УДК 51-72 : 620.22

ЧИСЛОВАЯ АСИММЕТРИЯ ВНУТРЕННЕГО ПРОСТРАНСТВА НЕКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

© 2017 А.Д. Изотов[1], Ф.И. Маврикиди[2]

[1] Институт общей и неорганической химии им. Н.С. Курнакова РАН, г. Москва
[2] Институт проблем нефти и газа РАН, г. Москва

Статья поступила в редакцию 09.12.2016

В статье рассматривается расширение модели внутреннего пространства некристаллических материалов средствами числовой асимметрии – сопряжения евклидова пространства R с фрактальным Z_p в самодвойственное пространство-время. Это формальным является выражением универсальной пары сил природы – притяжения и отталкивания, порождающих пару взаимно дополнительных процессов энергии и энтропии. Исследуются соответствия этой двойственности основным фактам и положениям материаловедения. Предлагаемая модель допускает существование 5-лучевой симметрии, тесно связанной с числами Фибоначчи в теории квазикристаллов, других экзотических симметрий и представляет задачу моделирования в духе теории систем – синтеза разноприродных физико-химических процессов, описываемых различными несводимыми формальными языками. На этой основе рассматривается новая версия термодинамики с двойственностью – сопряжения энергетического и энтропийного представлений. Формализация понятия делимости материи как отдельной степени свободы позволяет формализовать концепции энтропии, тепла и температуры и предложить способ классификации материалов по типу допустимых движений частиц. Предлагаемые формальные аналогии инвариантны относительно изменения размеров образца и числа частиц, что является существенным с точки зрения нанонауки. Показана возможность введения структуры пространства как нефизического, нелокального геометрического параметра. Сформулированное голографическое представление материи предполагает дальнейшее развитие теории внутреннего пространства материалов в логически связную модель.
Ключевые слова: некристаллические материалы, математическое моделирование, фракталы, *p*-адические числа, числовая двойственность.

Работа выполнена при частичной поддержке Программы ОХНМ РАН, проект III.5.3.

ВВЕДЕНИЕ

Внутреннее пространство материалов – это пространство, где образуются свойства веществ, образцов и изделий, которыми они потом организуют своё внешнее пространство и взаимодействие с его объектами. Моделирование внутреннего пространства материалов в настоящее время привлекает растущее внимание в связи той ролью, которую в практике науки материаловедения занимают некристаллические материалы, оставаясь наиболее трудной частью теории. Они располагаются между кристаллами и газами как наиболее математизированными частями науки о материалах. Эти два полюса топологии материи являются результатом действия универсальной пары сил *притяжение – отталкивание*, и их синонимов: *сжатия - расширения, конвергенции-дивергенции, энергии-энтропии*, *агрегации-диспергирования,* которые соответствуют двум основным процессам технологии создания материалов – *снизу-вверх* и *сверху-вниз*. Авторами ранее показано, что их равнодействующей являются фракталы различной природы [1]. Поэтому естественно считать топологию материи между двумя этими полюсами фрактальной. Фракталы при увеличении фрактальной размерности порождают плотную материю, т.е. кристаллы, а при уменьшении – диспергированную: газы, кванты. Кристаллы отвечают минимуму свободной энергии материи, газы – максимуму её энтропии. Эта универсальная пара организует координату делимости или дисперсности вещества – дополнительную степень свободы, по И.В.Тананаеву, трансформации и преобразования материи. Уменьшение степени «кристалличности» и увеличение степени «газообразности» через квазикристаллы, аморфные и неупорядоченные материалы есть движение от первого полюса топологии материи ко второму по координате делимости/дисперсности, сопровождающееся изменением свойств материи [2,3,1].

Внутреннее пространство материалов характеризуется сложностью – взаимопроникновением процессов различной природы и многообразием формальных методов. Единой топологией этого разнообразия видится фрактальная

Изотов Александр Дмитриевич, член-корреспондент РАН, доктор химических наук, профессор, главный научный сотрудник.
Маврикиди Федор Иванович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник. E-mail: mavrikidi@mail.ru

геометрия с её предметной и математической универсальностью. Напрашивается расширение физического подхода к исследованию материалов, основанные на фрактальной геометрии и тех математических структурах, которые в неё включаются.

Целью настоящей статьи является расширение методов исследования внутреннего пространства некристаллической материи фрактальной геометрией с её теоретико - числовым представлением в виде числовой асимметрии. Числовая асимметрия – это сопряжение физического пространства с фрактальным *p*-адическим Q_2, которое является формальным представлением упомянутой универсальной пары сил [1,4]. Преимуществом такого подхода видится возможность сведение в логически связную схему разрозненных фактов из теории материи, особенно некристаллических материалов.

Приведем, для ясности, две интерпретации *p*-адических чисел, легко узнаваемые в материаловедении: «Рассмотрим некоторый объект под увеличением различной силы. Для каждой разрешающей способности увеличения объект выглядит, состоящим из набора (конечного или нет) частиц. Например, при «нулевом» увеличении видна только одна частица – сам объект. Постепенное увеличение разрешающей способности наблюдения представляет каждую частицу в виде кластера, меньших частиц, каждая из которых, в свою очередь, распадается далее на под-частицы и т.д. Наша цель описать объект таким, каким он выглядит под бесконечным увеличением» [5]. С этой интерпретацией согласован «теоретический микроскоп»: последовательное применение правил логики, последовательных приближений и теоретических уточнений разного рода моделируется последовательностью логических формул/утверждений, которая имеет вид:

$$D_{\varepsilon^{-3}}(x,y) \supset D_{\varepsilon^{-2}}(x,y) \supset \ldots$$
$$\ldots \supset D_0(x,y) \supset D_\varepsilon(x,y) \supset D_{\varepsilon^2}(x,y) \supset \ldots$$

Здесь для всякого $\varepsilon > 0$ отношение $D_\varepsilon(x,y) \le \varepsilon$ есть отношение неразличимости. Когда $\varepsilon \to o$, пробегая положительные вещественные числа, то соответствующие предикаты $D_\varepsilon(x,y)$ пробегают серию всё более тонких неразличимостей, порождая всё более тонкие различия [6]. Подробнее об интерпретации *p*-адических чисел в [4].

Иными словами, использование микроскопа – материального или теоретического, в исследовании внутреннего пространства материалов, моделируется введением *p*-адических чисел как инвариантов (вы)деления уровней и частей материи полем зрения микроскопа увеличивающейся разрешающей силы для построения адекватной теории. Таким образом, *p*-адические числа представляют собой дополнительную степень свободы, связанную с изменением размеров частиц. Они же вводят в теорию фракталов помимо масштабной инвариантности *масштабную детерминированность* (или вариативность)[1], отражающую изменение свойств материи на разных уровнях её диспергирования [7].

2. ОБЗОР – ПРОБЛЕМЫ И МЕТОДЫ

Моделирование некристаллических материалов сталкивается с рядом проблем, не решаемых стандартной физико-математической техникой. Помимо отсутствия обратного пространства, включающего вычислительный арсенал преобразования Фурье, требуется модель, адекватная случайным упаковкам молекул, иррегулярности строения материи, наличию пустот (в жидкости), инвариантная относительно изменения размеров образца и сочетающая в себе геометрические и физические методы [8,9].

Такая модель должна, очевидным образом, синтезировать в своём аппарате дискретность с непрерывностью, детерминизм со случайностью, множества полной меры и нульмерными, которыми являются решетки, то есть геометрия вообще. Сегодня для моделирования материи привлекаются аппарат математической физики, комбинаторика и теория формальных языков теоретической информатики [10,11,12]. Теоретическая информатика – это наука об операциях с компьютерными данными и объектами с акцентом на математической стороне вопроса. Она создает необходимое расширение пространства материи, которое есть не что иное, как расширение евклидова пространства фрактальным [1]. Точнее, в современных работах усматривается математическая двойственность, которая заключается в дополнении методов математической физики методами теоретической информатики. Это пара основана на двойственности множеств полной меры и нульмерных, т.е. фрактальных.

Тем самым, очевидно, что проблема математического описания внутреннего пространства некристаллических материалов требует формального расширения понятия пространства. В качестве такого объемлющего пространства сегодня рассматривается пространство Лобачевского [13,14,15,16,17].

Описанная физико-информационная двойственность внутреннего пространства в точности соответствует описанной авторами интерпретации бинарной феноменологии фракталов [1], которая основывается на возможности формального дополнения разрывности (т.е. дискретности) со связностью (т.е. непрерывностью), объединяя тем самым свойства и аналитику евклидова пространства с пространством и аппаратом (дискретной) математической информатики.

Пространством математической информатики является нульмерное канторово пространство – классический пример фрактала и изоморф 2-адических чисел Q_2. Наиболее зримым проявлением этого факта являются современные компьютеры с их 2-адическим пространством состояний [18].

