_0 = \rho$ и в этом случае отсюда имеем

$$\tilde{l} = \frac{\rho}{m - \rho}; \quad \tilde{l}^2 = \frac{\rho(m + \rho)}{(m - \rho)^2}.$$

Время ожидания начала обслуживания заявкой в физической очереди. Алгоритм расчёта моментов времени ожидания обслуживания заявкой в физической очереди вполне идентичен алгоритму расчёта моментов времени ожидания заявки в обычной математической очереди, приведенному в работе [5]. В нем вместо обычных вероятностных характеристик лишь следует под-

$$\tilde{l} = \begin{cases} \frac{\rho_1}{m - \rho_1} \left(1 - E_1 \frac{\tilde{P}_L}{\tilde{P}_W} \right), & \rho_1 \neq m \\ \frac{E_1 + 1}{2}, & \rho_1 = m \end{cases}; \\ \tilde{l}^2 = \begin{cases} \frac{\rho_1(m + \rho_1)}{(m - \rho_1)^2} - \frac{\rho_1 E_1}{m - \rho_1} \left(E_1 + \frac{m}{m - \rho_1} \right) \frac{\tilde{P}_L}{\tilde{P}_W}, & \rho_1 \neq m. \\ \frac{E_1(E_1 + 1)(2E_1 + 1)}{6}, & \rho_1 = m \end{cases}$$

В этих формулах

$$\tilde{P}_W = \begin{cases} \frac{\tilde{P}_0}{(m-1)!(m-\rho_1)} \left[1 - \left(\frac{\rho_1}{m} \right)^{E_1} \right], & \rho_1 \neq m \\ \frac{m^{m-1}}{(m-1)!} E_1 \tilde{P}_0, & \rho_1 = m \end{cases}$$

- вероятность ожидания заявкой обслуживания, то есть вероятность того, что поступающее требование найдет все каналы занятыми

$$\tilde{P}_L = \begin{cases} \frac{\rho^{m+E_1}}{m! m^{E_1}} \tilde{P}_0, & \rho_1 \neq m \\ \frac{m^{m-1}}{(m-1)!} \tilde{P}_0, & \rho_1 = m \end{cases}$$

- вероятность отказа, который заявка получает, если приходит в момент, когда заняты все m обслуживающих каналов и все E_1 мест в очереди.

Наконец, для частной модели, впервые изученной в работе Дж. Коэна [1], имеем следующие вероятности стационарных состояний системы для расчёта параметров физической очереди:

ставить соответствующие вероятности с тильдой, полученные с учётом нового условия нормировки (1). Кроме того, с учётом этого обстоятельства следует переопределить относительную пропускную способность системы $\tilde{q}$. В данном случае для универсальной модели СМО, представленной в работе [5], имеем следующие конечные формулы для моментов времени ожидания заявки в физической очереди:

$$\tilde{l}_W = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^h \left\{ \frac{R_i [\tilde{P}_{Bi} - E_i \tilde{P}_{m+\varepsilon_i}]}{m - R_i} + \frac{R_i}{m} \varepsilon_{i-1} \tilde{P}_{Bi} \right\} = \frac{\tilde{l}}{A}; \\ \tilde{l}_W^2 = \frac{1}{A} \times \\ \times \sum_{i=1}^h R_i \left\{ \frac{2(\tilde{P}_{Bi} - E_i \tilde{P}_{m+\varepsilon_i})}{\mu(m - R_i)^2} \left[1 + \frac{\varepsilon_{i-1}}{m} (m - R_i) \right] + \right. \\ \left. \frac{\tilde{P}_m}{3\mu m^2} \prod_{g=0}^{i-1} \left(\frac{R_g}{R_i} \right)^{E_g} \left[\varepsilon_i (\varepsilon_i + 1) (\varepsilon_i + 2) - \right. \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{\varepsilon_{i-1}(\varepsilon_{i-1}+1)\tilde{P}_{B_i}}{m^2\mu} - \frac{E_i(E_i+1)\tilde{P}_{m+\varepsilon_i}}{m\mu(m-R_i)}, R_i \neq m \\ & - \varepsilon_{i-1}(\varepsilon_{i-1}+1)(\varepsilon_{i-1}+2), R_i = m \end{aligned} \right\}.$$

Для комбинированной модели массового обслуживания, приведенной в работе [4], при этом имеем

$$\begin{aligned} \tilde{t}_w &= \frac{1}{A} \left[\frac{R_1}{m-R_1} (\tilde{P}_{B_1} - E_1 \tilde{P}_{m+E_1}) + \right. \\ & \left. + \frac{\rho}{m} \tilde{P}_{FLS} \left(E_1 + \frac{m}{m-\rho} \right) \right] = \frac{\tilde{l}}{A}; \\ \tilde{t}_w^2 &= \frac{1}{A} \left[\left\{ \frac{1}{\mu(m-R_1)} \left[2 \frac{R_1}{m-R_1} (\tilde{P}_{B_1} - E_1 \tilde{P}_{m+E_1}) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - E_1(E_1+1)\tilde{P}_{m+E_1} \right], R_i \neq m \right\} + \frac{1}{\mu(m-\rho)} \times \\ & \left. \left. \frac{E_1^2-1}{3m\mu} \tilde{P}_{B_1}, R_i = m \right\} + \frac{1}{\mu(m-\rho)} \times \right. \\ & \left. \times \left[2 \frac{\rho}{m} \tilde{P}_{FLS} \left(E_1 + \frac{m}{m-\rho} \right) + E_1(E_1+1)\tilde{P}_{m+E_1} \right] \right]. \end{aligned}$$

