УДК 519.85:658.8

ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ПРИ СЛУЧАЙНОМ СПРОСЕ

©2017 А.А. Истомина, В.Я. Баденников, А.Л. Истомин

Ангарский государственный технический университет

Статья поступила в редакцию 15.02.2017

Поставлена и решена оптимизационная задача управления запасами при случайном спросе, сформулированная на основе теории массового обслуживания. Определены основные характеристики системы массового обслуживания запасами, которые положены в критерий оптимальности задачи управления запасами. Приведен пример решения оптимизационной задачи управления запасами, при которой издержки, включая потери, связанные с дефицитом запасов, минимальны.

Ключевые слова: *управление запасами, теория массового обслуживания, система массового обслуживания, оптимизация*

Одной из самых распространенных стратегий управления запасами является система с фиксированным размером заказа [1, 2]. В такой системе размер заказа является постоянной величиной, повторный заказ подается при уменьшении наличных запасов до определенного критического уровня. Система с фиксированным размером заказа основана на выборе размера партии, минимизирующего общие издержки управления запасами. В подавляющем большинстве известных моделей управления запасами система с фиксированным размером заказа строится из предположения о детерминированности спроса, а оптимальный размер заказа запасов Q определяется формулой Уилсона [1, 2]:

$$Q = \sqrt{2C_1 S / C_2}\ ,$$

где S – спрос на запас на горизонте управления; C_1 – затраты на выполнение заказа; C_2 – затраты на хранение единицы запаса на горизонте управления.

Формула Уилсона пригодна для идеального случая, когда спрос на запасы S заранее известен, уровень запасов уменьшается с постоянной интенсивностью, и как только он достигает нуля, немедленно поступает новая партия запасов размером Q. В практике управления запасами такие ситуации встречаются крайне редко. Во-первых, регулярно приходится сталкиваться с проблемами задержки времени между заказом партии и моментом его подачи. Кроме того, фактический спрос на запасы часто не совпадает с прогнозируемым, возникает дефицит запаса, либо имеет место переизбыток запасов. Кроме того, формула Уилсона не учитывает потери, связанные с дефицитом запасов.

В настоящей работе поставлена и решена задача оптимизации системы управления запасами, построенная на основе теории массового обслуживания, которая учитывает вероятностный характер спроса на запасы и при которой издержки на систему управления запасом, в том числе и потери, связанные с дефицитом запасов, минимальны.

Модель оптимизационной задачи управления запасами при случайном спросе. Анализ задачи управления запасами показал, что многие ситуации связанные с обеспечением запасами, можно рассматривать как задачи массового обслуживания [3, 4] – не только в том смысле, что потребители запасов могут простоять в очереди за ними, но и в том смысле, что запасы, ожидающие потребителей, также образуют очереди. Если потребители отсутствуют, то запасы увеличиваются. Если запасов в очереди нет, то имеет место дефицит запасов, потребители не обслуживаются. Если в качестве требований и заявок в системе массового обслуживания считать запасы, а обслуживающими устройствами – потребителей запасов, то зная интенсивность обращения потребителей, можно определить оптимальную интенсивность восполнения запасов, при которых издержки системы управления запасами минимальны.

Пусть спрос на запасы является пуассоновским с интенсивностью μ единиц в единицу времени, а длительность промежутка времени от момента подачи заказа до момента поступления партии запасов имеет показательное (экспоненциальное) распределение. При показательном законе и потоке событий с интенсивностью λ среднее время доставки заказа составляет $T = 1/\lambda$. Пусть при уменьшении уровня запасов до критического уровня P заказывается количество запаса, равное Q единицам, таким образом, что

$$P + Q = M\ , \qquad (1)$$

где M – максимальный уровень запаса.

Будем считать, что максимальное количество запаса M известно. Тогда определению подлежит «точка заказа» P и объем партии Q. Очевидно, что определив любое из этих значений, второе можно найти из уравнения (1). Обозначим через P_n вероятность того, что в наличии имеются n единиц запаса.