Преимуществом такого подхода является то, что фракталы получают в нём числовое содержание – пространство 2-адических чисел Q_2 (p-адических Q_p в общем случае). Его элементами являются двоичные строки в алфавите {0,1}. Тем самым теория математической физики дополняется аналитическими потенциями p-адического анализа. Диадические числа есть аналог пространства Лобачевского и, поэтому, возникает возможность переноса формальных методов математической физики на 2-адическое пространство [19]. Сегодня этот шаг – перенос анализа во фрактальное пространство уже намечен, но остается пока логически несвязным [20,21,22,23,24].

Хорошо известна чувствительность свойств образца вещества к внешним воздействиям в зависимости от конкретики внутреннего пространства [25,26,27] – (внешние) свойства материалов реализуются как реакция внутреннего пространства. И сегодня исследователи пришли к необходимости разделения внешнего физического и внутреннего пространства, которые рассматриваются как ортогональные, т.е. дополнительные [28,29,30]. Фрактальность, т.е. делимость материи как раз и организует координатизацию внутреннего пространства, логически ортогонального физическому [1].

3. О МАТЕМАТИКЕ РЕШЕТОК

Одной из универсальных моделей фракталов и p-адических чисел являются решётки. Теоретическая значимость решёток заключается в том, что они рассматриваются как целостное образование, устанавливающее связи между разделёнными объектами. В материаловедении сетки или решётки разного рода – атомно-молекулярные в твердом теле или водородные в жидкостях, играют роль нелокального, нефизического, а именно, *геометрического* параметра, отличного от стандартных, и действующего одновременно на весь объём образца. Этот особый параметр – геометрия решёток вносит значительный и неучитываемый стандартными методами вклад в физико-химические свойства материи. Поэтому мы уделим решёткам особое внимание.

Решётки, представляют собой распределённый и, зачастую, многомасштабный, объект. Такие объекты нехарактерны для стандартной математической техники, имеющей дело с однородными неделимыми сущностями. Решётки характеризуются наличием *связей* между уровнями, совокупностями, кластерами атомов/молекул. Связи преобразуют локальные и внутренние движения и характеристики в глобальные, т.е. в свойства всего объекта. Такое качество сетей является математически неформализуемым – по сей день не существует общепризнанного математического метода решения задач на решётках. Эмпирически исследователи пришли к выводу – «начальные данные есть часть задачи». То есть каждая решётка является уникальной, и к любой задаче на ней метод решения должен подбираться индивидуально, используя всю возможную внематематическую информацию. Поэтому, смоделировать внутреннее пространство образца материала означает смоделировать уникальность.

Формально ситуация имеет следующий вид. Решётки (сети, графы) обычно рассматриваются как несущее множество, т.е. пространство, на котором развиваются те или иные процессы. При стандартном подходе это пространство-множество считается неизменным. Лишь тогда можно на нём строить какую-либо логику, которая затем оснащается переменными, функциями, операторами и т.п. Если же это несущее множество, его трансформации и свойства само является предметом исследования, что имеет место в материаловедении некристаллических веществ, то это уже выход за привычные рамки методов. Такими свойствами решёток являются *нелокальность* действия и *целостность* вносящие неопределяемый вклад в величины физических параметров, которые не формализуются в «работающей логике» первого порядка, т.е. не являются вычислимыми, доказуемыми обычной считающей математикой

Об арифметических операциях на решётках. Привычные арифметические операции – сложение, умножение, вычитание и деление, входящие в аксиоматику математических методов, подразумевают механическую составляющую, существование которой следует из известной геометрической теоремы Лиувилля, имеющей аналог и для гиперболического пространства Лобачевского. Эта сторона математической техники никогда отдельно не выделяется в формулировках логических систем и моделей.

Именно – умножению соответствует растяжение/сжатие объекта, сложению – параллельный перенос. Деление и вычитание понимаются как действия обратные сложению и умножению и, потому, механически им эквивалентны. Иными словами, все четыре операции предполагают механическое движение в евклидовом/физическом пространстве. Поэтому, все уравнения математической физики пишутся для «физически бесконечно малого объёма», который устраняет всю механику арифметических действий сведением её в одну точку.

Для реальных решёток эта механика арифметики имеет особое значение. В решётках внутреннего пространства характеристики и переменные имеют двойную координатизацию. Их положение определяется в обычном физическом пространстве и, кроме того, они скоординированы расположением в структуре, – связностью, путями, достижимостью между вершинами. Изменение физических координат вершин меняет и внутреннюю координатизацию – получается другой граф, с новыми метрическими и физико-химическими характеристиками. То же будет и при добавлении/удалении ребер, т.е. при изменении локальной структуры графа, будут меняться его глобальные свойства – наличие /отсутствие минимальных путей, влияние характеристик вершин друг на друга, степень связности и т.д.

Поэтому прямолинейный перенос арифметических операций на решётки игнорирует специфику внутреннего пространства, представленную конкретной решёткой, т.е. от уникальной задачи мы переходим к какой-то «навеянной» задаче, соответствующей некоторому ансамблю сходных структур [31,С.31]. Такова основа стандартной математической техники – анализа, вероятностных и теоретико-групповых методов. Теория групп, завоевавшая признание в кристаллических структурах твердого тела имеет ещё один изъян. Хорошо известно, что структура группы строится на строгой регулярности кристаллических решёток, но разрушается из-за малейших флуктуаций величин её элементов, т.е. становится неадекватной для иррегулярных структур и, соответственно, некристаллических материалов.

Как двойственный объект – совокупность разделенных и связанных ребрами/дугами частей/вершин, решётки являются синтезом дискретности с непрерывностью, то есть пространством числовой асимметрии – дискретизации посредством p-адических чисел, дополненной связностью вещественных. При любом порядке ребер в каждой вершине можно выделить подмножество входящих в неё ребер и подмножество из неё исходящих. Первое подмножество реализует процесс конвергенции/уплотнения материи, второе – её дивергенции, диспергирования.

Проблема адекватности. Из недавней истории приложений математики известен критерий адекватности математических моделей – структура модели и её числовой системы должна быть подобна, гомоморфна, пределе изоморфна, структуре объекта [29,30]. В различии числовой структуры модели и структуры объекта и состоит основной изъян в применении методов математической физики к моделированию распределённых систем. Например, то, что постоянный элемент физических теорий *связная* прямая действительных чисел R «с вычислительной точки зрения (т.е. с синтаксической, аналитической – Авт.) является фракталом» [34] есть скрытое несоответствие модели объекту, которое порождает перманентные приближения и вынуждает необходимость большой экспериментальной работы в дополнение к теории.

Основная трудность в моделировании некристаллических материалов та же, что и для сложных систем – достижение изоморфизма (или гомоморфизма) структур модели и объекта, который не обнаруживает видимых физико-математических прототипов. Иными словами, то, что происходит с объектами и процессами в материи, должно быть изоморфно тому, что происходит с переменными и функциями в модели, или, заостряя, математические преобразования должны быть изоморфны нематематическим явлениям. В терминах теории моделей, должны работать теоремы Бета об определимости и Крейга об интерполянте, которые и устанавливают необходимость такого изоморфизма.

4. МАТЕМАТИКА НЕКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ

Сегодня описание структуры материи идет с привлечением гладкого анализа из соображений удобства [31, С.134-135], так же как и в механике сплошной среды. Такая модель исключает моделирование уникальности внутреннего пространства образца и блокирует исследование сетки как геометрического параметра. Однако при переносе модели материи в расширенное фрактально-евклидово пространство числовой асимметрии указанные выше теоремы теории моделей автоматически оказываются выполненными, и физический аппарат теории расширяется аппаратом теории фракталов. Евклидовы координаты дополняются координатой (точнее подпространством) делимости или размера частиц. Первым соответствуют вещественные числа R, делимости p-адические Z_p. Они связаны инволюцией (инволюционным антиизоморфизмом, который является одним из видов изоморфизма):

$$R = inv\, Z_p = Z^{\leftarrow}_{1/2} \quad \text{и} \quad Q_2^{\#} = Z_2^{\rightarrow} \times Z^{\leftarrow}_{1/2} \qquad (1)$$

Мы принимаем $p = 2$ тогда числовая асимметрия имеет вид:

$$U = Q_2^{\#} = R \times Z_2 . \qquad (2)$$

Здесь $Q_2^{\#}$ есть поле Q_2, рассмотренное «с двух сторон листа» (обозначено противоположно направленными стрелками в (1)), или, что то же, полученное из рациональных чисел Q одновременно двумя пополнениями – вещественным и p-адическим (основу конструкции см. в [35, ch. 1.5]). Поскольку вещественные числа характеризуют протяжённость, а p-адические – делимость, то эти две числовые системы взаимно *неопределимы* и образуют логически ортогональную пару, связанную инволюцией. Синонимы этой связи – иррациональность (решёток в теории квазикристаллов), гиперболическая ортогональность (геометрия), ортоотрицание (в логике квантовой теории). Общенаучное название – дополнительность.

