УДК 621.317

ЦИФРОВОЙ КОМПЛЕКСНЫЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ ЗНАКОВОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Самарский государственный технический университет

Статья поступила в редакцию 16.12.2016

В статье рассматривается концепция комплексного оперативного измерения вероятностных характеристик стационарных случайных процессов. Основу данной концепции составляет формализованное описание процедур измерения вероятностных характеристик с помощью обобщенного уравнения статистических измерений. Согласно этому уравнению алгоритм оценивания любой вероятностной характеристики может быть представлен как совокупность взаимосвязанных базисных измерительных и вычислительных преобразований. При этом в статье особое внимание уделяется первичному преобразованию случайного процесса в цифровую форму. Оно представляет собой важнейший этап статистических измерений, который определяет эффективность цифровых процедур обработки дискретных данных и организацию комплексных измерений в целом. В качестве унифицированного первичного цифрового преобразования случайных процессов предложено использовать знаковое аналого-стохастическое квантование. Данный вид квантования основан на применении вспомогательных случайных сигналов, которые выполняют функцию стохастического порога квантования. На основе теории дискретно-событийного представления получена модель результата знакового аналого-стохастического квантования. Использование знакового аналого-стохастического квантования позволило реализовать подход, позволяющий осуществлять аналитическое вычисление операторов интегрирования при разработке цифровых алгоритмов измерения вероятностных характеристик. Подробно рассмотрена разработка быстродействующих цифровых алгоритмов вычисления корреляционной и взаимной корреляционной функций, а также спектральной плотности мощности. Все разработанные алгоритмы являются структурно однородными. Единый подход к разработке алгоритмов обеспечивает их информационную, программную и метрологическую совместимость. Это открывает возможность комплексирования этих алгоритмов в процессе оперативного статистического анализа случайных процессов.

Ключевые слова: случайный процесс, вероятностные характеристики, цифровой алгоритм, комплексные статистические измерения, аналого-стохастическое квантование, знаковый сигнал.

ВВЕДЕНИЕ

Методы статистических измерений используются практически во всех областях науки и техники. Диагностика повреждений и неразрушающий контроль работы машин и механизмов, изучение динамических и частотных характеристик сложных систем, обнаружение периодических составляющих на фоне шумов, идентификация трактов распространения акустических сигналов и многое другое неразрывно связано с измерением вероятностных характеристик случайных процессов (СП).

В последние годы уровень сложности задач, решаемых с помощью методов статистических измерений, существенно вырос. Все чаще в ходе осуществления производственного процесса или научного эксперимента возникает необходимость постоянного мониторинга и контроля текущего состояния технических объектов и систем, характеризующихся множеством взаимосвязанных и подверженных случайным возмущениям параметров. Получить в этом случае наиболее полную и достоверную информацию возможно лишь только при комплексном подходе к проведению статистического анализа, предполагающего измерение широкого круга вероятностных характеристик многокомпонентных по составу СП. Кроме того, реализация уникальных по своей организации и технической оснащенности натурных экспериментов, а также необходимость снижения стоимости исследований за счет сокращения общего числа многократно повторяемых экспериментов выдвигают требование увеличения совокупного объема информации, получаемого в результате статистических измерений. Все это заставляет рассматривать методы статистических измерений как единую систему, обеспечивающую комплексный анализ СП.

Одной из основных проблем комплексного анализа СП является обеспечение оперативности его проведения. Получившие на практике широкое распространение классические цифровые методы статистических измерений, базирующиеся на принципах равномерной дискретизации во времени и многоуровневом квантовании, часто оказываются малоэффективными в ходе решения данной проблемы. Это объясняется тем, что соответствующие им алгоритмы измерения веро-

Якимов Владимир Николаевич, доктор технических наук, профессор кафедры информационных технологий. E-mail: yvnr@hotmail.com

ятностных характеристик являются сложными в вычислительном отношении и требуют больших временных затрат. В частности, в процессе измерения таких важнейших характеристик стохастической взаимосвязи, как корреляционные и взаимные корреляционные функции (КФ и ВКФ), а также при вычислении спектральных оценок, приходится выполнять значительное количество операций цифрового умножения, особенно, если необходимо обрабатывать большие объемы измерительной информации [1-6].

Традиционно проблема повышения быстродействия оценивания вероятностных характеристик решается или за счет различного рода схемотехнических решений или путем улучшения эксплуатационных характеристик аппаратной части средств статистических измерений (повышение тактовой частоты передачи дискретных данных, введение дополнительных шин обмена информацией, увеличение объема внутренней памяти, использование разрядно-модульной организации вычислительного процесса и т.п.). Также к традиционному направлению решения этой проблемы следует отнести оптимизацию цифровых алгоритмов за счет возможности обработки массивов исходных данных в виде специально сформированных конечных алгебраических структур (групп, колец, полей и т.п.), обеспечивающих более эффективную работу цифровых устройств. Все это конечно приводит к повышению производительности обработки дискретных данных, но во всех этих случаях отсутствует концептуальность в подходе к решению проблемы быстродействия [7].

