УДК 550.8:519.86(075.8)

НЕЧЕТКО-АТРИБУТНЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2017 А.И. Кобрунов

Ухтинский государственный технический университет

Статья поступила в редакцию 08.04.2017

Рассматривается задача построения оценок для достоверности результатов решения операторных уравнений первого рода. Рассмотрения основаны на использовании понятия нечетких мер достоверности и их атрибутов. Вводится атрибутный аналог операторного уравнения, как уравнения приведенного к безразмерной форме, с учетом особенностей атрибутов меры исходных данных. Расчеты выполняются на основе регуляризованных приближений к операторному уравнению.

Ключевые слова: *нечеткие меры достоверности, функциональные пространства, операторные уравнения, атрибуты нечетких мер, регуляризованные приближения, атрибутный оператор*

Обратные задачи [1-4] как правило, относятся к классу некорректных задач по всем условиям корректности по Адамару, разработка методов решения которых в главном выполнена, развита и описана в работах трех научных школ, возглавляемых: В.К. Ивановым, А.Н. Тихоновым и М.М. Лаврентьевым [5-7], а также в трудах их многочисленных учеников и последователей. В целом, для широкого круга приложений аппарат решения обратных задач в условиях их некорректности (относительно устойчивости) развит достаточно полно на основе методов регуляризации соответствующих операторных уравнений (А.Н. Тихонов и М.М. Лаврентьев), а проблема существования решается на основе принципов квазирешений (В.К. Иванов). Что касается проблемы корректности, связанной с единственностью решения, то она решается в рамках концепции нормальных решений, присутствующей во всех методах регуляризации и получившей развитие в задачах гравиметрии в работах [8, 9].

В связи с методами решения некорректных задач, остается нерешенным исключительно важный практический вопрос о мере неопределенности в решении, порожденной неопределенностью исходной информации. В полном объеме эта проблема, видимо, не может быть решена в условиях неустойчивости решения, поскольку малые вариации исходных данных могут порождать существенные вариации в решении. Это свойство неограниченных операторов, доставляющих строгие решения большинству реальных обратных задач. Однако введение регуляризующих операторов делает эту задачу более осмысленной.

Цель работы: выработка подходов к оценке мер неопределенности решения, связанной с заданной мерой неопределенности исходных данных.

Такие подходы основаны на введении понятия нечетких мер на функциональных пространствах, которыми оперируют при постановке и решении обратных задач и установлении связи между атрибутами этих мер, служащих концентрированным выражением неопределенности рассматриваемых элементов функциональных пространств.

Кобрунов Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор. E-mail: akobrunov@ugtu.net

На физическом уровне строгости формулировка обратной задачи такова. Пусть $A: X \to Y$ ограниченный оператор действующий в паре банаховых пространств X и Y. Уравнение

$$A\sigma(v) = u(s);\quad \sigma(v) \in X; u(s) \in Y \tag{1}$$

плотно разрешимо в Y. Для линейных уравнений в банаховых пространствах условие плотной разрешимости но не разрешимости всюду эквивалентно неограничености обратного оператора и, как следствие, неустойчивости решения. Множество $\Omega_u(A) = \{\sigma(v): A\sigma(v) = u(s)\}$ при $u(s) \in \mathrm{Im}(A)$ называется классом эквивалентности для (1). Это множество замкнуто в X и в общем случае содержит более одного элемента. Для линейных операторов число элементов в $\Omega_u(A)$ образует линейное многообразие (вместе с двумя элементами содержит и их линейную комбинацию).Типичными задачами такого класса служат обратные задачи гравиметрии, которые в какой то мере служат эталоном, типовым примером обратных задач, на которых происходит аппробация результатов. Линейные обратные задачи гравиметрии в классе распределения плотности имеют вид

$$A\sigma(x,y,z) = \int_V \frac{\sigma(x,y,z)zdv}{\left[(x-x_0)^2(y-y_0)^2 + z^2\right]} = \frac{u_z(x_0, y_0)}{\gamma}$$