Число $u \in U$ имеет вид

$$u = x \cdot \xi, \quad x \in R, \ \xi \in Z_2 . \tag{3}$$

Поскольку *неопределимость* есть первичное определение случайности (курсы теории вероятностей обычно начинаются словами – «Мы не можем *определить* в деталях .... »), то такие числа оказываются комбинацией детерминированности и случайности, в зависимости от того в каком пространстве находится наблюдатель. Наблюдаемые величины получаются применением двух метрик – произведением двух величин чисел (см. ниже):

$$\| u \| = | x |_\infty \cdot | \xi |_2 . \tag{4}$$

В физическом пространстве они есть функции двух переменных – детерминированной и случайной. По принципу переноса [36] – базовые соотношения физики справедливы как для *R,* так и для Z_2, они остаются верными и для *U*, т.е. выраженные числами $\| u \|$.

Рассмотрим основные факты *2*-адической математики фракталов в связи с внутренним пространством материалов.

1. *Материя и числа.* Поле *p*-адических чисел Q_p является двойственным объектом. Как топологическая алгебра оно есть, с одной стороны, модель материи - фрактал, с другой – числовая система. Тем самым оно является числами со свойствами материи или материи с числовыми свойствами. Свойства метрик на Q_p играют главную роль в согласовании алгебраических и топологических свойств *p*-адических чисел.

p-Адическое пространство образуется бесконечным разбиением евклидова, или наблюдением его части с увеличивающимся разрешением микроскопа. Обычно, в фрактальной теории используется техника древесного разбиения квадратами или кубами (*quadtrees, octrees* – соответственно). Однако, та же картина, только более содержательная в физико-химическом смысле, получится, если в качестве бесконечных разбиений использовать технику многогранников Вороного или областей Делоне. Например, в квазикристаллах используется бесконечное разбиение пространства элементами мозаики Пенроуза (см. [21,22] выше). Во всех этих случаях получается одно и то же нульмерное пространство, которое естественно оснащается *p*-адическими числами.

Особенность нашего подхода в том, что используемая интерпретация *p*-адических чисел как инвариантов бесконечной делимости, как *материя-со-свойствами-чисел*, как новая степень свободы в физико-химическом пространстве материалов, позволяет топологизировать, абстрактные конструкции, составляющие математику некристаллических материалов: локально - компактные абелевы группы, многомерные решётки и пространства, пространство Лобачевского, их проекции в физическое пространство (*cut-and-project methods*), бесконечность точечных групп симметрии, обратное пространство и преобразование Фурье. То есть абстрактные формальные понятия переходят в разряд свойств материальных образований. Это и было замечено на ранней стадии развития теории фракталов – фрактальные среды действуют на процессы и материю аналогично преобразованию Фурье. Можно показать, что двойственности, аналогичные Фурье реализуются фракталами и 2-адическими числами в очень широком диапазоне. Сюда входят двойственность Стоуна, соответствия Галуа, арифметика Пресбургера и другие производные от них [4].

Тем самым мы получаем то, что называется *материальным эквивалентом функции*. Процесс создания материалов с заданными свойствами и решение проблемы *структура – свойства (QSAR, QSPR)* заключаются в поиске и воспроизведении этого феномена.

2. *Числовая асимметрия*. Вещественные и *p*-адические числа одинаково представляются формальными степенными рядами по степеням основания равного одному их простых чисел *p* = 2,3,5, ..., 13,...41,...:

$$x = a_{-n} \cdot p^{-n} + a_{-n+1} \cdot p^{-n+1} + \ldots + a_{-1} p^{-1} + a_0 +$$

$$+ a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \ldots + a_k \cdot p^k + \ldots =$$

$$= \sum_{i=-n}^{\infty} a_i \cdot p^i \qquad a_i \in A = \{ 0,1,2,\ldots, p-1 \} . \tag{5}$$

Точно так же одинакова позиционная запись обоих видов чисел:

$$x = a_{-n} a_{-n+1} \ldots a_0 a_1 \ldots a_k \ldots \tag{5*}$$

Отсюда получаются величины двух видов – метрики чисел, которые являются формальными функциональными аналогами пары «*конвергенция – дивергенция*». Вещественные числа получаются из (5)-(5*) сложением всех разрядов и тогда все цифра исчезают, *p*-адические – различением цифр в позиционной записи. Метрики имеют вид

$$x \in R, \ | x |_\infty = | x |, \quad \xi \in Z_2 \ \ | \xi |_2 = p^{-(-n)} . \tag{6}$$

И если не учитывать способ их генерации, то на вещественной оси они неотличимы. Нетрудно проверить, что эти две величины связаны гиперболическим отношением, известным как степенные законы, которое позволяет их различать по поведению:

$$| x |_\infty = c \cdot | x |_2^D \text{, где } D \text{ – фрактальная размерность.} \tag{6*}$$

Разложения (5)-(5*) имеют двойной смысл. При *n = 0* это целые *p*-адические числа $x \in Z_p$, которые образуют кольцо, при $n > 0$ это поле p-адических чисел Q_p. Однако, при чтении справа налево или с обратной стороны листа (5)-(5*) превращаются в правильную запись вещественных чисел. В числовой асимметрии (5)-(5*) рассматриваются частично как p-адические, частично как вещественные числа. Например, с $n>0$ вправо разложение представляет собой p-адическое число, влево – вещественное. Формы (5)-(5*) являются также числовым и бескоординатным прототипом *итеративной системы функций* [35, P.12-17; 37], которая является основным генератором фракталов является перекрестком физики, языка, биологии, социологии и т.п., где она известна под видом иерархии. Её действие – делимость материи, декомпозируемость систем, различение и границы, нарушения связности. Впервые такую интерпретацию p-адических чисел в 1955 г. предложил С.Улам при исследовании мультипликативных процессов, возникающих в цепной реакции деления [4,гл.3].

Порядок двух числовых систем взаимнообратный, каждая из них является инволюцией другой – обращением порядка на полурешётках [38] – $R = inv\, Z_2$. Эти две взаимообратные полурешётки вещественных и p-адических чисел реализуют два вида причинности, известные как *дефляция (сжатие)* и *инфляция (расширение)* в теории апериодического порядка. Инволюцию можно понимать как зеркальную наоборотность – меняются причинность, топология, свойства, т.е. происходит перескок от одного члена оппозиции к противоположному. Числовая асимметрия – это совмещение двух способов координатизации: физической и p-адической, что даёт основание для адекватного учёта геометрии внутреннего пространства. (подробнее см. [1]).

В ранее принятой авторами бинарной модели фракталов исходным пространством является проективная прямая Q_2, на которой взаимнообратными порядками (топологиями) определяются вещественные и 2-адические числа. Порядки связаны инволюцией: порядок цифр строки, представляющей вещественное число, обратен порядку цифр строки, представляющей 2-адическое число. Эта конструкция имеет вид проекций

$$R \leftarrow Q_2 \rightarrow Z_2 . \tag{7}$$

Рефлексивные свойства членов этой диаграммы

$$Q_2 \cong Q_2^n, \quad R \cong R^n, \quad Z_2 \cong Z_2^n . \tag{8}$$

позволяют рассматривать пространства любой счётной размерности n. Это аналогично проекции со сферы Римана на плоскость в теории функций комплексного переменного, т.к. Q_2 является замкнутой кривой. Плоскости проекции соответствует пара (R, Z_2) имеющая фрактальную геометрию. Теоретические проекции в диаграмме, которые формируют бесконечные строки двух числовых систем, на практике соответствуют усеченные проекции, порождающие строки конечной длины – рациональные числа

$$R \supset [\leftarrow \{Q_2] \rightarrow Q\} \subset Z_2 \tag{9}$$

(здесь пересекающаяся пара квадратных и фигурных скобок символизирует два способа порождения рациональных чисел Q). В целом эта конструкция аналогична методу сечений и проекций, используемой в теории квазикристаллов. Её схема в наших обозначениях имеет вид

$$\begin{array}{c} R \leftarrow R \times Z_2 \rightarrow Z_2 \\ \bigcup \\ L \end{array} \tag{10}$$

где $L \equiv Q_2$ – решётка, размерности больше евклидовой физической [10, 39]. Такие усеченные проекции шаров ограниченного размера $B_r(\xi) \subset Z_2$ порождают в R множества конечной сложности, характеризуемых как разбиение Делоне [29]. Сложность здесь представлена префиксом, строкой конечной длины в алфавите {0,1} $\xi = \xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_n$, $\xi_i \in \{0,1\}$. Этим в модель включается теория колмогоровской сложности, имеющая развитую технику, как в математической информатике, так и в физике [34].

