

УДК539.3

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРУЖЕНИИ

© 2016 Н.И. Дедов, В.Н. Исуткина

Самарский государственный технический университет

Статья поступила в редакцию 20.09.2016

В статье рассматривается алгоритм проектирования цилиндрической оболочки минимального веса при неравномерном нагружении. Задачи оптимизации несомненно представляют особый интерес для конструкций с большим числом геометрических параметров, геометрических и физических ограничений. В данной задаче оптимальный проект отыскивается в классе конструктивно – ортотропных оболочек. Алгоритм многопараметрического оптимального проектирования предусматривает использование эффективного метода декомпозиции, позволяющего свести задачи большой размерности к решению ряда более простых задач. Задача поиска минимального веса цилиндрической оболочки является задачей нелинейного программирования и представляет большой интерес для практических приложений при проектировании тонкостенных оболочечных конструкций.

*Ключевые слова:* алгоритм, оптимальное проектирование, метод декомпозиции, подкрепленная оболочка, целевая функция, напряжение, устойчивость

В теории оптимального проектирования значительное место занимают вопросы расчета подкрепленных оболочек минимального веса. Для цилиндрических подкрепленных оболочек актуальным является определение геометрических параметров конструкции: толщины обшивки, размеров продольных и поперечных подкреплений при неосесимметричном нагружении. Продольные и поперечные подкрепления могут иметь различную форму сечения: прямоугольник, уголок или тавр.

Рассматривается цилиндрическая подкрепленная оболочка, нагруженная осевой неосесимметричной сжимающей нагрузкой, меняющейся по образующей оболочки, изгибающим моментом и внутренним давлением. Задача оптимального проектирования относится к задачам нелинейного программирования.

Расчет конструкции подкрепленной цилиндрической оболочки при неосесимметричном нагружении проводится с использованием метода разделения переменных. Внешние нагрузки, перемещения, деформации оболочки разлагаются в ряды Фурье. Последовательно рассматривается нагружение оболочки осесимметричной нагрузкой при  $n=0$ , обратносимметричной нагрузкой при  $n=1$  и неосесимметричной самоуравновешенной нагрузкой при  $n=2$ .

Выражение для внутренних усилий в сечениях подкрепленной цилиндрической оболочки

продольными и кольцевыми ребрами получим в виде [1]

$$T_1(\xi, \varphi) = -\frac{N(\xi)}{2\pi r} - \frac{M(\xi)}{\pi r^2} - \sum_{n=2}^{\infty} q_{nc} e^{-\lambda \xi} \cdot \cos n \varphi \cos \lambda \xi - \sum_{n=2}^{\infty} q_{ns} e^{-\lambda \xi} \sin n \varphi \cos \lambda \xi,$$

где  $\xi = \frac{x}{r}$  – безразмерная координата в продольном направлении,  $\varphi$  – угловая координата в кольцевом направлении,  $N(\xi)$ ,  $M(\xi)$  – осевая сила и изгибающий момент, действующие на цилиндрическую подкрепленную оболочку,  $q_{nc}$ ,  $q_{ns}$  – коэффициенты разложения осевой нагрузки в ряд Фурье,  $h$ ,  $r$  – толщина и радиус цилиндрической оболочки. Внутреннее усилие  $T_1(\xi, \varphi)$  изменяется в продольном и поперечном направлениях.

Окружные усилия определяем от действия внутреннего давления, изменяющегося в продольном направлении

$$T_2(\xi) = P(\xi) r,$$

где  $P(\xi)$  – внутреннее давление.

Оптимизацию веса подкрепленной цилиндрической оболочки осуществляем по параметрам толщины обшивки  $h$ , площади продольного набора  $F_1$ , площади поперечного набора  $F_2$ , шагов продольного и поперечного наборов  $l_1$ ,  $l_2$  соответственно. При оптимальном проектировании должны учитываться условия прочности, устойчивости и жесткости, а также конструктивные и технологические ограничения.