Другой не менее важной проблемой является использование в ходе комплексного анализа СП совокупности алгоритмов, которые, как правило, разрабатывались независимо и преимущественно для оценивания отдельных вероятностных характеристик. Такие алгоритмы, не будучи объединены общим принципом разработки, не являются однородными по своей структуре и организации вычислительного процесса. Вследствие этого в процессе их совместной практической реализации нельзя в полной мере обеспечить однородность вычислительной среды. Более того они могут приводить к оцениванию различных вероятностных характеристик с результатами, значительно отличающимися по своим статистическим свойствам, что может оказать существенное влияние на характер принятия решения. Поэтому их сложно совместно применять для комплексного анализа СП.

Таким образом, разработка новых подходов к дискретной обработке СП и построение на их основе высокоэффективных в вычислительном отношении цифровых алгоритмов и соответствующих им программных и технических средств, которые можно использовать в составе многофункциональных информационно-измерительных системах, предназначенных для оперативных комплексных измерений вероятностных характеристик, является актуальной задачей.

1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОМПЛЕКСНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗНАКОВОГО АНАЛОГО-СТОХАСТИЧЕСКОГО КВАНТОВАНИЯ

С точки зрения разработки быстродействующих алгоритмов практическое значение имеет такое представление организации процедур оценивания вероятностных характеристик, которое однозначно определяет содержание и последовательность действий, приводящих за приемлемое время к получению конечного результата. Если к тому же составляющие такого представления выбрать так, чтобы они отражали все комбинированные решения, основанные на сочетании допустимых действий, то это позволит охватить все многообразие синтезируемых алгоритмов. В соответствии с этим предпосылкой решения проблемы оперативного комплексного анализа СП послужила концепция обобщенного подхода к организации статистических измерений, которая предполагает систематизацию измерительных и вычислительных преобразований. Основу данной концепции составляет формализованное описание процедур измерения вероятностных характеристик с помощью обобщенного уравнения статистических измерений. Это уравнение имеет концептуальное значение в том смысле, что оно определяет единую структурно-математическую модель измерения вероятностных характеристик СП [8].

Основываясь на декомпозиции обобщенного уравнения статистических измерений, алгоритм оценивания любой вероятностной характеристики $\hat{r}[X(t)]$ исследуемого СП *X(t)* на интервале времени *T* целесообразно рассматривать как совокупность *M* взаимосвязанных базисных измерительных и вычислительных преобразований $F_i[\ldots]$, осуществляемых в пределах конечного интервала времени T_i, т.е.

$$\hat{r}[X(t)] = F_m[\ldots F_i[\ldots F_1[X(t)]\ldots]\ldots],$$

$$T = \sum_{i=1}^{M} T_i . \qquad (1)$$

Подобное представление алгоритмов статистических измерений позволило в ходе решения проблемы комплексного анализа СП согласовать и регламентировать процесс совместного оценивания вероятностных характеристик, начиная от формирования исходных данных и заканчивая получением конечных результатов измерений.

Среди всех измерительных преобразований особую роль играет аналого-цифровое преобразование, значимость которого недооценивается при классических цифровых подходах к вычислению оценок вероятностных характеристик. Часто аналого-цифровое преобразование вообще рассматривают как некоторую вынужденную служебную процедуру получения цифровых данных, что не соответствует действительности. По функциональному назначению преобразование данного вида представляет собой первичное преобразование СП в цифровую форму, так что без него принципиально не может быть реализована ни одна последующая цифровая измерительная процедура. Поэтому преобразование СП в цифровую форму следует рассматривать как важнейший этап статистических измерений, который во многом определяет как эффективность цифровых процедур обработки получаемых данных, так и организацию комплексных измерений в целом. Ключевую роль при статистических измерениях также играет оператор усреднения. Учитывая данные обстоятельства и переходя к дискретной форме представления преобразований, лежащих в основе получения конечного результата измерения $\hat{r}[X(t)]$, будем иметь

$$\hat{r}[X(t)] = \hat{M}_d[\,F_d[\,G_a[X(t)]\,]\,], \tag{2}$$

где $G_a[...]$ – оператор аналого-цифрового преобразования; $\hat{M}_d[...]$ – дискретный оператор усреднения; $F_d[...]$ – обобщенный дискретный оператор, который охватывает всю совокупность числовых преобразований выборочных значений исследуемого СП.