Апериодический, дальний порядок квазикристаллов, означающий наличие повторяемости структур без их трансляционной периодичности, иллюстрируют многочисленные и разнообразные геометрически фрактальные образы. Периодичность у фракталов имеет вид самоподобия областей – событийной повторяемости образов. Причудливая геометрия фракталов, в общем случае, полностью исключает трансляционную симметрию [40].

Инфляция и дефляция квазикристаллических покрытий соответствует скейлингу и ремасштабированию фракталов. Эта пара движений образует известную из материаловедения пару диспергирование и агрегирование материалов в процессах их конструирования, которые являются воспроизведением универсальной пары сил Природы – притяжения и отталкивания, вездесущесть которых, по И.Ньютону, и составляют суть её простоты [41, С.308]. По-видимому исторически первый систематический обзор этой темы дан в [42].

Квазикристаллические покрытия, также как и многогранники Вороного и триангуляция Делоне, находятся во взаимнооднозначном соответствии с множеством действительных чисел R [43]. Если учитывать способ конструкции этого соответствия элементов покрытия с числовой системой, который является древесным (с различением цифр разложения), более точно оно является соответствием с 2-адическими числами Q_2. Это соответствие скрывает синтаксический изоморфизм между этими двумя основными числовыми системами математики R @ Q_2 [1]. В этом плане предложена новая система координатизации квазикристаллов, основанная на β – разложении действительных чисел [44]. Эта числовая система находится во взаимнооднозначном соответствии с p-адическими числами $\beta \to p^{\alpha}$, $\alpha \in R$. Однако физической интерпретации β – разложения пока не предложено. Напрашивается соответствие с p-адическими числами.

Фракталы как внутреннее пространство объемов вещества с внутренними полостями имеют отрицательную гауссову кривизну и, поэтому, являются гиперболическим пространством, т.е. пространством Лобачевского [16]. Это, очевидно, относится и к сетям – атомно-молекулярным, водородным и т.п., определяющих структуру внутреннего пространства.

7. Вблизи предела делимости, скейлинга физические, материальные фракталы переходят в свою дифракционную картину. Поэтому в качестве полного внутреннего пространства материала рассматривается произведение вещественных чисел на *2*-адические $Z_2 \subset Q_2$ [10, 40], т.е. по сути числовая асимметрия.

8. Бинарная интерпретация фракталов как образов числовой асимметрии [1] $U = R \times Z_2$ расширяет евклидово пространство R решёткой Z_2. Из-за взаимной неопределимости числовых систем (логической ортогональности) решётка *2*-адических чисел Q_2 является *иррациональной*, т.е. неопределимой конечными методами, числовой системой по отношению к физическому пространству. *2*-адические числа имеют характер пространственно-геометрической числовой системы – они сопротяжены вещественным объектам. Поэтому эта решётка остаётся неизменной при изменении размеров образца, подобно тому, как содержание книги не зависит от её размера. Физически *2*-адическая решётка известна как квазирешётка (см. о p-адических решётках [45,46]).

9. На решётке *2*-адических чисел естественным образом возникает топологический аналог преобразования Фурье – контравариантные соответствия Галуа [47]. Числовые системы R и Z_2 являются полурешётками – деревьями в взаимнообратным направлением порядка, которые связаны инволюцией. То есть движение в одном направлении, например от корня в R, порождает движение к корню в Z_2. Движение от корня есть расширение, дивергенция, к корню – сжатие, конвергенция. Поэтому для таких частично упорядоченных множеств, в нашем случае Z_2 и R

$$P = (Z_2, \leq_{Z_2}) \text{ и } Q = (R, \leq_R) \qquad (11)$$

определены отображения $f^{\bullet} : Z_2 \to R$ и $f_{*} : R \to Z_2$, которые в нашей схеме имеют вид $f^{\bullet} = (p \to p^{-1})$ и $f_{\bullet} = (p^{-1} \to p)$, такие, что $a \leq_{Z_2} f_{\bullet}(b) \Leftrightarrow b \leq_R f^{\bullet}(a)$, то четверка $(Z_2, f^{\bullet}, R, f_{\bullet})$ называется соответствиями Галуа. Нетрудно видеть из определения функций соответствия f^* и f_*, что они реализуют пару "*сжатие - расширение*", вполне аналогичную преобразованию Фурье, которое преобразует пик плотности в точечное или дискретное множество [39]. Но в этом случае уже не требуется аналитических условий векторного и гладкого анализов, и, соответственно, устраняется механика арифметических операций. Поэтому этим способом некристаллические материалы оказываются естественным образом носителями аналога преобразования Фурье и обратной решётки. Нетрудно проверить решётку Z_2 на свойство "обратности". Оно прямо вытекает из соотношения метрик $\left| x \right|_{\infty} \cdot \left| \xi \right|_2 \approx const$. Здесь первая из метрик вычисляется в R, вторая – в Z_2. Используя инволюцию $x = inv$ x можно ввести самодвойственную решётку S с двумя противоположными направлениями порядка или причинности $(\Sigma, \wedge, \vee) \cong (\Sigma, \left|\bullet\right|_{\infty}, \left|\bullet\right|_2) = Z_2^{\#} = (\left|\bullet\right|_{\infty}, \left|\bullet\right|_2)^N$.

10. Из теории p-адических чисел известно, что Q_2 неподвижно относительно любых алгебраических автоморфизмов $Q_2 = Aut\, Q_2$ [35, P.53]. Это, в свою очередь, означает, что как локально компактная абелева группа оно содержит все возможные группы симметрий (т.н. экзотические симметрии), которые являются частными видами автоморфизмов. Тем самым точечные группы симметрий в кристаллах заменяются на локально-компактные группы p-адических чисел. Как следствие аппарат модели дополняется известными из функционального анализа двойственностями Стоуна, Понтрягина и Гельфанда для C^*-алгебр, которые работают как в физике, так и в теоретической информатике.

11. *Независимость от размера образца* моделируется пространственной лабильностью *2*-адической сетки. Ему формально соответствует свойство неделимости ультраметрических пространств, которое можно выразить следующим образом:

$$Z_2 + Z_2 + \ldots + Z_2 = Z_2, \quad Z_2 \bigcup Z_2 \bigcup Z_2 \bigcup \ldots \bigcup Z_2 = Z_2. \quad (12)$$

Изменение размеров образца материала можно представлять как движение вверх-вниз по иерархии Z_2: большему размеру соответствует большая степень агрегации, меньшему – большая степень диспергирования. Тогда это соотношение (12) очевидно.

Следующее рефлексивное соотношение может использоваться в двух направлениях – многомасштабном моделировании и создании мультифизической модели материала, т.е. модели, включающей разнокачественные физико-химические процессы:

$$Z_2 \cong Z_2 \times Z_2 \times \ldots \times Z_2 = Z_2^N \text{ для любого счётного } N. \quad (13)$$

Знак "≅ " – знак изоморфизма, означает, что левая и правая части имеют одинаковую структуру, т.е. представляют собой одно и то же пространство. В частности (13) объясняет, почему в одной точке евклидова (физического)пространства могут сосуществовать поля различной природы – электромагнитное, тепловое, звуковое и т.п. Точка как бы представляет собой сжатое (гипер)пространство. Ввиду того, что решётка *2*-адических чисел пространственно лабильна и может иметь произвольную структуру, сохраняя свойство "обратности", квазикристаллические рассмотрения переносятся и на случай аморфных материалов. Эта экстраполяция поддерживается теоремой о существовании ультраметрического, т.е. *p*-адического, двойника у любого метрического пространства [48,49]. В нашем случае это внутреннее пространство материала.

Из геометрической теории меры известен следующий факт, касающийся двойственного характера нульмерных множеств: любое подмножество полной меры (и любой формы) в евклидовом пространстве может быть получено проекцией из нульмерного, и точно так же любое фрактальное подмножество как множество слов машины Тьюринга воспроизводится проекцией из него же [50,51, ch.6; 52]. Множества с различной формы и топологии, в математике играют роль формального аналога структурированных материальных объектов так же как строки машины Тьюринга являются пространством формальных языком теоретической информатики. Налицо объединение двух дополнительных сторон описания внутреннего пространства.

12. Известно, что математическая физика не формализует виды и причины движения, но лишь кодирует его, принимая как данное. В то же время известна сложная картина движений во внутреннем пространстве материи, например в жидкостях. *p* - Адические пространства обладают свойством самодвижения, являясь собственной вычислительной моделью, что особенно важно для модели живой материи [53]. Это, в частности, значит, что под воздействием внешних факторов, внутреннее пространство самоорганизуется используя собственные логические и считающие потенции. Сюда же относится и процесс старения материалов.