Целевую функцию веса подкрепленной цилиндрической оболочки выразим через параметры проектирования  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  [2]

*Дедов Николай Иванович, кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры «Механика».*

*E-mail: mech\_kaf@samgtu.ru*

*Исуткина Вера Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Высшая математика и прикладная информатика».*

*E-mail: isutkina\_yn@mail.ru*

$$G = 2\pi r^2 L \gamma w 10^{-2},$$

$$W = x_1 + \frac{0,01\omega_1 x_2 x_4}{2\pi} + \frac{0,01\omega_2 x_3 x_5}{L_0},$$

где  $x_1 = \frac{h 10^2}{r}$  – параметр толщины обшивки,

$x_2 = \frac{F_1 10^4}{r^2}$ ,  $x_3 = \frac{F_2 10^4}{r^2}$  – параметры пло-

щадей продольного и поперечного наборов,  $x_4 = m_1$ ,  $x_5 = m_2$  – количество продольных и поперечных ребер,  $L_0 = \frac{L}{r}$  – параметр длины

цилиндрической оболочки,  $\omega_i$  – коэффициент наличия подкрепляющего набора,  $\gamma$  – удельный вес материала конструкции оболочки.

Целевая функция определяется компонентами вектора геометрических параметров  $X$ . Система ограничений, которым должен удовлетворять вектор  $X$ , состоит из геометрических ограничений и физических ограничений по требованиям прочности и устойчивости.

Предельные ограничения для геометрических параметров представлены в виде пяти неравенств

$$q_i(x) = \frac{\min x_i}{x_i} \leq 1, \quad i = \bar{1}, 5,$$

где  $\min x_i$  – минимально допускаемое значение геометрического параметра из конструктивных и технологических соображений,  $x_i$  – значения геометрических параметров в процессе оптимизации конструкции подкрепленной цилиндрической оболочки. Дополнительные ограничения накладываются на геометрические размеры продольных и поперечных ребер в зависимости от формы их сечений.

На рис. 1 показан элемент конструкции цилиндрической подкрепленной оболочки с геометрическими размерами подкрепляющих ребер, шаг продольных и кольцевых ребер и толщина цилиндрической оболочки. Подкрепляющие ребра имеют сечение в виде прямоугольника.

Физические ограничения по прочности обшивки и подкрепляющего набора в продольном и поперечном направлениях запишем в виде

$$q_i = \frac{\sigma_i}{[\sigma]} \leq 1, \quad i = 1, 2,$$

где  $\sigma_i$  – меридианальные или окружные напряжения, действующие в элементах конструкции оболочки,  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение по прочности материала конструкции оболочки.

Ограничения по устойчивости учитывают местную и общую потерю устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки. Местная потеря устойчивости обшивки между ребрами рассматривается как устойчивость пластины с шарнирно опертыми краями, а ребра как устойчивость пластины с тремя шарнирно опертыми краями и с четвертым свободным краем [3]

$$\sigma_{кр,о} = k_1 E \left( \frac{h_0}{l_1} \right)^2, \quad \sigma_{кр,р} = k_2 E \left( \frac{h_p}{b} \right)^2,$$

где  $k_1 = 3,6$  – коэффициент для определения критического напряжения пластины,  $k_2 = 0,42$  – коэффициент для определения критического напряжения для ребра.

Критическая сила общей потери устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки [4]

$$\bar{N}_{кр} = \min_{m,n} \left\{ \left[ m^2 \pi^2 D_1 / L_0^2 \right] \psi_m(\beta) \right\}, \quad \beta = \frac{nL_0}{m\pi},$$

где  $m, n$  – количество полуволн в продольном и поперечном направлениях.