В соответствии с (2) задачу повышения быстродействия цифровых процедур статистических измерений с учетом их структурно-алгоритмической совместимости при проведении оперативного комплексного измерения вероятностных характеристик следует рассматривать с позиций обеспечения такого цифрового представления СП, которое приводит к согласованию цифровых данных с их последующей обработкой. Проведенные исследования показали, что для решения поставленной задачи наиболее целесообразно использовать аналого-стохастическое квантование по уровню. Данный вид квантования основан на использовании вспомогательных случайных сигналов, выполняющих роль стохастического порога квантования. Аналого-стохастическое квантование позволяет осуществлять грубое квантование без систематической погрешности независимо от статистических свойств исследуемых СП. Это открывает возможность максимально упросить цифровую обработку непрерывных СП по сравнению с классическими цифровыми алгоритмами статистических измерений.

Анализ существующих подходов к аналого-стохастическому квантованию показал, что наиболее эффективно обеспечить единство унифицированного подхода к цифровому представлению СП при комплексном измерении его вероятностных характеристик возможно за счет знакового аналого-стохастического квантования с использованием вспомогательного случайного сигнала $\xi(t)$, который имеет равномерное распределение [9,10]. По существу такое квантование представляет собой предельно грубое бинарное преобразование следующего вида

$$z(t) = \begin{cases} -1, & x(t)+\xi(t) < 0; \\ +1, & x(t)+\xi(t) \ge 0; \end{cases} \tag{3}$$

где *x(t)* – наблюдаемая реализация исследуемого СП *X(t)*.

Вспомогательный сигнал $\xi(t)$ принимает значения от $-\xi_{\max}$ до $+\xi_{\max}$. При этом абсолютное значение величины $\xi_{\max}$ выбирается исходя из выполнения условия

$$\xi_{\max} \ge \sup\left\{|\,x_{\inf}\,|, |\,x_{\sup}\,|\right\}, \tag{4}$$

где $x_{\inf}$ и $x_{\sup}$ – нижняя и верхняя границы диапазона, в пределах которого с вероятностью близкой к единице преобразуемый СП принимает свои значения.

Результат знакового аналого-стохастического квантования (3) является непрерывным во времени и ограниченным по уровню знаковым сигналом *z(t)*, который принимает всего лишь два значения –1 и +1.

На основе теории дискретно-событийного представления получена модель знакового сигнала *z(t)*. Согласно этой модели необходимо знать только одно его значение $z(t_0)$, которое соответствует начальному моменту времени квантования t_0 (оно может быть равно только –1 или +1). При этом результат знакового аналого-стохастического квантования во времени рассматривается как нерегулярный поток фронтов прямоугольных импульсов, положение которых определяться моментами времени t_i^z, в которые сигнал *z(t)* последовательно пересекает нулевой уровень. Данный поток описывается следующей функциональной зависимостью [11]

$$\vartheta(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta(t - t_i^z), \tag{5}$$

где $\delta(t)$ – дельта функция действительной переменной *t*.

Поток (5) обладает следующими свойствами:

1) при стационарности исследуемого СП поток также стационарен и не зависит от интервала времени текущего квантования;

2) поток всегда будет ординарным, так как процедура знакового аналого-стохастического квантования (3) принципиально исключает возможность появления одновременно двух и более событий, соответствующих моментам времени t_i^z пересечения преобразуемой реализации *x(t)* и вспомогательного сигнала $\xi(t)$;

3) при известном законе распределения вспомогательного сигнала $\xi(t)$ последействие потока будет зависеть только от вероятностных характеристик исследуемого СП.

Перечисленные свойства свидетельствуют о том, что при выполнении условия стационарности и однозначно определенной ординарности поток отсчетов времени t_i^z, определяемый результатом знакового аналого-стохастического квантования, характеризуется только вариацией степени последействия и является носителем информации о вероятностных свойствах исследуемого СП.

Для отсчетов времени t_i^z будет справедливо соотношение

$$t_i^z = t_0 + \sum_{k=1}^{i} \Delta t_k^z, \qquad (6)$$

где $\Delta t_i^z = t_i^z - t_{i-1}^z$ – интервалы времени между соседними фронтами импульсов.

Таким образом, при известном значении $z(t_0)$ результат знакового аналого-стохастического квантования может быть представлен в виде отсчетов моментов времени t_i^z или в виде оценок длительностей интервалов времени Δt_i^z.

