

## МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ ПРЯМОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

© 2017 В.В. Никонов

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва

Статья поступила в редакцию 21.02.2017

В статье решается задача прямого численного моделирования течения разреженного газа методом Монте-Карло. Рассмотрены три варианта задачи одномерного течения газа с помощью оригинального метода Монте-Карло и его модификации. По результатам численного моделирования можно сделать вывод, что модифицированный метод Монте-Карло более быстр по сравнению с оригинальным методом.

*Ключевые слова:* разреженный газ, прямое моделирование, численное моделирование, метод Монте-Карло, одномерное течение.

### ВВЕДЕНИЕ

Первый вероятностный метод моделирования течений с поверхностями отражения был введен Naviland и Lavin [1] и назывался метод тестовых частиц Монте-Карло.

Данный метод применялся для моделирования течений без столкновений и имел дело со сложными течениями, которые включают многоповерхностные отражения. При моделировании переходных режимов становится необходимым вычислять типичные межмолекулярные столкновения в дополнение к молекулярно-поверхностному взаимодействию.

Метод, учитывающий межмолекулярные столкновения, был в первый раз применен Bird к задаче релаксации однородного газа [2], и назывался метод моделирования Монте-Карло. Далее данный метод был применен Bird к моделированию задачи о распространении ударной волны [3]. Hammersley и Handscomb [4] установили, что методы Монте-Карло работают в области экспериментальной математики, которая связана с теорией вероятности. Они также применили термин «прямое моделирование» к расчету вероятностных задач данным методом. В настоящей работе используется дальнейшее развитие метода прямого моделирования Монте-Карло (ПММК) [5, 6]. Следует отметить, что метод ПММК является затратным по вычислительным ресурсам. Целью данного исследования являлось сокращение времени расчета задач с помощью ПММК.

### 1. ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА МЕТОДА

В работе рассматриваются схемы метода

---

*Никонов Валерий Владимирович, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры конструкции и проектирования летательных аппаратов.  
E-mail: v\_nikonov@mail.ru*

ПММК для случая одномерного течения, хотя для частиц вычисляются все три компоненты скорости, но учитываются перемещения частиц только вдоль оси OX. В методе, описанном в [5], область течения разбивается основной и вспомогательной однородными сетками. Основная сетка имеет квадратные ячейки, при этом в каждой ячейке содержится несколько подъячеек вспомогательной сетки. В начальный момент времени в ячейках сетки располагаются частицы случайным образом с компонентами скорости:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_m a \cos \theta \cos \varphi, \\ v_2 &= u_m a \cos \theta \sin \varphi, \\ v_3 &= u_m a \sin \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$a = \sqrt{-\ln(R')}, \quad (2)$$

где  $R'$  – случайная величина из диапазона  $R' \in (0, 1)$ ,

$$\varphi = 2\pi R', \quad (3)$$

$$\theta = \pi(R' - 1/2), \quad (4)$$

$$u_m = \sqrt{2kT_\infty / m_m}, \quad (5)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана,  $T_\infty$  – температура течения,  $m_m$  – молекулярная масса.

Затем частицы перемещаются со своей скоростью за шаг по времени  $\Delta t$  в новое положение

$$x^i = x^{i-1} + v_1^{i-1} \Delta t. \quad (6)$$

Если частицы вылетают за расчетную область, то они удаляются. При этом, если число частиц становится меньше максимального числа частиц, то новые частицы добавляются в течение. После этого заполняются вспомогательные массивы, ставящие в соответствие каждой ячейке сетки несколько частиц, которые в ней находятся. Причем в оригинальной программе

Bird [5] заполняется также массив, ставящий в соответствие каждой подъячейке сетки частицы газа, которые в ней находятся. В предлагаемой модифицированной программе данный шаг отсутствует, так как вспомогательная сетка с подъячейками была исключена из схемы метода ПММК.

На следующем шаге алгоритма вычисляются скорости после столкновения частиц. В оригинальной программе [5] выбирается пара частиц для столкновения из подъячеек, ближайших к рассматриваемой ячейке, методом случайного выбора, но в пределах одной ячейки сетки. В предлагаемой модифицированной схеме метода пары частиц выбираются сразу из рассматриваемой ячейки сетки методом случайного выбора, что сильно упрощает алгоритм.