Для частной модели СМО с полным набором накопителей [6], имеем

$$\tilde{t}_w = \frac{\tilde{l}}{A}; \quad \tilde{t}_w^2 = \frac{1}{Am\mu} \sum_{i=m+1}^{m+h} (i-m)(i-m+1)\tilde{P}_i.$$

Для модели X. Такаджи [7]:

$$\begin{aligned} \tilde{t}_w &= \frac{1}{A} \frac{R_1}{m-R_1} (\tilde{P}_{B_1} - E_1 \tilde{P}_{m+E_1}) = \frac{\tilde{l}}{A}; \\ \tilde{t}_w^2 &= \frac{1}{A} \left\{ \frac{1}{\mu(m-R_1)} \left[2 \frac{R_1}{m-R_1} (\tilde{P}_{B_1} - E_1 \tilde{P}_{m+E_1}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - E_1(E_1+1)\tilde{P}_{m+E_1} \right], R_i \neq m \right\} + \frac{E_1(E_1+1)\tilde{P}_{m+E_1}}{A\mu m}. \end{aligned}$$

Эти же формулы будут справедливыми и для классической модели M/M/m/E, если в них положить $R_0 = R_1 = \rho_1$, в этом случае имеем

$$\tilde{t}_w = \frac{\tilde{l}}{A} = \begin{cases} \frac{\rho_1 (\tilde{P}_w - E_1 \tilde{P}_L)}{A(m-\rho_1)}, & \rho_1 \neq m \\ \frac{E_1+1}{2\lambda}, & \rho_1 = m \end{cases};$$

- дисперсия времени ожидания заявки в физической очереди

$$\tilde{\sigma}_w^2 = \begin{cases} \frac{(E_1+1)(E_1+2)}{3\lambda_1 A} \tilde{P}_w - \tilde{t}_w^2, & \rho_1 \neq m \\ \frac{(E_1+1)(E_1+5)}{12\lambda_1^2}, & \rho_1 = m \end{cases}.$$

Наконец, для модели Дж. Коэна [1]:

$$\tilde{t}_w = \frac{1}{A} \frac{\rho}{m-\rho} \tilde{P}_{FLS} = \frac{\tilde{l}}{A}; \quad \tilde{t}_w^2 = \frac{2\rho \tilde{P}_{FLS}}{A\mu(m-\rho)^2}.$$

Для наиболее простой однокомпонентной модели с неограниченной очередью (модель M/M/m) при условии $R_0 = \rho$ отсюда, очевидно, следует

$$\tilde{t}_w = \frac{\rho}{\lambda(m-\rho)} = \frac{\tilde{l}}{\lambda}; \quad \tilde{\sigma}_w^2 = \frac{2}{\mu^2(m-\rho)^2}.$$

Следует отметить, что результаты, полученные по этому алгоритму, полностью совпадают с результатами имитационного моделирования СМО вышеуказанных типов в системе имитационного моделирования GPSS World.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Cohen, J.W.* Certain delay problems for a full availability trunk group loaded by two sources // *Communication News*. 1956. Vol. 16. No. 3. P. 105–113.
2. *Кирпичников, А.П.* Прикладная теория массового обслуживания. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2008. 118 с.
3. *Кирпичников, А.П.* Методы прикладной теории массового обслуживания. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2011. 200 с.
4. *Kirpichnikov, A.P.* Open systems of multicomponent flows differentiated service / *A.P. Kirpichnikov, A.S. Titovtsev* // *Ciência e Técnica Vitivinícola*. 2014. Vol. 29 No. 7. P. 108–122.
5. *Kirpichnikov, A.* Mathematical model of a queuing system with arbitrary quantity of sources and size-limited queue / *A. Kirpichnikov, A. Titovtsev* // *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2016. Vol. 106, No. 2. P. 649–661.
6. *Kirpichnikov, A.* Mathematical model of open queuing system with full set of memories / *A. Kirpichnikov, A. Titovtsev* // *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2016. Vol. 107, No. 1. P. 139–143.
7. *Takagi, H.* Explicit delay distribution in first-come first-served M/M/m/K and M/M/m/K/n queues and mixed loss-delay system // *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2007. Vol. 40, No. 2. P. 185–200.

PHYSICAL QUEUE IN THE APPLIED QUEUING THEORY

© 2016 A.S. Titovtsev

Kazan National Research Technological University

The problem of various types of queues arising in queuing systems is considered in the paper. The concept of a physical queue is introduced; universal mathematical formulas of the first and second moments of main discrete and continuous random variables characterizing behavior of physical queues for various models of mixed type queuing systems are obtained.

Key words: *physical queue, quality of service (QoS), queuing system*