Моменты времени t_i^z и интервалы времени Δt_i^z можно интерпретировать как существенные отсчеты и нерегулярный интервал дискретизации во времени, которые позволяют однозначно восстановить результат непрерывного знакового аналого-стохастического квантования. Они являются взвешенными относительно непрерывного вспомогательного сигнала $\xi(t)$ и непосредственно несут информацию о динамике изменения реализации $x(t)$ в пределах интервала времени измерения

На практике формирование числовых оценок моментов времени t_i^z и интервалов времени Δt_i^z сводится к получению их цифрового кода. Согласно классическому подходу к цифровому представлению интервалов времени для t_i^z и Δt_i^z будем иметь эквивалентные им целочисленные отсчеты

$$\eta_i^z = \mathrm{int}\left[t_i^{z_1} / \Delta t \right] \text{ и } \Delta\eta_i^z = \mathrm{int}\left[\Delta t_i^{z_1} / \Delta t \right], \qquad (7)$$

где $\mathrm{int}[\ldots]$ – оператор определения целой части числа в квадратных скобках; Δt – период счетных импульсов.

Получаем, что любая процедура статистических измерений с использованием знакового аналого-стохастического квантования сводится к обработке целочисленных значений отсчетов времени η_i^z и длительностей интервалов $\Delta\eta_i^z$.

Дискретно-событийное представление во времени знакового аналого-стохастического квантования позволило реализовать подход, позволяющий в процессе разработки цифровых алгоритмов измерения вероятностных характеристик осуществлять аналитическое вычисление интегральных операторов усреднения.

2. ЦИФРОВОЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНОК КОРРЕЛЯЦИОННОЙ И ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЙ

Корреляционная функция (КФ) и взаимная корреляционная функция (ВКФ) характеризует степень линейной связи соответственно между значениями одного СП и значениями двух СП в зависимости от интервала времени между ними.

КФ и ВКФ для эргодических СП определяются как пределы выборочных средних

$$R_{XX}(\tau) = \lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_0^T \overset{o}{x}(t)\overset{o}{x}(t-\tau)dt, \qquad (8)$$

$$R_{XY}(\tau) = \lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_0^T \overset{o}{x}(t)\overset{o}{y}(t-\tau)dt, \qquad (9)$$

где $\overset{o}{x}(t)$ и $\overset{o}{y}(t)$ – центрированные (т.е. имеющие нулевое математическое ожидание) реализации СП *X(t)* и *Y(t)*; T – интервал времени усреднения (или продолжительность времени измерения).

ВКФ является более общей формой представления стохастической взаимосвязи по сравнению с КФ. Поэтому, прежде всего, рассмотрим оценивание ВКФ.

В результате выполнения двух независимых процедур знакового аналого-стохастического квантования будем иметь сигналы $z_1(t)$ и $z_2(t)$. Они формируются с использованием двух независимых вспомогательных сигналов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, которые принимают свои значения в пределах от $-\xi_{1\max}$ до $+\xi_{1\max}$ и от $-\xi_{2\max}$ до $+\xi_{2\max}$ соответственно. При этом абсолютные значения величин $\xi_{1\max}$ и $\xi_{2\max}$ выбираются согласно (4) в зависимости от значений преобразуемого СП.

Оценку ВКФ будем искать в следующем виде [12]

$$\hat{R}_{XY}(\tau) = \xi_{1\max}\xi_{2\max} T^1_0 \int_t^{t_0+T} z_1(t) z_2(t+\tau)dt, \qquad (10)$$

где t_0 – начальный момент времени измерения.

Примем длительности знаковых сигналов $z_1(t)$ и $z_2(t)$ равными *T* и *2T*. В этом случае значение задержки τ может изменяться в пределах от нуля до своего максимального значения *T*.

Согласно принятой дискретно-событийной модели сигналов $z_1(t)$ и $z_2(t)$ достаточно знать только их мгновенные значения в момент времени t_0, и моменты времени, в которые эти сигналы меняют свое текущее значение на противоположенное. В соответствии с этим будем иметь $z_1(t_0)$ и $z_2(t_0)$, а также два множества отсчетов времени $\left\{ t_1^{z_1}, t_2^{z_1}, \ldots, t_i^{z_1}, \ldots, t_{p-1}^{z_1} \right\}$ и $\left\{ t_1^{z_2}, t_2^{z_2}, \ldots, t_j^{z_2}, \ldots, t_{q-1}^{z_2} \right\}$, в которые знаковые сигналы $z_1(t)$ и $z_2(t)$ пересекают нулевой уровень в пределах интервалов времени $t_0 < t < t_p^{z_1}$ и $t_0 < t < t_q^{z_2}$, где $t_p^{z_1} = (t_0 + T)$ и $t_q^{z_2} = (t_0 + 2T)$. На практике всегда можно считать $t_0 = 0$.