Истомина Алена Андреевна, инженер кафедры технологии электрохимических производств. E-mail: alenaist@yandex.ru

Баденников Виктор Яковлевич, доктор технических наук, профессор кафедры автоматизации технологических процессов. E-mail: badenikovVY@angtu.ru

Истомин Андрей Леонидович, доктор технических наук, профессор кафедры вычислительных машин и комплексов.E-mail: a.l.istomin@mail.ru

Применение правила «заказывать Q единиц запаса, когда уровень запасов уменьшится до P, и заказывать M единиц запаса, когда уровень запасов уменьшается до нуля», означает, что:

1) система массового обслуживания S переходит из состояния S_n в состояние S_{n-1} при потреблении единицы запаса с интенсивностью μ;

2) система S переходит из состояния S_n ($n \neq 0$) в состояние S_{n+Q} и из состояния S_0 в состояние S_M, при пополнении запаса с интенсивностью λ.

Случайный процесс, протекающий, например, в системе S с шестью состояниями (максимальный запас равен пяти единицам, а точка заказа двум единицам запаса), показан на рис. 1.

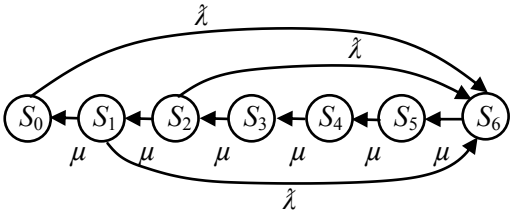

Рис. 1. Случайный процесс движения запасов при заказе партиями

На рис. 1 видно, что при отсутствии запаса делается заказ на пополнение запаса до максимального уровня. Далее, как только запас уменьшается до двух единиц, следует заказ запаса в количестве трех единиц. Пополнение запаса может наступить до прибытия заявки на запас (в этом случае система перейдет из состояния S_2 в состояние S_5), либо уже после очередной заявки и использования единицы запаса (в этом случае система перейдет из состояния S_1 в состояние S_4) и т.д. Например, для системы на рис. 1 получаем следующие уравнения для вероятностей состояний:

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0 + \mu P_1, \quad (2)$$

$$\frac{dP_1}{dt} = -\lambda P_1 - \mu P_1 + \mu P_2, \quad (3)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -\lambda P_2 - \mu P_2 + \mu P_3, \quad (4)$$

$$\frac{dP_3}{dt} = -\mu P_3 + \mu P_4, \quad (5)$$

$$\frac{dP_4}{dt} = \lambda P_1 - \mu P_4 + \mu P_5, \quad (6)$$

$$\frac{dP_5}{dt} = \lambda P_0 + \lambda P_2 - \mu P_5. \quad (7)$$

Стационарные решения системы уравнений (2) – (7) принимают вид:

$$P_1 = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right), \quad (8)$$

$$P_2 = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right), \quad (9)$$

$$P_3 = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^2, \quad (10)$$

$$P_4 = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^2, \quad (11)$$

$$P_5 = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu^2+\mu\lambda+\lambda^2}{\mu^2}\right). \quad (12)$$

где

$$P_0 = \frac{\mu^3}{\mu^3 + 5\mu^2\lambda + 6\mu\lambda^2 + 3\lambda^2}. \quad (13)$$

В общем виде уравнения для вероятностей состояний системы с пополнением запасов партиями имеют следующий вид:

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0 + \mu P_1, \quad (14)$$

$$\frac{dP_n}{dt} = -\lambda P_n - \mu P_n + \mu P_{n+1}, \text{ для } n \le P, \quad (15)$$

$$\frac{dP_n}{dt} = -\mu P_n + \mu P_{n+1}, \text{ для } P < n \le R, \quad (16)$$

$$\frac{dP_n}{dt} = \lambda P_{n-R} - \mu P_n + \mu P_{n+1}, \text{ для } R < n < M, \quad (17)$$

$$\frac{dP_M}{dt} = \lambda P_0 + \lambda P_{M-R} - \mu P_M. \quad (18)$$

Стационарные решения системы уравнений (14) – (18):

$$P_n = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^{n-1}, \text{ для } 0 < n \le P, \quad (19)$$

$$P_n = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^{P}, \text{ для } P < n \le M-P+1, \quad (20)$$

$$P_n = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[1+\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^{P} - \left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^{n-Q-1}\right], \text{ для } M-P+1 < n \le M, \quad (21)$$