Здесь V область в которой распределены источники вертикальной производно гравитацонного потенциала $u_z(x_0, y_0)$ в точке (x_0, y_0); γ - гравитационная постоянная . Если область V содержит хотя бы одну внутреннюю точку, то [8] оператор $A\sigma(x,y,z)$ имеет плотную в V область определения и обратный к нему неограничен. Это обстоятельство имеет то практическое значение, что небольшие вариации во входных данных ($u_z(x_0, y_0)$) приводят, вообще говоря, к сколь угодно большим изменениям в получаемом решении. Эта ситуация типична для уравнений первого рода. Тем не менее, требования практики (в конкретном примере – практики геолого-разведочных работ) диктуют необходимость оценки доверия получаемых решений. В условиях неустойчивости задачи попытка проследить как изменяются тезультаты при вариациях правых частей связанных с погреностями, оказывается обреченной на неудачу. Но дело обстоит и еще хуже.

Задача (1) в дополнении к существованию класса эквивалентности для каждого $u(s)\text{O}\,\mathrm{Im}(A)$ имеет еще одну степень неопределенности, связанную с присутствием множества правых частей в (1), отличающихся между собой по достоверности своих возможных значений в каждой из точке $s\,\text{O}S$ своей области определения. Этим определена практическая эквивалентность, как сумма эквивалентности заложенной в $\Omega_u(A)$, и неопределённостью правых частей в уравнении (1). Между тем задача оценки уровня доверия резельтатам решения обратных задач, включая, прежде всего некорректные задачи, остается. Для ее решения необходимо изменить концептуальные подходы к решению, которые состоят во введении нечетких мер доверия входным данным и результатам решения.

Допустимые правые части обозначаем $u_\delta(s)$, подчеркивая индексом δ приближенный характер входных данных. В этих условиях, следует выбрать решение (1), обладающее наибольшей мерой доверия относительно внешнего критерия отбора, для которого исходные данные $u_\delta(s)$ укладываются в определенную степень доверия. Таким образом, должны быть определены меры доверия на классах правых частей в (1) и меры доверия на пространстве возможных решений.

Нечеткие меры достоверности введены на пространствах X и Y и отражают меру доверия тому или иному элементу $\sigma(v)\,(u(s))$ пространства. Нечеткие меры $\mu[\sigma(v)]$ и $\eta[u(s)]$ для каждого значения аргумента v и s подчиняются обычным правилам для функций принадлежности нечетких величин σ и u соответственно [10]. Смысловое содержание нечетких мер $\mu[\sigma(v)]$ и $\eta[u(s)]$ состоит в том, что в каждой точке $v\in V$ и $s\in S$, каждая из них характеризует меру доверия значениям параметра σ и u соответственно из всего возможного набора значений. Это дает основание считать нечеткие меры функциями принадлежности. Нечеткая мера, может рассматриваться как оператор на пространстве X отображающий $\sigma(v)\in X$ в пространственное распределение достоверности значений параметра s. На этом основании этот оператор может быть назван информационным. То же самое относится к нечеткой мере $\eta[u(s)]$, отображающей конкретную (четкую) функцию $u(s)$в пространственное распределение доверия значению $u(s)$ в каждой точке $s\in S$. Нечеткая мера $\eta[u(s)]$ характеризует неопределенность исходных данных для операторного уравнения (1). Если нечеткая мера $\mu[\sigma(v)]$ определена, то она служит критерием отбора решения уравнения (1) на всех допустимых $u(s)$. Если эта мера не определена, то может быть поставлена задача синтеза характеристик $\mu[\sigma(v)]$ на основе заданных характеристик $\eta[u(s)]$, и решения операторного уравнения (1).