Компоненты относительной скорости двух столкнувшихся частиц  $l$  и  $m$  определяются следующим образом

$$u_j = v_{jl} - v_{jm}, \quad j = \overline{(1,3)}. \quad (7)$$

Относительная скорость частиц по модулю определится как

$$v^* = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}. \quad (8)$$

Если выполняется условие

$$|\alpha - 1| < 0.001, \quad (9)$$

то расчет ведется по модели твердых ядер, в противном случае расчет выполняется по модели мягких ядер. Здесь  $\alpha$  – величина, обратная параметру разброса в модели мягких ядер.

Промежуточные величины скорости для модели мягких ядер рассчитываются с помощью следующих формул

$$u_1^* = u_1 \cos \chi + d \sin \chi \sin \varphi,$$

$$u_2^* = u_2 \cos \chi + \sin \chi (v^* u_3 \cos \varphi - u_1 u_2 \sin \varphi) / d, \quad (10)$$

$$u_3^* = u_3 \cos \chi - \sin \chi (v^* u_2 \cos \varphi + u_1 u_3 \sin \varphi) / d,$$

где

$$d = \sqrt{u_2^2 + u_3^2}, \quad (11)$$

$$\varphi = 2\pi R', \quad (12)$$

$$\cos \chi = 2R'^{\alpha} - 1, \quad (13)$$

$$\sin \chi = \sqrt{1 - \cos^2 \chi}. \quad (14)$$

Для модели твердых ядер справедливы следующие формулы

$$\cos \chi = 2R' - 1, \quad (15)$$

причем  $\sin \chi$  и  $\varphi$  определяются по формулам (14) и (12).

Промежуточные величины скорости для модели твердых ядер рассчитываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1^* &= v^* \sin \chi \cos \varphi, \\ u_2^* &= v^* \sin \chi \sin \varphi, \\ u_3^* &= v^* \cos \chi. \end{aligned} \quad (16)$$

Скорости частиц после столкновения вычисляются по скоростям центра масс частиц  $l$  и  $m$  до столкновения и скоростям, определяемым по формулам (10) или (16),

$$\begin{aligned} v_{jl} &= \frac{v_{jl} + v_{jm} + u_j^*}{2}, \\ v_{jm} &= \frac{v_{jl} + v_{jm} - u_j^*}{2}, \quad j = \overline{(1,3)}. \end{aligned} \quad (17)$$

После этапа столкновений частиц следует этап вычисления параметров потока. Параметры потока, как и в [5], вычислялись каждые четыре шага по времени. Скорость потока в  $k$ -ой ячейке сетки определяется следующим образом

$$\bar{v}_{jk} = \frac{\sum_{m=1}^{M_k} v_{jkm}}{M_k}, \quad (18)$$

где  $v_{jkm}$  –  $j$ -ая компонента скорости  $m$ -ной частицы в  $k$ -ой ячейке сетки;  $M_k$  – число образцов для измерений в  $k$ -ой ячейке сетки.

На этом численная схема метода завершается и происходит переход к следующему шагу по времени.

## 2. НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Было рассмотрено три варианта течения:

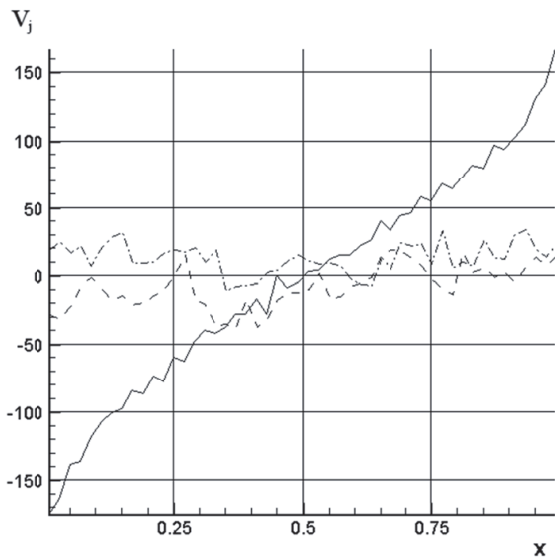
1) Одномерная область, открытая с обеих границ, через которые размещенные в начальный момент времени частицы (со случайными скоростями) могли свободно вылетать из области.

2) Такая же область (как в первом случае), с левой границы которой в нее добавлялись частицы со случайными скоростями.