Знаковый сигнал $z_1(t)$ принимает значения равные только -1 и $+1$. Поэтому представим (10) следующим образом

$$\hat{R}_{XY}(\tau) = z_1(t_0)\xi_{1\max}\xi_{2\max}T^1\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\int_{t_i^{z_1}+\tau}^{t_{i+1}^{z_1}+\tau} z_2(t)dt \quad (11)$$

Введем обозначения $t_{\nu(i,\tau)}^{z_2} = t_i^{z_1} + \tau$ и $t_{\nu(i,\tau)+r(i,\tau)+1}^{z_2} = t_{i+1}^{z_1} + \tau$. Величины $\nu(i,\tau)$ и $r(i,\tau)$ обозначены так, чтобы показать их зависимость от момента времени $t_i^{z_1}$ и текущего значения задержки τ. Знаковый сигнал $z_2(t)$ на интервале времени $t_{\nu(i,\tau)}^{z_2} < t < t_{\nu(i,\tau)+r(i,\tau)+1}^{z_2}$ пересекает нулевой уровень в моменты времени $\left\{t_{\nu(i,\tau)+1}^{z_2}, t_{\nu(i,\tau)+2}^{z_2}, \ldots, t_{\nu(i,\tau)+r(i,\tau)}^{z_2}\right\}$, которые принадлежат множеству $\left\{t_1^{z_2}, t_2^{z_2}, \ldots, t_j^{z_2}, \ldots, t_{q-1}^{z_2}\right\}$. С учетом этих обозначений интеграл в (11) можно представить как сумму интегралов

$$\int_{t_i^{z_1}+\tau}^{t_{i+1}^{z_1}+\tau} z_2(t)dt = z_2(t_i^{z_1}+\tau)\sum_{j=\nu(i,\tau)}^{\nu(i,\tau)+r(i,\tau)}(-1)^{j-\nu(i,\tau)}\int_{t_j^{z_2}}^{t_{j+1}^{z_2}} z_2(t)dt \quad (12)$$

Знаковый сигнал $z_2(t)$ также принимает значения равные только -1 и $+1$, которые остаются постоянными в пределах интервалов времени $t_j^{z_2} \le t \le t_{j+1}^{z_2}$. Поэтому эти интегралы можно легко проинтегрировать. После их вычисления (11) примет вид

$$\hat{R}_{XY}(\tau) = z_1(t_0)\xi_{1\max}\xi_{2\max}T^{-1}\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i z_2(t_i^{z_1}+\tau)\times$$

$$\times\sum_{j=\nu(i,\tau)}^{\nu(i,\tau)+r(i,\tau)+1}(-1)^{j-\nu(i,\tau)+1}\lambda(j)t_j^{z_2}, \quad (13)$$

$$\lambda(j) = \begin{cases} 1, & j = \nu(i,\tau),\ j = \nu(i,\tau)+r(i,\tau)+1; \\ 2, & \nu(i,\tau)+1 \le j \le \nu(i,\tau)+r(i,\tau). \end{cases}$$

Чтобы получить алгоритм вычисления $\hat{R}_{XY}(\tau)$ в цифровом виде перейдем в (12) и (13) к числовому представлению значений переменных времени. Тогда $t_i^{z_1} = \eta_i^{z_1}\Delta t$ и $t_j^{z_2} = \eta_j^{z_2}\Delta t$. Продолжительность времени измерения $T = N\Delta t$. Вследствие этого $\eta_p^{z_1} = (\eta_0 + N)$ и $\eta_q^{z_2} = (\eta_0 + 2N)$. Задержка $\tau = \eta_\tau\Delta t$, и ее целочисленное значение будет находиться в интервале $0 \le \eta_\tau \le N$. При этом, если $t_0 = 0$, то $\eta_0 = 0$.

В итоге будем иметь

$$\hat{R}_{XY}(\eta_\tau) = z_1(\eta_0)\xi_{1\max}\xi_{2\max}N^{-1}\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i z_2(\eta_i^{z_1}+\eta_\tau)\times$$

$$\times\sum_{j=\nu(i,\eta_\tau)}^{\nu(i,\eta_\tau)+r(i,\eta_\tau)+1}(-1)^{j-\nu(i,\eta_\tau)+1}\lambda(j)\eta_j^{z_2}, \quad (14)$$

$$\lambda(j) = \begin{cases} 1, & j = \nu(i,\eta_\tau),\ j = \nu(i,\eta_\tau)+r(i,\eta_\tau)+1; \\ 2, & \nu(i,\eta_\tau)+1 \le j \le \nu(i,\eta_\tau)+r(i,\eta_\tau). \end{cases}$$

Вычисление оценки $\hat{R}_{XY}(\tau)$ СП *X(t)* осуществляется в соответствии с алгоритмом (14). Отличие заключается только в том, что $z_1(t)$ и $z_2(t)$ формируются в ходе выполнения двух независимых процедур знакового аналого-стохастического квантования одной центрированной реализации $\overset{o}{x}(t)$ СП *X(t)* при условии, что $\xi_{1\max} = \xi_{2\max} = \xi_{\max}$.