где

$$P_0 \approx \frac{\mu^{P+1}}{(\mu+\lambda)^P(\mu+Q\lambda)}. \quad (22)$$

Среднее число запасов, находящихся в системе в стационарном режиме определяется по формуле

$$\bar{n} \approx \frac{\mu^{P+1}}{(\mu+\lambda)^P(\mu+Q\lambda)} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \times \left[\frac{1-\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^P \left(P+1-P\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)}{\left[1-\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)\right]^2} + \left(\frac{M(M+1)-P(P+1)}{2}\right)\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^P \right]. \quad (23)$$

Следует обратить внимание на то, что формулы (22) и (23) для расчета вероятности дефицита запасов P_0 и среднего числа запасов $\bar{n}$ являются приближенными. Это связано с тем, что не удалось найти компактные аналитические выражения для P_0 и $\bar{n}$ (далее будет показано, что нахождение оптимального решения задачи управления запасами даже при компактных приближенных выражениях приводит к сложным математическим выкладкам). Сравнение результатов расчетов P_0 и $\bar{n}$, полученных по точным и приближенным выражениям, показало, что значения не сильно отличаются друг от друга. Максимальная относительная ошибка для разных M, P и Q не превышала 15%.

Обозначим через C_1 издержки выполнения заказа, а через C_2 – затраты на хранение единицы запаса. Если спрос на запас на горизонте управления составляет μ, то количество заказов в установившемся режиме будет равно μ/Q. Тогда общие издержки управления запасами, включая потери, связанные с дефицитом запасов составят

$$F = C_1 \frac{\mu}{Q} + C_2 \bar{n} + C_3 P_0, \quad (24)$$

где C_3 – потери, вызванные отсутствием запасов.

Подставим в выражение (24) вместо P_0 и $\bar{n}$ выражения (22) и (23) соответственно, получим

$$F = C_1 \frac{\mu}{Q} + C_3 \frac{\mu^{P+1}}{(\mu+\lambda)^P(\mu+Q\lambda)} + C_2 \frac{\mu^{P+1}}{(\mu+\lambda)^P(\mu+Q\lambda)} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \times \left[\frac{1-\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^P \left(P+1-P\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)}{\left[1-\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right]^2} + \left(\frac{M(M+1)-P(P+1)}{2}\right)\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^P \right]. \quad (25)$$

Нас интересуют критический уровень запаса P и объем каждой партии Q, минимизирующие F. Поскольку P и Q связаны уравнением (1) подставим в (25) M–P вместо Q:

$$F = C_1 \frac{\mu}{M-P} + C_2 \frac{\mu^{P+1}}{(\mu+\lambda)^P(\mu+(M-P)\lambda)} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \times \left[\frac{1-\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^P \left(P+1-P\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)}{\left[1-\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right]^2} + \left(\frac{M(M+1)-P(P+1)}{2}\right)\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^P \right] + C_3 \frac{\mu^{P+1}}{(\mu+\lambda)^P(\mu+(M-P)\lambda)}. \quad (26)$$

Возьмем производную от F по P и приравнивая ее к нулю, получим уравнение (27). Решая уравнение (27) можно найти оптимальное значение критического уровня запаса P, а по уравнению (1) оптимальный размер заказа Q.

Пример решения задачи оптимизации управления запасами. Рассмотрим пример использования предложенной модели для решения следующей задачи управления запасами. Пусть спрос на запасы составляет 200 единиц в неделю. Максимальный объем запаса на складе не должен превышать 60 единиц. Среднее время доставки заказа составляет 6,7 часов или 0,04 недели. Оформление одного заказа обходится в 500 рублей. Стоимость хранения единицы запаса в неделю обходится в 50 рублей. Потери от отсутствия запасов в течение недели составляют 10000 рублей. Требуется определить критический уровень запаса и размер заказа, при которых издержки будут минимальны.

Для начала из уравнения T = 1/ λ. найдем интенсивность восполнения запаса λ:

$$\lambda = \frac{1}{0{,}04} = 25.$$

Далее, для найденного λ = 25 и заданных μ = 200, M=60, C_1=500, C_2=50, C_{32}=1000 из уравнения (15) находим оптимальное значение критического уровня запаса P^*=6,949. Округляя решение до ближайшего целого получаем значение 7. Таким образом, «точка заказа» составляет 7 единицы запаса. Тогда оптимальная стратегия управления запасами будет заключаться в следующем: каждый раз, когда уровень запаса достигает 7 единиц, следует заказывать 53 единицы запаса. При данной стратегии вероятность дефицита P_0=0,042, средний уровень запаса $\bar{n}$ составит 31 единицу, а ожидаемые издержки будут составлять 3994 рублей.