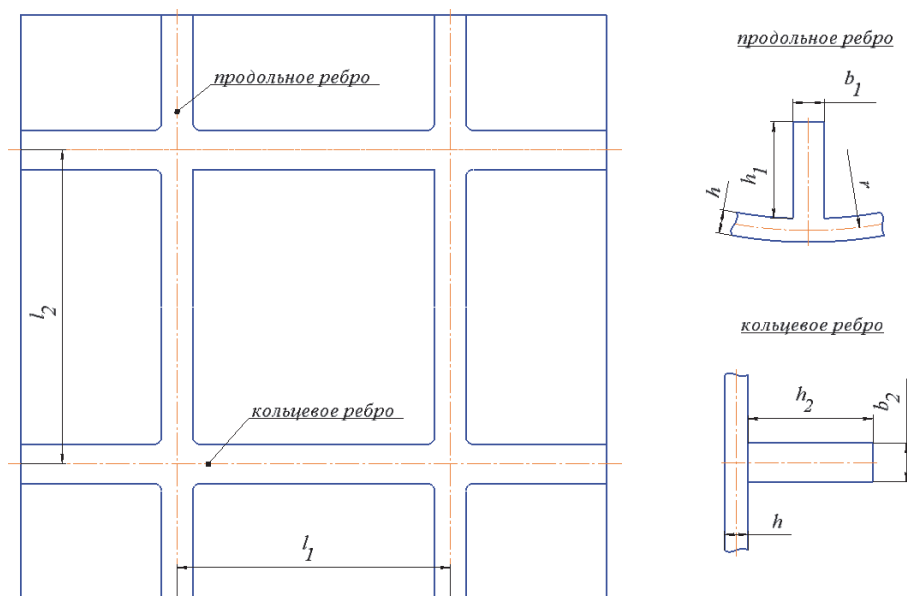


Рис. 1. Элемент конструкции цилиндрической подкрепленной оболочки

В ограничениях по устойчивости введены параметры

$$\bar{N}_{kp} = \frac{N_{kp} \cdot 10^6}{2\pi r^2 E}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma \cdot 10^4}{E}.$$

Ограничения по местной устойчивости

$$q_i(x) = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_{кр,i}} \leq 1, \quad i = 1, 2,$$

где  $\bar{\sigma}_{кр,i}$  – критические напряжения обшивки и ребер.

Ограничения по общей устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки

$$q_i(x) = \frac{\bar{N}}{\bar{N}_{кр,i}} \quad i = 1, 2,$$

где  $\bar{N}_{кр,i}$  – критическая нагрузка общей потери устойчивости по несимметричной и симметричной формам.

При решении задач оптимизации большой размерности используется метод декомпозиции [5]. Декомпозиция задачи оптимального проектирования проведена не только на уровне исходной постановки задачи, но и на каждом шаге вычисления алгоритма, основанного на замене исходной задачи последовательностью упрощенных подзадач. Характерной причиной всех методов декомпозиции является снижение требований к мощности ЭВМ, удобству использования ограничений, связанных только с решаемой простейшей подзадачей.

В данном случае задача многопараметрического оптимального проектирования разбивается на три подзадачи меньшей размерности. Для решения первой подзадачи используется метод деформированного треугольника (рис. 2).

В результате решения первой подзадачи методом деформированного треугольника определяется оптимальное количество продольного и поперечного набора оболочки.

На геометрические параметры подкрепленной оболочки накладываются конструктивные ограничения

$$m_{1min} < m_1 < m_{1max}, \quad m_{2min} < m_2 < m_{2max},$$

где  $m_1, m_2$  – количество продольных и кольцевых ребер соответственно. Имеем двухпараметрическую задачу со структурными параметрами

$$m_1 = \frac{L}{l_1}, \quad m_2 = \frac{2\pi r}{l_2}.$$

В координатах  $x_p, x_s$  выбираются три точки, не лежащие на одной прямой, для которых вычисляются значения целевой функции веса  $W$ . Метод деформированного треугольника заключается в замене исходного треугольника на новый, при этом «худшая» вершина треугольника отбрасывается и заменяется более подходящей точкой со значением целевой функции веса  $W_p$  на каждой итерации.

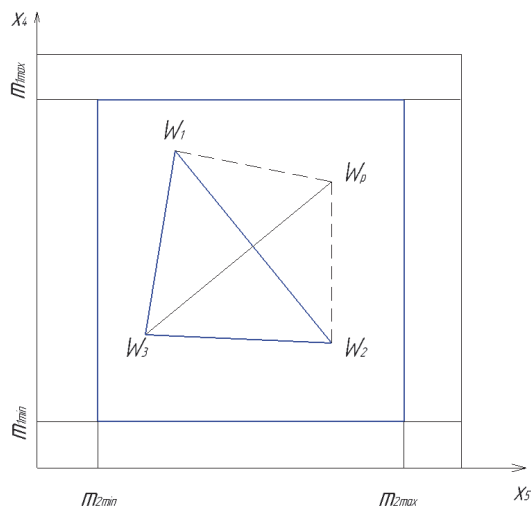


Рис. 2. Метод деформируемого треугольника

«Худшая» вершина деформируемого треугольника определяется из сравнения значений целевых функций веса в трех вершинах треугольника

$$W_3 > W_2 > W_1.$$

Вершина треугольника с наибольшим значением целевой функции веса  $W_3$  считается «худшей».