5. ЭЛЕМЕНТЫ КРИСТАЛЛОГРАФИИ В Z_2

Рассмотрим основные понятия кристаллографии в пространстве 2-адических чисел. Предварительно заметим, имея ввиду поворотную симметрию, что углы вращения кодируются 2-адическими числами так же как и линейные меры. Для пояснения этого организуем последовательный процесс разбиения круга диаметрами: первым пополам, на 4 сектора вторым, ортогональным первому, на 8 секторов ещё двумя и т.д., помещая образующиеся секторы разбиения как обычно строками {0,1}.

Кристаллографическое ограничение $1+2\cdot\cos(\phi)=n,\, n\in Z$, устанавливающее допустимость только 2-х, 3-х, 4-х, и 6 - кратной поворотной симметрии в евклидовом пространстве, в Z_2 превращается в тождество:

$$\left|1+2\cdot\cos\phi\right|_2=\left|n\right|_2,\ \phi\in Z_2,$$

откуда $\max\left\{\left|1\right|_2,\left|2\right|_2\cdot\left|\cos\phi\right|_2\right\}\le 1$ (14)

(в силу свойства ультраметрики). Поскольку $\left|\cos\phi\right|_2\le 1$ [54,P.136], то кристаллографическое ограничение выполнено для любых $\phi\in Z_2$ то есть допускает все углы поворотной симметрии.

Правильные многоугольники. Рассмотрим атомы, представленные шарами $A_i=2^{n+1}Z_2,\left|A_i\right|_2=2^{-(n+1)},\ i=1,2,\ldots,N_A$, при n>>1. (15)

Выберем «угол» $\phi\in Z_2,\left|\phi\right|_2=1$. Образуем «многоугольник» из атомов $A_1, A_2, \ldots, A_N$, N>>1. Длины ребер такого многоугольника равны:

$$\left|A_{i+1}-A_i\right|_2=\left|\phi\cdot A_i-A_i\right|_2=\left|\phi\right|_2\cdot\left|A_i\right|=1\cdot 2^{-(n+1)}=const. \quad (16)$$

Трансляционная симметрия. Очевидным образом, в силу того, что Z_2 является топологической группой по сложению и умножению на каждом направлении $\phi=\phi_0$, для любого «базисного вектора» $\xi=\xi_0,\ A_i=A_j+(i-j)\cdot\xi_0\in Z_2$. Точнее, каждый такой луч порождает бесконечное множество подобных решёток в физическом пространстве, поскольку при переходе к ультраметрике $\left|(i-j)\right|_2=\left|n\right|_2\in\left\{1,2^{-1},2^{-2},\ldots,2^{-k},\ldots\right\}$. То есть пространство содержит всевозможные трансляционные симметрии так же как и поворотные независимо от масштаба (т.е. размера образца).

Обратное пространство. В этом разделе мы проверим свойство обратности для *p*-адической решётки (квазирешётки физики). Для этого сгруппируем известные факты из теории p-адических чисел и сравним их с фактами обратных решёток кристаллографии.

- $Z_2\cong Z_2\times Z_2$, т.е. как модуль над самим собой Z_2 решёткой в смысле теории решёток и порядка. Можно показать, что $R\times Z_2$ есть полная дистрибутивная и модулярная решётка [4, гл.5].

1. Обратная решётка является Фурье-образом прямой решётки. В нашей модели Фурье-образ заменяется соответствиями контравариантными Галуа, которые также реализуют Фурье-двойственность «агрегация-диспергирование» [4, гл.5]. Таким образом, считая кристаллические решётки принадлежащими *R*, приходим к выводу, что Z_2=*invR* есть аналог её фурье-образа, моделируемый соответствием Галуа. Масштабно-инвариантной решёткой является множество шаров вида $B_\xi(r)=\left\{\eta:\left|\eta-\xi\right|_2\le r\right\},\ \ \xi,\eta\in Z_2$, которую можно рассматривать как «фурье-образ» атомно-молекулярных решёток.

2. Рассматривая представления (5) и (5*)

$$x = a_{-n} \cdot p^{-n} + a_{-n+1} \cdot p^{-n+1} + \ldots + a_{-1}p^{-1} + a_0 +$$
$$+ a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \ldots + a_k \cdot p^k + \ldots =$$
$$= \sum_{i=-n}^{\infty} a_i \cdot p^i \quad a_i \in A = \{ 0, 1, 2, \ldots, p-1 \}, \quad (5)$$
$$x = a_{-n} a_{-n+1} \ldots a_0 a_1 \ldots a_k \ldots \quad (5^*)$$

Как последовательность значений некоторой функции или, равно, как (бесконечномерный) вектор, придём к понятиям векторной решётки (аналога пространств Ритца, Канторовича) и, в итоге к банаховой решётке [55]. Этой решётке функций естественно сопоставляется поле их градиентов. Этот факт ведёт к формализации понятий тепла и температуры.

3. В силу (анти)изоморфизма $R \cong Q_p$ и $[a, b] \subset R \cong Z_p$ для любого p, и того, что R является гильбертовым пространством, пространство p-адических чисел также гильбертово. Соответственно, пространство комплексных чисел имеет свой вещественно-неархимедов аналог $C = R \times R \cong R \times Q_2$. Это расширяет содержание известной теоремы М.Соле об исключительности полей чисел квантовой механики полем p-адических чисел. Нетрудно показать, что в числовой асимметрии посредством p-адических чисел реализуются известные пространства последовательностей функционального анализа [4]. Тем самым, построения модели не входят в противоречие с квантовой механикой.

4. Материя внутреннего пространства принимает математический образ как произведение ортогональных (под)пространств:

$$M_I = R \times Z_2 .$$

p-Адические числа могут иметь следующие формальные интерпретации:

$$\xi = a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \in Z_p \mapsto \vec{\xi} = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) -$$

векторы конечной или бесконечной длины. Очевидно, что вектора вида

$$\xi = (0, 0, \ldots 1_i, 0, \ldots) \in Z_2$$

и

$$x = (0, 0, \ldots, 1_j, 0, \ldots) \in R .$$

Поэтому бесконечномерные базисы подпространств числовой асимметрии взаимно ортогональны. Вся техника параллельных плоскостей и векторов, зон Вигнера-Зейтца, Бриллюэна кристаллографической теории исчезает в случае некристаллических материалов. Поэтому имеет смысл говорить не о прямой и обратной решётках, а о прямом и обратном пространстве. Указанные зоны можно построить, проецируя Z_2 в R, т.е. строя каким либо способом фрактальное представление внутреннего пространства [35, P.12-17].

Аналогичный вид – как гиперпространство, имеют структуры данных в компьютере:

$$\xi = a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \in Z_p = \{0, 1, 2, \ldots, \eth - 1\}^N ,$$

N – натуральное число

Ещё одна интерпретация:

$$\xi_f = \{ f(0) = a_0, f(1) = a_1, \ldots, f(n) = a_n, \ldots \} -$$

ограниченные функции.

Последние две интерпретации используются в теоретической информатике. Следовательно, мы получаем расширение формального аппарата методами банаховых решёток. Они же решётки структур данных [46,56,57]. Поэтому обратное пространство согласовано с математикой компьютера и натурные эксперименты могут быть, в принципе, заменены компьютерными.

5. Из соотношений для метрик (6) и (6*) (теорема Островского) следуют обратные соотношения для сопряженных величин решёток и их элементарных ячеек [58, С.23-26].

6. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ДИФРАКЦИЯ

Введение вероятностной меры на некотором множестве – геометрии материала, является внешним, искусственным приёмом характеризации. Известным фактом является то, эта задача неразрешима в общем случае [59]. В реальности введение меры возможно только путём её имитации [60]. Это значит, что не известен природный процесс наделения мерой подмножества/подсистемы/части целого, которые поддавался бы прямому измерению аналогичный вычислению меры разбиения арифметическими операциями (о них см. выше – введению вероятностной меры обычным способом должна соответствовать вполне определённая механика в физическом пространстве). Это ещё одна трудность применения методов классической математики к сложным системам, какими являются некристаллические материалы. В ранней статье [61] авторами было показано, как использование модели неопределённости в виде теории возможностей, согласованной с p-адическими числами, преобразуется в вероятностные представления посредством *logit*- преобразования. Здесь мы дополним эту схему в направлении теории дифракции.