Атрибуты нечетких мер $\mu[\sigma(v)]$ (или $\eta[u(s)]$) есть отображения $\aleph$ нечеткой меры $\mu[\sigma(v)]$ в функцию из X (обычную – четкую) $\mu_\sigma^\aleph(v)$ $\aleph:\mu[\sigma(v)]\to\mu_\sigma^\aleph(v)\,;\eta_u^\aleph(v)=\aleph\,\eta[u_s]\to\eta_u^\aleph(s)$. Атрибуты нечеткой меры характеризуют ее свойства, связанные с наиболее достоверными пробными функциями $\sigma(v)\in X$ и $u(s)\in Y$ для соответствующих мер область допустимой неопределенности и возможный допустимый разброс пробных функций для информационных операторов. Атрибутом нечеткой меры служит ее значение на конкретном экземпляре для $\sigma(v)\in X$ или $u(s)\in Y$ соответственно. Отсюда, в частности следует, что нечеткая мера исчерпывающе характеризуется своими атрибутами.

Операторное уравнение для атрибутов нечетких мер основано на исходном уравнении (1), которое устанавливает связь между элементами $\sigma(v)$ и $u(s)$. В зависимости от характера имеющихся данных и условий, могут быть сформулированы следующие задачи:

1. Задана $u(s)$ и $\mu[\sigma(v)]$, следует найти $\sigma(v)$, как приближенное регуляризованное решение задачи:

$$A\sigma(v)=u_\delta(s);\quad \mu[\sigma(v)]\to\max. \tag{2}$$

Формулировка (2) представляет собой обобщение концепции нормальных решений уравнения (1), и призванную обеспечить единственность решения уравнения (1) за счет введения нечеткой меры $\mu[\sigma(v)]$.

2. Задано $\eta[u(s)]$, следует выбрать систему атрибутов $\eta_u^\aleph(s)$, и, пользуясь уравнением (1) найти им соответствующие атрибуты $\mu_\sigma^\aleph(v)$ как решения уравнения:

$$A\mu_\sigma^\aleph(v)=\eta_u^\aleph(s) \tag{3}$$

Анализ семейства атрибутов $\mu_\sigma^\aleph(v)$ после надлежащей интерпретации позволит определить свойства достоверности для искомого решения уравнения (1), и дать оценку для неизвестных используемых переменных нечеткой меры $\mu[\sigma(v)]$, соответствующей $\eta\left[u(s)\right]$. В этой связи возникает задача физической интерпретации атрибута $\mu_{\sigma}^{\aleph}(v)$, восстановленного на основе уравнения (3) по атрибуту $\eta_{u}^{\aleph}(s)$. Между уравнением (1) и (3) есть то отличие, что в (3) исключены постоянные, связанные с размерностью. Например, для рассматриваемого ниже уравнения (4), для обратной задачи гравиметрии, его атрибутная форма не содержит гравитационную постоянную, а параметры $\mu_{\sigma}^{\aleph}(v)$ и $\eta_{u}^{\aleph}(s)$ рассматриваются в их естественной системе единиц. Алгоритм решения операторного уравнения (1) или его атрибутного аналога для нечетких мер формы (3), должен включать в себя учет существования области эквивалентности $\Omega_u(A)$.

Рассмотрим в качестве примера постановку линейной обратной задачи гравиметрии, как типичной задачи обращения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с ненулевой областью эквивалентности и метод функциональных представлений для ее решения обеспечивающий выделение управляемого единственного решения [11]. Идея данного метода функциональных представлений для решения линейных обратных задач гравиметрии основана на представлении решения обратной задачи:

$$\iint_{E_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\sigma(x,y,z)zdv}{\left[(x-x_0)^2(y-y_0)^2+z^2\right]}=\frac{u_z(x_0,y_0)}{\gamma} \qquad (4)$$

в форме

$$\sigma(x,y,z)=\iint_{E_0}\varphi(x_0,y_0)K(x-x_0,y-y_0,z)ds_0 \qquad (5)$$

Здесь: $\sigma(x,y,z)$ - распределение плотности в бесконечной горизонтальной полосе Π с горизонтальной плоскостью E_0 и ограниченной по вертикали координатами $z_1>0, z_2\le\infty$; $K(x,y,z)$ - заданная из априорных соображений положительная функция в Π; $\varphi(x_0,y_0)=\varphi(s_0)$ параметризующая решение $\sigma(x,y,z)$ функция, однозначно связанная с правой частью уравнения (4). Смысловое содержание функции $K(x,y,z)$ состоит в том, что решение (4), представимое в форме (5) является оптимальным среди $\Omega_u(A)$ относительно критерия:

$$\max_{\sigma(v)\in\Omega_u(A)}\left\|\left[K(x,y,z)*\sigma(v)\right]_{x,y}\right\|_{C(E_0)}, \qquad (6)$$