Определим центр тяжести двух вершин  $W_1, W_2$

$$x_{4c} = \frac{x_{41} + x_{42}}{2}, \quad x_{5c} = \frac{x_{51} + x_{52}}{2},$$

построим координаты пробной точки

$$x_n = x_c + \alpha(x_c - x_3),$$

где  $\alpha > 0$  и вычислим значение целевой функции  $W_n$ .

Точка  $x_n$  получается отражением точки  $x_3$ , а коэффициент  $\alpha$  называется коэффициентом отражения.

Проводится анализ значений целевой функции веса в вершинах полученного треугольника

$$W_1, W_2, W_n.$$

В зависимости от значения величины  $W_p$  возможны следующие случаи.

1. Если значения  $W_2 > W_n > W_p$ , то точка  $x_3$  заменяется на точку  $x_n$  и итерации продолжают.

2. Если значение  $W_n < W_p$ , то точка  $x_n$  является лучшей точкой и следующая итерация делается с определением координаты точки в этом направлении по формуле

$$x_p = x_c + \beta(x_n - x_c),$$

где  $\beta > 1$  – коэффициент растяжения.

Если  $W_p < W_n$ , то растяжение уменьшает значение целевой функции веса и точка  $x_3$  заменяется на точку  $x_p$ .

3. Если значение  $W_n > W_2$ , то треугольник необходимо сжимать и точка  $x_p$  перемещается в направлении точки  $x_3$ . Координаты этой точки определяют по формулам

$$x_o = x_c + \gamma(x_3 - x_c), \quad \text{если } W_n \geq W_3,$$

$$x_o = x_c + \gamma(x_n - x_c), \text{ если } W_n < W_3,$$

где  $0 < \gamma < 1$  – коэффициент сжатия. Если значение  $W_o < \min(W_n, W_3)$ , то точка  $x_3$  заменяется на точку  $x_o$ . В случае невыполнения условия процесс итераций продолжается.

Точка  $x_p$  получается отражением точки  $x_3$ , а коэффициент  $\alpha$  называется коэффициентом отражения. В процессе итераций при деформировании треугольника помимо отражения используется процедуры растяжения и сжатия вершин треугольника, а также периодически проводится замена текущего треугольника на правильный. При этом используются две «лучшие» вершины текущего треугольника.

Для решения второй подзадачи, определения оптимальных значений толщины обшивки и площадей поперечного набора, предлагается алгоритм, основанный на применении метода спуска по градиенту.

Вначале осуществляется спуск на границу допустимой области из точки «s», находящейся на плоскости равного уровня целевой функции, на которой  $W = W_o$

$$x_{i,k} = x_{i,s} - \beta t \cdot \frac{W_o}{\|\nabla W\|^2} \cdot \frac{dw}{dx_i},$$

где  $x_{i,s}$  – координата точки s,  $\beta$  – коэффициент, определяющий величину шага по градиенту,  $\|\nabla W\|$  – модуль градиента целевой функции,

$\frac{\partial W}{\partial x_i}$  – проекция градиента целевой функции

веса,  $t$  – число шагов до активного ограничения.

Далее вычисляются координаты точки «O», удаленной от активных ограничений на расстояние, равное среднеарифметическому расстоянию до активных ограничений по различным направлениям

$$x_{i,o} = x_{i,s} + R_{i,o},$$

где  $R_{i,o} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^M R_{i,k} \cdot n_{i,k}$  – координата вектора,

$n_{i,k}$  – проекция единичного вектора выбранного направления на плоскость равного уровня.

В результате решения третьей подзадачи определяются геометрические размеры сечений подкрепляющих продольных и кольцевых ребер по заданным площадям.

В качестве примера исследуем определение оптимальных геометрических характеристик цилиндрической оболочки подкрепленной внутренними продольными и кольцевыми ребрами прямоугольного сечения. Геометрические характеристики: радиус цилиндрической оболочки 3,85 м, длина 11 м.

Подкрепленная цилиндрическая оболочка нагружена осевой сжимающей силой, которая изменяется вдоль образующей. Интенсивность несимметричной распределенной по торцу оболочки нагрузки меняется от – 1650 кН/м до 1100 кН/м.

Переменное по длине оболочки давление на внутренней ее поверхности меняется по линейному закону в сечениях в пределах от 0,322 МПа на нижнем торце оболочки до 0,121 МПа на верхнем торце.