Нетрудно видеть, что практическая реализация алгоритма (14) не требует выполнения операций многоразрядного цифрового умножения. Это делает его более эффективным в вычислительном отношении по сравнению с классическими цифровыми алгоритмами корреляционно анализа.

3. ЦИФРОВОЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ МОЩНОСТИ

Спектральный анализ позволяет судить о частотных свойствах СП. При этом целью такого анализа, как правило, является вычисление оценки спектральной плотности мощности (СПМ), которая характеризует распределение мощности СП в пределах заданного частотного диапазона.

На практике широкое распространение получили коррелограммный и периодограммный классические методы оценивания СПМ. Оба эти метода предполагают выполнение свойства эргодичности анализируемого СП.

Коррелограммный метод основан на теореме Винера-Хинчина, согласно которой СПМ $S_{XX}(f)$ и КФ $R_{XX}(\tau)$ связаны преобразованием Фурье

$$S_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau)\exp(-2\pi f\tau)\,d\tau\ . \quad (15)$$

По своему определению $R_{XX}(\tau)$ является четной функцией. Поэтому оценка СПМ при условии, что задержка изменяется пределах $0 \le \tau \le T$, будет равна

$$\hat{S}_{XX}(f) = 2\int_0^T \hat{R}_{XX}(\tau)\cos 2\pi f\tau\,d\tau\ . \quad (16)$$

В качестве R_{XX} возьмем оценку (10), где $\overset{o}{y}(t) = \overset{o}{x}(t)$, так как анализу подвергается одна центрированная реализация $\overset{o}{x}(t)$ СП *X(t)*. Тогда будем иметь [13]

$$\hat{S}_{XX}(f) = 2\xi_{\max}^2 T^{-1} \int_0^T z_1(t) \int_t^{T+t} z_2(\tau)\cos 2\pi f(\tau - t)\, d\tau dt \quad (17)$$

Знаковые сигналы $z_1(t)$ и $z_2(t)$ формируются в пределах интервалов времени *T* и *2T*. С учетом отсчетов времени $\left\{ t_1^{z_1}, t_2^{z_1}, ..., t_i^{z_1}, ..., t_{p-1}^{z_1} \right\}$ и $\left\{ t_1^{z_2}, t_2^{z_2}, ..., t_j^{z_2}, ..., t_{q-1}^{z_2} \right\}$, в которые эти сигналы меняют свой знак, интегралы в (17) могут быть вычислены аналитически в заданных пределах. После интегрирования и перехода к числовому представлению значений переменных времени получаем цифровой алгоритм вычисления оценок СПМ

$$\hat{S}_{XX}(f_n) = \chi(n, \Delta f)\, z_1(\eta_0^{z_1}) \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \lambda(i) z_2(\eta_i^{z_1}) \times$$

$$\times \sum_{j=\nu(i)}^{\nu(i)+r(i)+1} (-1)^{j-\nu(i)} \beta(j) A(i,j,n), \quad (18)$$

$$\chi(n, \Delta f) = \frac{1}{2\Delta f}\left(\frac{\xi_{\max}}{\pi n}\right)^2,$$

$$A(i,j,n) = \cos 2\pi n N^{-1}(\eta_j^{z_2} - \eta_i^{z_1}).$$

$$\lambda(i) = \begin{cases} 1, \; i = 0, \; i = p; \\ 2, \; 1 \le i \le p-1. \end{cases}$$

$$\beta(j) = \begin{cases} 1, \; j = \nu(i), \; j = \nu(i) + r(1) + 1; \\ 2, \; \nu(i) + 1 \le j \le \nu(i) + r(i). \end{cases}$$

Алгоритм (18) обеспечивает вычисление цифровых оценок СПМ на дискретных частотах $f_n = n\Delta f$, где $\Delta f = 1/T = 1/N\Delta t$ – предельное разрешение по частоте.

Периодограммный метод позволяет вычислять усредненную оценку СПМ

$$\hat{S}_{XX}(f) = T^{-1} \,|\, X(f,T)\,|^2, \quad (19)$$

где *X(f,T)* – результат прямого преобразования Фурье центрированной реализации $\overset{o}{x}(t)$ анализируемого СП на интервале времени $0 \le t \le T$, т.е.

$$X(f,T) = \int_0^T \overset{o}{x}(t)\exp(-j2\pi f t)dt. \quad (20)$$

Квадрат модуля $|\, X(f,T)\,|^2$ можно получить как произведение комплексно-сопряженных функций $X(f,T)$ и $X^*(f,T)$. Тогда буем иметь

$$|\, X(f,T)\,|^2 = \int_0^T \int_0^T \overset{o}{x}(t_1)\overset{o}{x}(t_2)\exp(-j2\pi f(t_1 - t_2))dt_1 dt_2. \quad (21)$$