где $\left[K(x,y,z)*\sigma(v)\right]_{x,y}$ обозначает свертку по переменным $[x,y]$

Метод функциональных представлений не ограничивается линейными задачами класса (4), но имеет гораздо более широкое распространение. Наиболее существенным обстоятельством, выделяющим этот метод, является представление решения являющегося многоразмерной функцией через функцию $\varphi(x_0,y_0)=\varphi(s_0)$ той же размерности, что и исходные данные, для которых построены атрибуты нечеткой меры достоверности. Представление (5) для уравнения (4) дает аналитическое представление решения через значение неограниченного оператора:

$$\sigma(v)=\left[\frac{u_z(\omega,\eta)K(\omega,\eta,z)}{2\pi\gamma\int_{z_1}^{z_2}\left|K(\omega,\eta,z)\right|e^{-|W|z}dz}\right]_{\omega,\eta}^{\sim} \qquad (7)$$

Здесь $[\ ]_{\omega,\eta}^{\sim}$ - обратное преобразование Фурье, функции стоящей в квадратных скобках по паре переменных $\{\omega,\eta\}$. В других, более общих постановках, параметризующая функция $\varphi(x_0,y_0)=\varphi(s_0)$ в методе функциональных представлений строится алгоритмически и реализуется в форме оператора $\Im:\mathrm{u}(s)\to\varphi(s)$.

Оператор (7) в вычислительной реализации заменяется регуляризованным к нему приближением, например:

$$\sigma_\delta(v)=\left[\frac{u_z(\omega,\eta)K(\omega,\eta,z)}{2\pi\gamma\int_{z_1}^{z_2}\left|K(\omega,\eta,z)\right|e^{-|W|z}dz+\alpha\left(|W|^2+1\right)}\right]_{\omega,\eta}^{\sim} \qquad (8)$$

Здесь α - параметр регуляризации, определяемый по принципу невязки – наибольший из обеспечивающих заданный уровень погрешности $\delta:\left\|A\sigma_\delta(v)-u(s)\right\|_Y\le\delta$.

Другой пример формулировки обратной задачи для нелинейного интегрального уравнения дает обратная структурная задача гравиметрии [9]:

$$\sum_{i=1}^{N}\int_S\frac{\Delta\sigma_i(s)f_i(s)}{\left[(s-s_0)^2+f^2(s)\right]^{\frac{1}{2}}}ds=u(s_0) \qquad (9)$$

$u(s_0)$ - нормированная к гравитационной постоянной компонента гравитационного поля заданного в точках $s_0; s=\{x,y\}$. $f_i(s)$ уравнения искомых плотностных границ; N - число этих границ. Это нелинейный относительно границ $f_i(s), i=1\div N$ оператор, и задача (9) не имеет однозначного решения. Метод функциональных представлений приводит к представлению решения в форме:

$$f_i(s)=f_i^*(s)+\Delta\sigma_i(s)\int_{E_0}\varphi(s_0)\frac{\Delta\sigma_i(s)f_i(s)ds_0}{\left[(s-s_0)^2+f^2(s)\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad (10)$$

Представление (10) соответствует выделению единственного решения (9) оптимального относительно критерия который поясняет смысл параметров $f_i^*(s)$ и $\tau^2(s)$, управляющих единственностью решения уравнения(9)

$$\int_S \sum_i \frac{\left[f_i(s) - f_i^*(s)\right]^2}{\tau^2(s)} ds \to \min \qquad (11)$$

Функция $\varphi(s_0)$ параметризующая все N решений находится во взаимно однозначном соответствии с правой частью в (9). Тем самым определен итерационный алгоритм решения. Как для линейных и нелинейных уравнений формулировка (3) как восстановление атрибутов нечеткой меры доверия решения по атрибутам нечеткой меры доверия входным данным остается неизменной. Это замечание говорит о возможности использования любых технологий решения обратных задач с условием согласованной с ними технологиями решения уравнений (3).