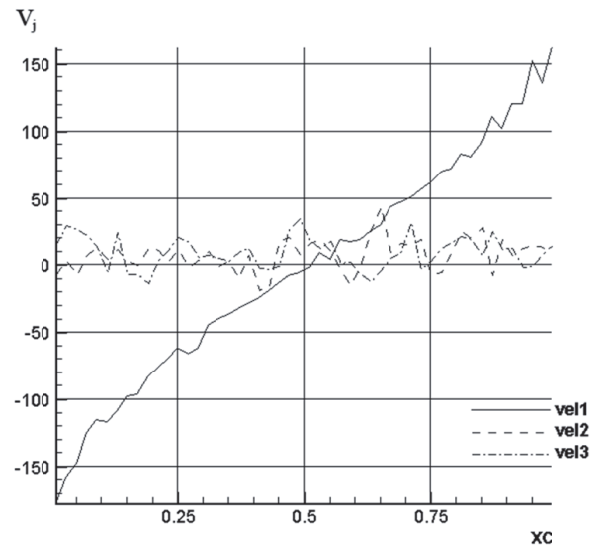
3) Такая же область (как в первом случае), с левой границы которой в нее добавлялись частицы со скоростями 400 м/с плюс скорость случайного блуждания.

Расчетная область представляла собой отрезок длиной 1 м. Однородная сетка состояла из 50 ячеек и 400 подъячеек. Для расчетов, представленных ниже, использовалась модель твердых ядер, т.е.  $\alpha = 1$  в условии (9). Температура газа в области [в выражении (5)] равнялась 300 К. Время моделирования составляло 2 с.

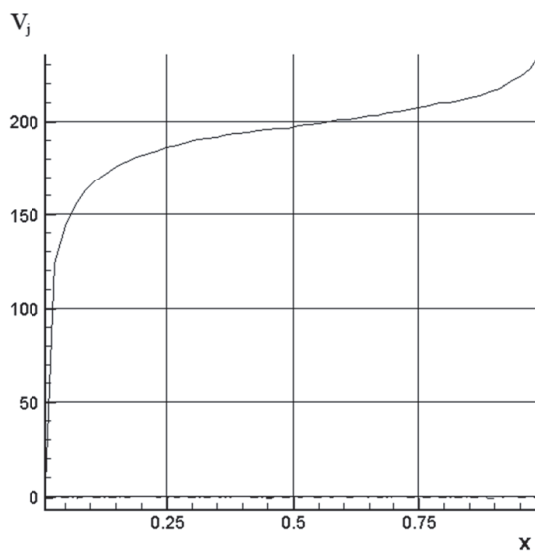
На рис. 1 и 2 представлены результаты «первого» варианта течения, полученные с помощью оригинального метода ПММК и модифицированного метода соответственно. На рис. 3 и 4 показаны результаты «второго» варианта течения, полученные, как с помощью оригинального метода ПММК, так и модифицированного



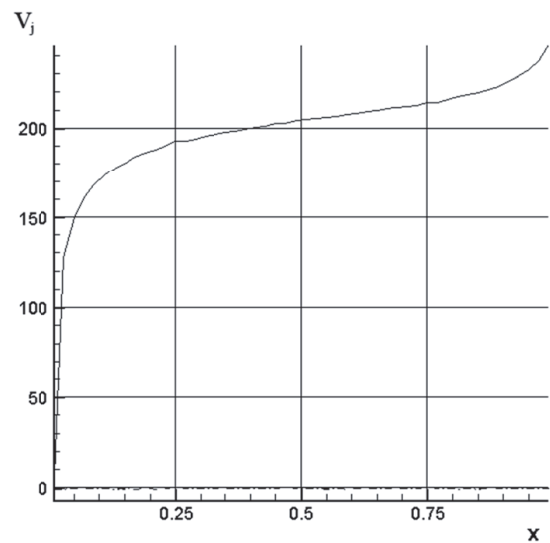
**Рис. 1.** Распределение скорости: «первый» вариант течения, метод ПММК Bird [5];  
 —  $V_1$ , - - -  $V_2$ , - · - · -  $V_3$



**Рис. 2.** Распределение скорости: «первый» вариант течения, модификация метода ПММК Bird;  
 —  $V_1$ , - - -  $V_2$ , - · - · -  $V_3$



**Рис. 3.** Распределение скорости: «второй» вариант течения, метод ПММК Bird [5];  
 —  $V_1$ , - - -  $V_2$ , - · - · -  $V_3$



**Рис. 4.** Распределение скорости: «второй» вариант течения, модификация метода ПММК Bird;  
 —  $V_1$ , - - -  $V_2$ , - · - · -  $V_3$

метода. На рис. 5 и 6 представлены результаты «третьего» варианта течения, полученные с помощью оригинального метода ПММК и модифицированного метода. На рис. 3 – 6 кривые, соответствующие компонентам скорости  $V_2$  и  $V_3$  сливаются с осью абсцисс  $v_j = 0$ .