В результате перехода в (21) к знаковым сигналам, оценку (19) будем искать в следующем виде [14,15]

$$\hat{S}_{XX}(f) = \xi_{\max}^2 T^{-1} \int_0^T \int_0^T z_1(t_1) z_2(t_2)\exp(-j2\pi f(t_1 - t_2))dt_1 dt_2. \quad (22)$$

Пусть $\tau = t_1 - t_2$. Тогда после формальной замены $t = t_2$ получаем

$$\hat{S}_{XX}(f) = 2\xi_{\max}^2 T^{-1} \int_0^T \cos 2\pi f\tau \int_0^{T-\tau} z_1(t) z_2(t+\tau) dt d\tau. \quad (23)$$

Так как знаковый сигнал $z_2(t)$ определен на интервале $0 \le t \le 2T$, то $0 \le \tau \le T$. С учетом этого и после смены порядка интегрирования оценка (23) примет вид

$$\hat{S}_{XX}(f) = 2\xi_{\max}^2 T^{-1} \int_0^T z_1(t) \int_t^{T+t} z_2(\tau)\cos 2\pi f(\tau - t)\, d\tau dt. \quad (24)$$

Сопоставляя (24) с (17), приходим к выводу, что эти соотношения являются эквивалентными. Следовательно, аналогичное вычисление интегралов в (24) приводит к цифровому алгоритму (18).

Практическая реализация алгоритма (18) в основном сводится только к вычислению и обработке значений величин $A(i,j,n)$, которые представляют собой отсчеты косинусоидальной функций $\cos 2\pi n N^{-1}(\eta_j^{z_2} - \eta_i^{z_1})$. При этом он, как и алгоритм (14), не требует выполнения многоразрядных операций цифрового умножения, что также делает его эффективным в вычислительном отношении.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Концепция представления процедур измерения вероятностных характеристик в виде композиции типовых измерительных и вычислительных преобразований с одновременным учетом функциональной значимости первичного преобразования СП в цифровую форму, в качестве которого предложено использовать знаковое аналого-стохастическое квантование, позволили создать конструктивный подход к синтезу однородных по своей структуре цифровых алгоритмов. Важной особенностью такого синтеза алгоритмов является то, что он позволяет осуществлять аналитическое вычисление операторов интегрирования непосредственно на этапе перехода от аналитического представления к дискретной форме вычисления оценок вероятностных характеристик. Это было показано в процессе разработки цифровых алгоритмов вычисления оценок КФ, ВКФ и СПМ

Разработанный подход позволил также синтезировать быстродействующие цифровые алгоритмы вычисления оценок плотности распределения вероятностей, характеристической функции, коэффициентов Фурье, интервала корреляции и времени запаздывания СП. Кроме того разработаны цифровые алгоритмы оценивания моментов высших порядков и связанных с ними числовых характеристик СП. В частности разработаны алгоритмы измерения моментов КФ, коэффициентов формы, асимметрии и эксцесса [16-21]. На основе этих алгоритмов синтезирован ряд структурных схем устройств, оригинальность которых подтверждается авторскими свидетельствами СССР и патентами РФ на изобретения [22-30].