Описание алгоритма.

Шаг 1. Решается операторное уравнение (1): $A\sigma(v) = u_\delta(s)$ с приближенно заданной правой частью $u_\delta(s)$. Находится $\sigma_\delta(s)$.

Шаг 2. Формируется атрибут $\eta_u^{\aleph_F}(s)$. и исключением размерных параметров (например, γ в (4)), и атрибутный аналог (3) уравнению (1).

Шаг 3. Решается операторное уравнение (3) и находится атрибут $\mu_u^{\aleph_F}(v)$.

Шаг 4. Анализируется результат и делается вывод о возможных свойствах поля достоверности $\mu\left[\sigma_\delta(v)\right]$.

Шаг 5. Изменяется атрибут $\aleph_F$ и процесс повторяется с шага 1.

Выводы: оценка достоверности для решений уравнений первого рода может быть построена по имеющейся нечеткой мере достоверности для входных данных, на основе регуляризованного оператора к исходному уравнению. С этой целью необходимо определить атрибуты нечеткой меры достоверности входных данных, и на основе решения атрибутного аналога исходного уравнения найти атрибуты нечеткой меры достоверности искомого решения. Атрибутным аналогом уравнения является его внеразмерная форма, а восстановленные атрибуты нечеткой меры служат основанием для суждений о достоверности построенных решений исходного уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Ватульян, А.О.* Математические модели и обратные задачи // Соровский образовательный журнал. 1998. №11. С. 143-148].
2. *Пытьев, Ю.П.* Математические методы интерпретации эксперимента. –М.: Высшая школа, 1989. 351 с.
3. *Сизиков, В.С.* Математические методы обработки результатов измерений. – СПб.: Политехника, 2001. 240 с.
4. *Старков, В.Н.* Конструктивные методы вычислительной физики в задачах интерпретации. – Киев: Наукова думка, 2002. 263 с.
5. *Иванов, В.К.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения / *В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана.* – М.: Наука, 1978. 206 с.
6. *Тихонов, А.Н.* Методы решения некорректных задач / *А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин.* – М.: Наука, 1979. 287 с.
7. *Лаврентьев, М.М.* Некорректные задачи математической физики и анализа / *М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский.* – М.: Наука, 1980. 286 с.
8. *Кобрунов, А.И.* Экстремальные классы в задачах гравиметрии и их использование для построения плотностных моделей геологических сред // Дисс. на соиск. уч. степ. д.ф.-м.н. – Ивано-Франковск, 1983. 439 с.
9. *Кобрунов, А.И.* Математические основы теории интерпретации геофизических данных. Учебное пособие – М.: Из-во ЦентрЛитНефтеГаз, 2008. 286 с
10. *Zadeh, L.* A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. Vol. 8, № 3. P. 338-353.
11. *Кобрунов, А.И.* Метод функциональных представлений при решении обратных задач гравиметрии // Физика земли. 2015. № 4. С. 3-13.

FUZZY-ATTRIBUTE ANALYSIS OF OPERATOR EQUATIONS SOLUTIONS

© 2017 A.I. Kobrunov

Ukhta State Technical University

The problem of creation the estimation for reliability of the results of solving operator equations of the first kind is considered. The reviews are based on the use the concept of fuzzy confidence measures and their attributes. An attribute analogue of the operator equation is introduced as an equation reduced to a dimensionless form, taking into account the attributes of the measure of the original data. Calculations are performed on the basis of regularized approximations to the operator equation.

Key words: *fuzzy confidence measures, functional spaces, operator equations, attributes of fuzzy measures; regularized approximations; attribute operator*

Alexander Kobrunov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor. E-mail: akobrunov@ugtu.net