В числовой асимметрии (1)-(4) число имеет вид произведения детерминированной вещественной и случайной p-адической компонент. Его величина $\| u \| = | x |_\infty \cdot | \xi |_2$ оказывается, таким образом, случайным числом. Каждая из компонент определяется на полурешётках (бинарных деревьях R и Z_2) и, потому, $\| u \|$ определено на дереве удвоения периода Фейгенбаума, изоморфе Z_2, порождаемого логистическим уравнением и оказывается чисто случайным числом в силу взаимной неопределимости R и

Z_2. В работах [62,63] построено преобразование бинарного дерева в почти-нормальную функцию распределения вероятностей. В нашей модели эта функция имеет компактный носитель и для бинарного числа $\| u \|$ имеет вид функции, зависящей от двух переменных:

$$P(\| u \|) = P(| x |_\infty \cdot | \xi |_2) = \frac{1}{\pi(e^{\frac{\| u \|}{2}} + e^{-\frac{\| u \|}{2}})} . \quad (17)$$

В работе авторов [61] было показано, что уравнение золотого сечения в числовой асимметрии преобразуется эту функцию распределения, и, следовательно, его корень имеет почти-нормальное распределения с выраженным максимумом. Следовательно, и величина золотого сечения $\tau = 1{,}618...$ имеет неопределённость, и зависит от масштаба измерений. По замечанию выше об углах, это почти-нормальное распределение относится как линейным, так и к угловым измерениям. Это наблюдается в представлении квазикристаллов моделями покрытий – обе меры в них присутствуют.

Отсюда следует, что $\tau = 1{,}618...$ может быть выбрано в качестве единицы поля числовой асимметрии. Такая единица поля не зависит от человеческого выбора единиц измерений и можно считать, что она определяется природой, «независимо от сознания». Это открывает возможности включения в теорию арсенала чисел Фибоначчи и связанной с ними математики [64,65]. В частности в канонических разложениях *p*-адических чисел (5)-(5*) заменив $p \to \tau$, придём к τ-адической версии числовой асимметрии. Таким образом, пространство оказывается «инфицированным» золотым отношением и числами Фибоначчи, что вполне согласуется с их наблюдаемой универсальностью.

Полученная функция распределения от двух переменных является композицией дополнительных моделей неопределённости – вероятностной и возможностной. При фиксированном значении *x*, работает теория возможностей, при фиксации кластера – размера образца, теория вероятностей.

Тогда общая функция распределения *P(V)* образца объёма *V* оказывается композицией почти-нормальных функций, в силу $V = \bigcup_i V_i = \bigcup_i \bigcup_j V_{i,j} = \ldots$ и его аналога для $V \propto Q_2, V_{i,j} \propto 2^{i+j} Q_2$, т.е. одной из фрактальных функций:

$$P^{\#}(V) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-D \cdot i} \cdot P(\overline{a_i} \circ 2^{-D \cdot i} \cdot V) , \quad (18)$$

где $V = \| V \| = | V |_\infty \cdot | V |_2$, “ $\circ$ ” – конкатенация, $\overline{a}$ – префикс, координата V_i в Z_2, представляет собой строку нулей и единиц – стандартный объект теории вероятностей, и, поэтому, может анализироваться её методами (биномиальное распределение).

Для таких функций известна техника построения автокорреляционной функции [51, Ch.11], которая вполне аналогична стандартной. Однако, в этом случае более прозрачным становится физический смысл сингулярных мер и распределений [66;10, Ch. 9]. Здесь возникает интересная задача, требующая отдельного рассмотрения. Она заключается в следующем. Лучи электронов и/или другого рода, пронизывающих образец материала, можно моделировать также *p*-адическими числами, поскольку прохождение лучей через объём материала является виртуальным расчленением/делением его объёма, что в точности соответствует интерпретации *p*-адических чисел. Если, дополнительно, представить объём материи своим ультраметрическим, т.е. *p*-адическим прообразом (о чем существуют соответствующие теоремы в функциональном анализе [48,49,67], то задача дифракции формулируется как задача интерференции двух подпространств *p*-адических чисел. Представляется, что в основе этой схемы должна лежать адельная формула [68]:

$\chi_\infty(x) \cdot \prod_{p \in prime} \chi_p(x) = 1, \quad x \in Q$ – рациональное число

$$\chi_\infty(x) = \exp(-2\pi \cdot i \cdot x) , \quad (19)$$

$$\chi_p(x) = \exp(2\pi \cdot i \cdot \{ x \}),$$

где $\{ x \}$ – дробная часть *p*-адического числа.

Эта формула представляет *p*-адические числа в виде волн различной частоты в физическом пространстве. Эта теоретически необычная схема, конечно, требует дальнейшей проработки и здесь не рассматривается. Её возможное решение может оказаться полезным для компьютерной томографии не только в материаловедении, но и в, например, медицине.

(*Замечание.* В формуле для функции распределения *P(V)* использовано понятие *D* – фрактальной размерности, она же не имеющая пока интерпретации степень в определении ультраметрики $| \bullet |_p^D, \quad D > 0, \; p \in$ простым числам. Стоит заметить, ввиду большого числа работ, использующих *D* как физический параметр теории, что фрактальная размерность может быть точно вычислена лишь для математически регулярных фракталов – множества Кантора, фигур Серпинского, континуума Менгера и им подобных. Для естественных фракталов, с не фиксируемым априори, т.е. неконтролируемым скейлингом, удается получить лишь неравенство для этой величины. По своему определению фрактальная размерность, так же как и мера Хаусдорфа катастрофически чувствительны к малейшим флуктуациям измерительных мер, и в целом, являются невычислимыми функциями, так же как и вещественные числа, задаваемые бесконечным рядом цифр разложения (т.е. к величине последнего знака представления числа в компьютере). [69,70]. По этому своему свойству они скорее могут быть отнесены к какой-либо модели неопределённости, нежели к физической характеристике материала. В случае *явно аналитически заданных* нелинейных рекуррентных зависимостей фрактальная размерность оказывается равной отношению энтропии Больцмана к соответствующему показателю Ляпунова [71, Ch.7]).

Для практики материаловедения в методах вычисления фрактальной размерности присутствует неприятный момент, который не может быть реализован на практике – необходим подсчёт числа посещений изображающей точки динамической системы заданного элемента множества разбиения исходного пространства, при бесконечном времени наблюдения действия рекуррентной процедуры. Иногда встречающиеся способы вычисления фрактальной размерности косвенными способами, исходя из некоторых феноменологически – физических или термодинамических, представлений, неявно априори постулируют её вычислимость [72]. Здесь, как обычно, упускается из виду тот факт, что если число или функция вычислимы некоторой теорией, то они вычислимы на машине Тьюринга и, потому, математически эквивалентны.

В целом вычисления фрактальной размерности оказываются неверифицируемы, совершенно аналогично вычислению вероятности некоторого события. Это и наблюдается на практике – до сих пор не создана методика устойчивой характеризации естественных фрактальных структур. Мы пользуемся этой величиной как аналогом ультраметрики. Поэтому, здесь, конечно, напрашиваются дальнейшие усилия по связи с фрактальной размерности понятиями материаловедения, причём именно в такой, невычислимой характеризации. Такое качественное поведение известно – скачок свойств материала при превышении порога протекания в теории перколяции.

Для того, чтобы «что-то» измерить, надо это «что-то» представить в виде натурального ряда с последующей организацией числовой прямой. Такие методы хорошо известны – измерение длины гладкой кривой, площади или объёма фигуры или тела неправильной формы и т.д. (см. теорию меры). При этом требуется достижение возможно более точного взаимно-однозначного соответствия измеряемого объекта и организованной числовой прямой. Хорошо известно, что при измерении фракталов приходится организовывать два натуральных ряда – экстенсивный по протяженности и интенсивный углублением в детали. Интенсивный ряд организует дополнительную степень свободы – делимость материи. Из-за того, что фрактал дыряв на всех масштабах, взаимнооднозначного соответствия между натуральными рядами и фигурой никогда не удаётся достичь – углубление в детали продолжается бесконечно. Эти натуральные ряды взаимно неопределимы и являются дополнительными, так же как и привычные оси координат (X,Y). Неопределимость является материнским понятием для математики и семантически означает недоказуемость, невыводимость (несводимость), невычислимость, непрогнозируемость, неопределённость, отсутствие закономерности в последовательности событий. Очевидным образом это соответствует смыслу понятия «случайность» в его первичном и самом широком смысле. Поэтому то, что вычисляется на интенсивной оси, является случайным по отношению в экстенсивной оси в случае, если между событиями на этих осях не установлена функциональная зависимость.

Поэтому невычислимость фрактальной размерности означает, по сути, её случайный характер по отношению к стандартным физическим характеристикам. Способы её вычисления основаны на делимости соответствующего объекта и, поэтому, ортогональны физическому евклидову пространству – длине береговой линии, площади стран, островов и т.д. Поэтому имеет смысл считать фрактальную размерность p-адическим числом и соответствующие степенные зависимости формулировать в виде $y = x^{\xi}$, $x, y \in R$, $\xi \in Q_2$. Такое формулировка ведет в мультифрактальной идее и многомасштабному моделированию, поскольку $y = x^{\xi} = \prod_{i=-n}^{\infty} x^{a_i \cdot p^i}$ в силу (5)-(5*). Эта тема требует, в свою очередь, отдельной работы.