Алгоритм оптимизации подкрепленной цилиндрической оболочки позволяет определять оптимальные значения толщин обшивки в сечениях оболочки, площадей ребер продольного и кольцевого наборов, количество продольных и кольцевых ребер. При наличии нескольких значений давления в сечении оболочки расчет оптимальных параметров проводится для давления, соответствующего большему нагружению конструкции.

Результаты расчетов оптимальных геометрических параметров подкрепленной цилиндрической оболочки приведены в таблице.

Расчеты проведены для 12 сечений, начиная с нижнего торца оболочки.

В результате расчета оптимальный шаг продольных ребер получается переменным вдоль образующей оболочки, что недопустимо с точки зрения рациональной работы конструкции на осевые нагрузки, так как передача усилий ребрами со смещенными осями потребует увеличение веса конструкции.

Поэтому, оптимальный шаг продольных ребер должен быть постоянным для всей оболочки. Необходимо провести решение очередной подзада-

**Таблица.** Результаты расчетов оптимальных геометрических параметров подкрепленной цилиндрической оболочки

№ сечения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$T_1 \cdot 10^{-2}$ , кН	325	260	211	159	182	238	174	144	236	304	287	222
$l_1 \cdot 10^2$ , м	18,7	16,4	14,4	12,0	13,5	16,6	14,6	15,1	15,9	17,4	16,3	14,4
$l_2 \cdot 10^2$ , м	19,9	22,1	17,1	15,8	15,7	14,6	16,8	183	16,1	20,3	14,0	14,1
$F_1 \cdot 10^4$ , мм <sup>2</sup>	1,87	1,76	1,53	1,37	1,42	1,29	1,18	1,39	1,36	1,32	1,23	0,98
$F_2 \cdot 10^4$ , мм <sup>2</sup>	2,26	2,3	2,11	1,98	1,83	1,80	1,76	1,67	1,61	1,56	1,29	1,16
$h \cdot 10^3$ , м	3,6	3,4	3,3	3,2	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,6
$h_1 \cdot 10^3$ , м	45	44	38	34	36	32	30	34	34	33	31	25
$h_2 \cdot 10^3$ , м	56	57	53	50	46	45	44	42	40	39	32	29

чи оптимизации геометрических характеристик подкрепленной оболочки, которая заключается в выборе одного шага из 12, который и будет оптимальным для всей конструкции. Указанная подзадача может быть решена также для определения постоянного шага кольцевых ребер. Конкретное решение о выборе шага продольных и кольцевых ребер принимается с учетом технологических и экономических требований к проектируемой конструкции.

Разработанный алгоритм оптимального проектирования несимметрично нагруженных цилиндрических подкрепленных оболочек позволяет проектировать реальные оболочечные конструкции переменного сечения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моссаковский В.И., Гудрамович В.С., Макеев Б.М. Контактные задачи теории оболочек и стержней. М.: Машиностроение, 1978. 248 с.
2. Рябов А.А., Столяров Н.Н. Весовая оптимизация продольно сжатых подкрепленных цилиндрических оболочек // Тр. семинара. Вып. XII. Казань: 1979. С.161-171.
3. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
4. Маневич А.И. Об устойчивости эксцентрично подкрепленной цилиндрической оболочки // Тр. Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Днепропетровск, 1969. М.: Наука, 1970. С.403-407.
5. Цурков В.И. Декомпозиция в задачах большой размерности. М.: Наука. 1981, 362 с.

## DECOMPOSITION METHODS IN OPTIMAL DESIGN OF CYLINDRICAL SHELLS

© 2016 N.I. Dedov, V.N. Isutkina

Samara State Technical University

The article discusses the algorithm design of the cylindrical shell of the minimum weight when asymmetrical loading. Optimization problems certainly are of particular interest for structures with many geometric parameters and the geometric and physical constraints. In this problem, the optimal design is sought in the class of structurally - orthotropic shells. Multiparameter algorithm of optimal design involves the use of an effective decomposition method, reduces the problem of large dimension to solving a series of simple tasks. The problem of finding the minimum weight of the cylindrical shell is a nonlinear programming problem and are of great interest for practical applications in the design of thin-walled shell structures.

*Keywords:* algorithm, optimal design, decomposition method, thin-walled shell structures, the objective function, stress, stability.

---

*Nikolay Dedov, Candidate of Technics, Associate Professor, Professor at the Mechanics Department.*

*E-mail: nikolai\_dedov@mail.ru*

*Vera Isutkina, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor at the High Mathematics and Applied Computer Science Department.*