Все разработанные алгоритмы в структурном и функциональном отношении являются однородными. Это обеспечивает информационную, программную и метрологическую совместимость этих алгоритмов, что открывает возможность их комплексирования в процессе анализа СП. При этом практическая реализация данных алгоритмов не требует выполнения многочисленных операций цифрового умножения многоразрядных отсчетов СП. Это существенно расширяет область возможного применения разработанных алгоритмов для решения задач, связанных с проведением оперативного комплексного анализа СП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марпл.-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.
2. *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов. Спб.: Питер, 2002. 608 с.
3. *Allen R.L., Mills D.W.* Signal analysis: Time, frequency, scale, and structure. Wiley-IEEE Press, 2004. 962 p.
4. *Айфичер Э., Джервис Б.* Цифровая обработка сигналов. Практический подход. М.: Вильямс, 2004. 992 с.
5. *Manolakis D., Ingle V.* Applied digital signal processing. Theory and practice. Cambridge university press, 2011. 1009 p.
6. *Cohen T.F.* Analog and digital signal analysis: From basics to applications. Springer international publishing, 2016. 618 p.
7. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989. 448 с.
8. Цветков Э.И. Основы теории статистических измерений. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние,1986.
9. *Макс Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Т.1. М.: Мир, 1983. 312 с.
10. *Мирский Г.Я.* Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. М.: Энергоиздат, 1982. 320 с.
11. *Якимов В.Н.* Обобщенная математическая модель двухуровневого знакового преобразования // Техника машиностроения. 2000. № 4. С. 72-74.
12. *Якимов В.Н.* Цифровой корреляционный анализ на основе интервального представления результата знакового преобразования случайных процессов // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2001. № 11. С. 61-66.
13. *Якимов В.Н.* Цифровое оценивание спектральной плотности мощности на основе знакового стохастического квантования непрерывных процессов // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2001. № 12. – С. 60-64.
14. *Якимов В.Н.* Прямое оценивание спектральной плотности мощности на основе дискретно-временного представления знакового аналого-стохастического квантования непрерывного случайного процесса // Измерительная техника. 2009. № 3. С. 13-17.
15. *Yakimov V.N.* Direct spectral power density estimation from a discrete-time representation of stochastic analog quantization for an analog random process // Measurement Techniques, Publisher: Springer New York, 2009, Vol. 52, No. 3, pp. 223-230.
16. Якимов В.Н. Непараметрическое оценивание плотности распределения вероятностей с использованием знакового квантования // Измерительная техника. 2002. № 3. С. 19-23.
17. Yakimov V.N. Nonparametric estimation of probability distribution density using sign quantization // Measurement techniques, Publisher: Springer New York, 2002, Vol. 45, No. 3, pp. 248-256.
18 Якимов В.Н. Определение интервала корреляции случайного процесса на основе вычисления свертки выборочных функций // Измерительная техника. 2002. № 9. С. 7-11.
19. Yakimov V.N., Determination of the correlation interval of a random process by calculating the convolution of sample functions // Measurement techniques, Publisher: Springer New York, 2002, Vol. 45, No. 9, pp. 901-907.
20. Якимов В.Н., Машков А.В. Цифровое оценивание моментов корреляционной функции на основе знакового аналого-стохастического квантования // Измерительная техника. 2016. №1. С. 11-13.
21. Yakimov V.N., Mashkov A.V., Digital estimation of correlation function moments using analog-stochastic sign quantization of a random process // Measurement techniques, Publisher: Springer New York, 2016, Vol. 59, No. 1, pp. 12-15.
22. Якимов В.Н., Волков И.И. Устройство для определения интервала корреляции: А.С. 1334166 (СССР). 1987.
23. Якимов В.Н., Волков И.И. Устройство для определения коэффициента формы случайного сигнала: А.С. 1336054. (СССР). 1987.
24. Якимов В.Н. Устройство для определения одномерного момента k-ого порядка: А.С. 1608707 (СССР). 1990.
25. Якимов В.Н. Устройство для определения коэффициента асимметрии случайного процесса: Пат. 2037879 (РФ). 1995.
26. Якимов В.Н. Устройство для определения плотности распределения вероятностей случайного процесса: Пат. 2174706 (РФ). 2001.
27. Якимов В.Н. Многоканальный знаковый коррелометр: Пат. 2177637 (РФ). 2001.
28. Якимов В.Н. Устройство для определения коэффициента взаимной корреляции случайных сигналов: Пат. 2181501 (РФ). 2002.
29. Якимов В.Н. Устройство для выполнения преобразования Фурье: Пат. 2182724 (РФ). 2002.
30. Якимов В.Н. Параллельный знаковый коррелометр: Пат. № 2252450 (РФ). 2005.

DIGITAL COMPLEX STATISTICAL ANALYSIS BASED ON SIGN-FUNCTION REPRESENTATION OF RANDOM PROCESSES

Samara State Technical University

The concept of complex operative definition of characteristics of stationary random processes is considered in article. The basis of this concept is formalized description of a measurement of the probability characteristics by using generalized equation of statistical measurements. The algorithm for estimating any probability characteristics is considered as a set of interrelated basic measurement and computational transformations. Special attention is paid to the primary digital transformation of a random process. The conversion to digital form is considered as the most important stage of statistical measurement that determines the efficiency of digital processing of the received data and the organization of complex measurements. Sign-function analog-stochastic quantization is proposed to use as a standardized primary transformation of random processes in digital form. This type of quantization based on the use of random auxiliary signals which perform the function of stochastic quantization threshold. The result model of the sign-function analog-stochastic quantization obtained on the basis of the theory of discrete-event simulation. Using sign-function stochastic quantization has allowed realizing an approach that allows the analytical calculation of the operators of integration in the development of digital algorithms for estimating probabilistic characteristics. We described the development of fast digital algorithms for computing estimates of the correlation and cross-correlation functions. Also presents the development of numerical algorithm for the calculation of power spectral density. A unified approach to algorithm design ensures homogeneous structure and informational, programming and metrological compatibility. This opens up the possibility of integration of these algorithms for rapid statistical analysis of random processes.

Keywords: random process, digital algorithm, probabilistic characteristics, complex statistical measurements, analog-stochastic quantization, sign signal.

Vladimir Yakimov, Doctor of Technics, Professor at the Information Technology Department.
E-mail: yvnr@hotmail.com