7. ТЕРМОДИНАМИКА ВНУТРЕННЕГО ПРОСТРАНСТВА

Термодинамическое представление вещества является формальной моделью его сложности или системности. Системная идея построения модели внутреннего пространства заключается в синтезе аналитического материала физико-химии и термодинамики перенесенного в пространство Лобачевского. Иными словами – это термодинамика в пространстве Лобачевского с последовательным использованием бинарности, заключенной в числовой асимметрии. Ей соответствуют седловые точки пространства, в каждой из которых существует пара отображений – сжимающее и растягивающее. Рассмотрим разложения – наблюдаемую часть числа (5)-(5*):

$$x = a_{-n}a_{-n+1}\dots a_0 a_1 \dots a_k \dots \qquad (5^*)$$

Движение в гиперболическом пространстве может происходить как вправо, так и влево строки (5*). Это известное из теории динамических систем движение, называемое сдвигом Бернулли. Влево оно порождает разбегающиеся траектории, расширяющееся многообразие, диспергирование материи, вправо – сжимающееся многообразие, уплотнение материи [73, гл.10], т.е. воспроизводит универсальную пару «энтропия – энергия». Поэтому в каждой такой (седловой) точке пространства динамика будет определяться равнодействующей пары энергия-энтропия. Основные черты системной идеи термодинамики следующие:

1. Образец материала формируется двумя конкурирующими процессами, имеющими универсальный характер – энтропия и энергия [74], диспергирование и агрегация, рассеяние и коагуляция, расширение и сжатие в материаловедении и других естественных науках. Топологическая общность этих пар заключается в том, что их члены являются условием осуществления друг друга и, в этом смысле они дополнительны, причём первый член этой пары порождает дискретное, разрывное распределение материи, а второй – плотное, непрерывное материальное образование. Формальным аналогом этой пары являются дискретные (дисконтинуальные) и непрерывные (визуально связные) множества. Числовым соответствием служит пара «*p*-адические» Q_p – «вещественные» *R* числа. Первые интерпретируются как инварианты бесконечной делимости материи [75, С. 106,120], вторые как траектории её связности/непрерывности. *p*-Адическим числам соответствует фрактальная геометрия, вещественным – евклидова. В итоге появляются новые независимые переменные/координаты «энтропия – энергия», т.е. само пространство становится не механическим а термодинамическим (подробнее об этом ниже).

Связь между этими координатами есть инволюционный антиизоморфизм, или, проще, *зеркальная наоборотность*, которая меняет как топологию, порядок событий, логику, причинно-следственные связи так и свойства. Инволюционный антиизоморфизм в модели является особым параметром, который может иметь различные формальные выражение. Например, ясна его роль как формального аналога температуры (см. ниже). Символически

$$\text{энергия} = inv\ (\text{энтропия})$$
$$\text{энтропия} = inv^{-1}\,(\text{энергия}) \qquad (20)$$

или в терминах координатных осей $\left|\bullet\right|_2 = i\cdot\left|\bullet\right|_\infty$. (Подробнее о формальностях в [4]).

Более предметно, рассмотрим два вида фундаментального уравнения Гиббса. Энтропийный вариант имеет вид [76, С.90-91]:

$$d\,S = \frac{1}{T}d\,U + \frac{P}{T}dV - \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{m}\mu_i\cdot d\,n_i\,.$$

Энергетический вариант имеет вид:

$$d\,U = T\cdot d\,S - P\cdot dV + \sum_{i=1}^{m}\mu_i\cdot d\,n_i\,. \qquad (21)$$

Очевидным образом, с одной стороны, по аксиоматике модели $d\,S = inv^{-1}(d\,U)$. С другой стороны первое – энтропийное уравнение получается из второго делением на *T* – температуру. Поэтому температура играет роль регулятора/балансира, коэффициента пересчёта между процессами диспергирования и агрегации, энтропии и энергии:

$$T \propto inv: U \to S; \quad T^{-1} \propto inv^{-1}: S \to U\,, \qquad (22)$$

т.е. температура и её обратная величина представляют собой контравариантные соответствия Галуа (2). Арифметические операции, сводящие второе уравнение (21) к первому, скрывают топологическую роль температуры $T \leftrightarrow T^{-1}$ (22). В частности, очевидно, что $T\cdot T^{-1} = 1$ имеет вид степенного закона для вещественной и *p*-адической метрик $\left|\bullet\right|_\infty\cdot\left|\bullet\right|_2^d = c$. Как было показано авторами [1,С.87-88] эти метрики связаны преобразованием Лежандра, следовательно, так же связаны энтропийное и энергетическое подпространства системы. Поэтому полное исследование внутреннего пространства должно основываться на этих двух подпространствах, которые совпадают с пространством координат и импульсов теоретической физики. И если в теории кристаллов главная роль принадлежит пространству координат в силу жесткости атомно-молекулярной решётки, а пространство импульсов присутствует как случайные колебания атомов вблизи положения равновесия, то можно ожидать, что в некристаллической теории роль пространства импульсов – движений молекул, частей, слоев, друг относительно друга, должна возрастать по мере удаления от кристаллов.

2. Зависимость свойств образца материала – теплоемкости, электропроводности и т.д. *одновременно* от факторов различной физико-химической природы, в том числе и геометрического фактора. Простой обзор методов материаловедения показывает, что свойства образца формируются целым спектром процессов различной физико-химической природы [77,78,79]. В этом суть первого начала термодинамики – закона сохранения и превращения энергий, *который, однако, оставляет в стороне вопрос о существовании общей основы разнородных энергий, которая и обеспечивает их связь через превращения*. Единственной возможностью теоретического объединения их может служить фрактальная геометрия как универсальная топология материи. Эта междисциплинарность и является основной формальной задачей общей теории систем. Нетрудно видеть, что термодинамическое определение свойств вещества – термодинамический анализ, представляет собой то, что называется в теории систем *анализом через синтез* – определение целостного образа объекта посредством

синтеза/ассемблирования его граней различной природы. Именно потому, что обычный физико-математический анализ недостаточен в задачах материаловедения, определяющая роль в его результатах принадлежит натурному эксперименту, котором разноприродные грани объекта действуют совместно и одновременно. В итоге образец материала *как система* может быть описан различными формальными моделями (различными математическими языками), не сводимыми друг к другу.

Приведём, в качестве иллюстрации подлежащего разнообразия выражения для работы δW системы [80, С.27-28]:

$\delta W = P \cdot dV$ – расширение под действием внешних сил;

$\delta W = -\sigma \cdot d\Sigma$ – работа сил поверхностного натяжения при изменении площади на $d\delta$;

$\delta W = -\dfrac{1}{4\pi}(E \cdot dD)$ – поляризация диэлектрика, E – напряжение эл. поля, D – индукция;

$\delta W = -\dfrac{1}{4\pi}(H \cdot dB)$ – работа при изменении напряженности H в магнетике с индукцией B;

$\delta W_c = -H \cdot dJ$ – собственная работа намагничивания, J – намагничивание;

$\delta W = -\sum_{i,j}^{3} \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}$ – эл. работа однородной деформации единицы объёма твердого тела [81]:

σ_{ij} – компоненты напряжения, ε_{ij} – компоненты сдвига;

[75, с. 273]:

$\delta W = -\sum_i \psi \cdot de$ – электростатическая работа

$\delta W = -\sum_i m_i g L_i dn_i$ – подъём dn_i частиц на высоту L_i. (23)

3. *Внутреннее через внешнее.* Известно, что изменение свойств целостного образца под внешним воздействием идет через реакцию внутреннего пространства, изменение внутренних параметров [80, С.19]. Иными словами модель включает в себя как внешние, так и внутренние движения и события.

4. *Инвариантом* взаимодействия внешних и внутренних факторов и параметров является геометрия – фрактальный объем образца. Это можно представить диаграммой, которая определяет объём V одновременно над двумя числовыми системами R и Z_2:

$$R \supset V_* \quad \leftarrow V \rightarrow \quad V^* \subset Z_2 \qquad (24)$$

Фрактальный объём естественным образом несёт в себе и определяет структуру образца. Обычно это сети разного рода – атомно-молекулярные в твёрдом теле, водородные в растворах и жидкостях. Сети являются одной из представительных интерпретаций фрактальных структур – они создаются и сами порождают упомянутые выше два базовых процесса, т.е. являются их инвариантами, формирующих фрактальную структуру материи (из последних см. [83,84,85]. Следовательно, в виде сетей рассмотрение включается геометрический фактор как самостоятельный параметр, не сводимый к физико-химическим. Сети - это ещё одна параллель с теорией систем. Здесь открывается перспектива исследования таких явлений как «*материальный эквивалент функции», «геометрический эквивалент функции», «геометрический эквивалент материи».* Эти вопросы также требуют отдельного исследования и, поэтому, здесь не прорабатываются.