$$\frac{C_1\mu}{(M-P)^2}-\frac{C_3\mu^{P+1}\ln(\mu+\lambda)}{[\mu+\lambda(M-P)](\mu+\lambda)^P}+$$
$$+\frac{C_3\mu^{P+1}\lambda}{[\mu+\lambda(M-P)]^2(\mu+\lambda)^P}+\frac{C_3\mu^{P+1}\ln(\mu)}{[\mu+\lambda(M-P)](\mu+\lambda)^P}+$$
$$+\frac{C_2\mu^{P+1}\lambda\left[\frac{\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^P\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}-1\right)-\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^P\ln\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)\left(P-P\frac{\mu+\lambda}{\mu}+1\right)}{\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}-1\right)^2}\right]}{\mu[\mu+\lambda(M-P)](\mu+\lambda)^P}-$$
$$-\frac{C_2\mu^{P+1}\lambda^2\left[\frac{\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^P\left(P-P\frac{\mu+\lambda}{\mu}+1\right)-1}{\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}-1\right)^2}-\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^P\left[\frac{M(M+1)}{2}-\frac{P(P+1)}{2}\right]\right]}{\mu[\mu+\lambda(M-P)]^2(\mu+\lambda)^P}-$$
$$-\frac{C_2\mu^{P+1}\lambda\left[\frac{\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^P\left(P+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^P\ln\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)\left[\frac{M(M+1)}{2}-\frac{P(P+1)}{2}\right]}{\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}-1\right)^2}\right]}{\mu[\mu+\lambda(M-P)](\mu+\lambda)^P}+$$
$$+\frac{C_2\mu^{P+1}\lambda\ln(\mu+\lambda)\left[\frac{\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^P\left(P-P\frac{\mu+\lambda}{\mu}+1\right)-1}{\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}-1\right)^2}-\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^P\left[\frac{M(M+1)}{2}-\frac{P(P+1)}{2}\right]\right]}{\mu[\mu+\lambda(M-P)](\mu+\lambda)^P}-$$
$$-\frac{C_2\mu^{P+1}\lambda\ln(\mu)\left[\frac{\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^P\left(P-P\frac{\mu+\lambda}{\mu}+1\right)-1}{\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}-1\right)^2}-\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^P\left[\frac{M(M+1)}{2}-\frac{P(P+1)}{2}\right]\right]}{\mu[\mu+\lambda(M-P)](\mu+\lambda)^P}=0. \quad (27)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Букан, Д.* Научное управление запасами / *Д. Букан, Э. Кенигберг*. – М.: Наука, 1967. 423 с.
2. *Лотоцкий. В.А.* Методы и модели управления запасами / *В.А. Лотоцкий, А.С. Мандель.* – М.: Наука, 1991. 188 с.
3. *Рыжиков, Ю.И.* Теория очередей и управление запасами. – СПб.: Питер, 2001. 384 с.
4. *Вентцель, Е.С.* Исследование операций. – М.: Советское радио, 1972. 552 с.
5. *Истомина, А.А.* Оптимальное управление товарными запасами на основе теории массового обслуживания / *А.А. Истомина, В.Я. Баденков, А.Л. Истомин* / Вестник Ангар. гос. техн. ун-та. 2016. № 10. С. 148-152.

OPTIMIZATION TASKS OF INVENTORY MANAGEMENT AT RANDOM DEMAND

©2017 A. A. Istomina, V.Ya. Badenikov, A.L. Istomin

Angarsk State Technical University

The optimization task of inventory management at random demand, formulated on the basis of queuing theory, is set and solved. The main characteristics of Queuing system are determined by inventories which are put in an inventory management task optimality criterion. The example of the solution an optimization task of Queuing system at of which expenses, including the losses connected with deficit of inventories, are minimum is given.

Key words: *inventory management, Queuing theory, Queuing system, optimization*

Alena Istomina, Engineer at the Electro-chemical Production Technologies Department. E-mail: alenaist@yandex.ru; *Viktor Badenikov, Doctor of Technical Sciences, Professor at the Department of Automation the Technological Processes. E-mail: badenikovVY@angtu.ru*; *Andrey Istomin, Doctor of Technical Sciences, Professor at the Department of Computing Machines and Complexes.E-mail: a.l.istomin@mail.ru*