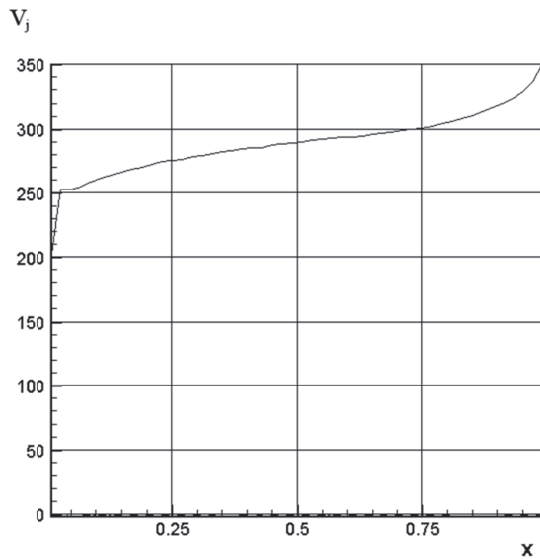
### ВЫВОДЫ

По численным результатам моделирования методом ПММК рассмотренных задач можно сделать следующий вывод, что моди-

фицированный метод ПММК является более быстрым по сравнению с оригинальным методом Bird [5], при этом его алгоритм более прост.

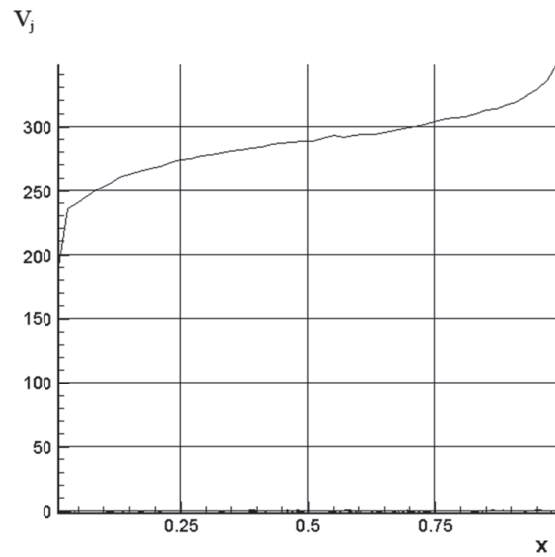
### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Haviland, J.K., Lavin M.L. Applications of the Monte Carlo method to heat transfer in a rarefied gas // Phys. Fluids. Vol. 5. 1962. Pp. 1399-1405.
2. Bird G.A. Approach to translational equilibrium in rigid sphere gas // Phys. Fluids. Vol. 6. 1963. P. 1518-1519.



**Рис. 5.** Распределение скорости:  
«третий» вариант течения,  
метод ПММК Bird [5];

—  $V_1$ , - - -  $V_2$ , - · - · -  $V_3$



**Рис. 6.** Распределение скорости:  
«третий» вариант течения,  
модификация метода ПММК Bird;

—  $V_1$ , - - -  $V_2$ , - · - · -  $V_3$

3. Bird G.A. Shock wave structure in a rigid sphere gas // Rarefied gas dynamics (ed. J.H. de Leeuw). Vol. 1. 1965. Academic Press. New York. P.216-222.
4. Hammersley J.M., Handscomb D.C. Monte Carlo methods. Wiley. New York. 1964.
5. Bird, G.A. Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows. Clarendon press. Oxford. 1994.
6. Bird G.A. The DSMC method. The University of Sydney. 2013.

### MONTE-CARLO METHOD MODIFICATION FOR DIRECT SIMULATION OF DILUTE GAS FLOW

© 2017 V.V. Nikonov

Samara National Research University named after Academician S.P. Korolyov

The problem of direct numerical simulation of dilute gas flow by Monte-Carlo method is solved. Three variants of the problem of one-dimensional gas stream are considered. For calculation the original Monte-Carlo method and its modification are used. It is shown, that the modified Monte-Carlo method is faster in comparing with the original one.

*Keywords:* dilute gas, direct simulation, numerical simulation, Monte-Carlo method, one-dimensional stream.