(*Замечание*. Формальное совпадение систем и фракталов можно обнаружить при прямом сопоставлении фактов теории систем, накопленных к настоящему времени, с известными результатами математической науки, которые стоят за фрактальными множествами. К ним относятся, прежде всего, делимость, иерархическое строение, трансдисциплинарность, естественность и открытый характер, плохие определимость и контролируемость, т.е. неформализуемость, сетевой паттерн, двойственность характеризации. Рассмотрим эти точки соприкосновения теорий. Подробнее см. [4]).

5. *Энтропия* является одним из неясных понятий термодинамики. Существует множество вариантов её смысла – динамических систем Колмогорова-Синая, статистической Больцмана, Гиббса, теории информации Шеннона [86], ε – энтропия множеств Колмогорова-Тихомирова [87], алгоритмическая энтропия колмгоровской сложности [88, Ch.8], показатели Ляпунова в теории хаоса, энтропия формальных языков [89], в том числе и топологическая [90] Общим местом семантики многообразия этого понятия – хаотичность, неопределённость, непредсказуемость, случайность, является неопределимость как оппозиция вычислимости, предсказуемости и, в целом, математической формализации. Энтропия вычисляется на гранулированных множествах или на вводимых разбиениях пространств. При энтропийных процессах, как можно понять из всего объёма её описаний, теряется определимость, предсказуемость, вычислимость, т.е. детерминированность в общем смысле – параметров, функций, процессов. Однако этот ряд понятий не имеет формального выражения – что математически происходит при росте энтропии? Как это выразить в топологии, логике, т.е. какой формальной структурой или моделью? И, наконец, каков его физический смысл?

Примером может служить термодинамическая энтропия, которая определяется простой алгебраической дробью – отношением тепла к температуре, и не содержит указания на топологию подлежащего пространства. Оба этих понятия этой дроби присутствуют как отдельные параметры, которые не имеют соответствующих формальных аналогов. Ввиду того, что стандартная термодинамика является «одномасштабной» теорией, а процессы конструирования материалов предполагают движение по координате размера/делимости, т.е. сопряжены с изменением числа атомов/молекул от числа Авогадро до десятков/сотен/тысяч в области наноявлений, представляется необходимым иметь формальные модели тепла и температуры, инвариантные относительно изменений масштабов/массы/числа частиц.

Общим изъяном всех вариантов формализации энтропии является присутствующая в них механическая составляющая, связанная с арифметическими операциями, составляющими формулы. Это обуславливает определённую искусственность этого понятия, заключающуюся в понимании её с позиций «третьего лица»/экспериментатора. В то же время различные формы и аналоги энтропии присущи всем без исключения природным процессам, являясь одним из двигателей её самоорганизации, т.е. движения без приложения внешней силы [91]. Такая ситуация создаёт препятствия в понимании природы материи и, соответственно, создания предпосылок её формализации.

Как нетрудно видеть, все варианты формализации энтропии, равно как и все варианты её смысла укладываются в пространство Z_2, которое можно мыслить как пространство натуральных рядов или вещественных осей с масштабируемой единицей и движущимся началом. Соответственно, в нем возможны все действия с позиций «третьего лица». Хаотичность, рассеяние, случайность энтропии являются следствием неопределимости *p*-адических чисел по отношению к вещественным. Наличие в Z_2 масштабных копий натуральных рядов и «фрактальных» прообразов вещественных прямых

$$R \to R^{\#} = inv\, Z_2 = (\, x : x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^i \,,\, i = 1, \ldots N)$$

предуготовляют все возможные алгебраические определения энтропии. Ляпуновские показатели $\left| x \right|_2^{d\cdot n} = p^{-d\,n} \to e^{-d\,n\,\mathrm{h}\,p}$ соответствуют энтропии динамических систем. Выбор варианта, по-видимому, должен определяться спецификой задачи. Самая общая схема такова. Энтропия определяется выбором метода измерения, по нему строится некая функция, определяемая целями задачи. Формально:

$\mu : Z_2 \to 2^n \cdot R^{\#}$ – выбор числовой оси соответствующего масштаба;

$s_1, s_2, \ldots, s_n : R^{\#}_{\mu} \to R^{\#}_{\mu}$ – выбор функций-выражений энтропии. (25)

Поэтому, если говорить о единственности в математическом физическом смыслах, то наиболее адекватный кандидат на роль энтропии – множество *p*-адических чисел Z_p. Все остальные можно рассматривать как функции на этом пространстве. Естественным формальным аналогом понятия энтропия могут служить связанные понятия сложности и вычислимости, составляющие теорию вычислительной сложности. Неопределимость Z_2 средствами вещественного анализа интерпретируется как невычислимость, то есть *NP*-сложность. Таким образом, приходим к выводу, что энтропия есть экспоненциальное нарастание времени вычисления, т.е. нарастание неопределимости во всех гранях её смысла, обусловленное разворачиванием дивергентного процесса в полное Z_2, в противовес линейному времени в вещественном случае. Мерой энтропии в таком варианте может служить максимальный показатель степени в представлении *p*-адического числа или обратная ему величина фрактальной размерности – чем она меньше, тем более диспергирована/рассеяна материя, тем выше её неопределимость, то есть энтропия. Такое измерение энтропии ближе к практике измерений в материаловедении и сохраняет свою связь с математикой.

Точнее, существующее определение энтропии для формальных языков Σ (тоже, кстати, неоднозначное) $s = \sum_i \left| \xi_i \right|_2, \, i - 1, \ldots, N, \, \xi_i \in Z_2, \, (\, Z_2 \cong \Sigma)$, трудно применимо из-за неразличимости в измерениях архимедовой и неархимедовой метрик чисел. Близкое по смыслу выражение имеет вид аддитивной метрики *2*-адических чисел:

$$s = ord_2 \left| \, \xi \, \right|_2^{Dn} = D \cdot n. \qquad (26)$$

Здесь *n* – номер иерархии деления, число частей диспергированной материи, *D* – фрактальная размерность уровня *D=D(n)*.

Соответственно математическая сложность принимается в колмогоровском варианте как сложность конструирования диспергированной материи. Каждому элементу деления $s_i = \left| \xi_i \right|_2^{Dn}$ соответствует префикс в Z_2 – как вариант колмогоровской сложности $K_{\xi} = a_0, \ldots, a_{i-1} \xleftrightarrow{1-1} \left| \xi_i \right|_2^{Dn} = \exp(D \cdot n \cdot \ln 2) \approx e^{c\cdot n}$. То есть рост сложности является экспоненциальным, что характерно для задач класса *NP*- сложных. (Заметим, что K_{ξ} может интерпретироваться как выражение для энергии, необходимой для диспергирования материи до уровня *n* [92]).

Кроме того, можно показать, что фрактальная размерность в (26) может служить мерой возможности из теории нечётких множеств – мерой неопределённости, альтернативной классической вероятности. Она получается прямым введением ультраметрики на пространстве элементарных событий. Такой способ устойчив относительно изменения числа элементарных событий, т.е. размера и формы образца материала. Это позволяет ввести в теорию модели неопределённости, имманентные задачам материаловедения. (Нечёткие множества привлекательны своими интерпретациями и намерениями, но вызывают много возражений своей формальной частью, тесно связанной с классической вероятностью, и потому, являющимися от неё «зависимой величиной». Наш вариант нечёткости позволяет увидеть природу золотого сечения и, тем самым, придаёт этой мере неопределённости самостоятельное значение, тесно связанное с энтропией).

Термодинамика рассматривает пару *энергия-энтропия* раздельно: или энергетическое или энтропийное выражения берутся за исходную формулировку. Здесь вновь видно игнорирование топологии материи. По двойственности Стоуна энтропийным характеристикам материи должны соответствовать энтропийные же функции. Фрактальная топология материи утверждает дополнительность энергии (детерминированности) и энтропии (хаоса), которые являются условием существования друг друга. Элементарным выражением этого является общее выражение числа (3):

$$u = x \cdot \xi = \{x : x = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot p^i)\} \times$$

$$\times \{\xi : \xi \in \left\{a_0, a_1, \ldots a_{p-1}\right\}^N\}$$

$$x \in R, \;\; \xi \in Z_p, \; N = 0,1,2,... \qquad (3^*)$$

Здесь первому сомножителю соответствует точка – символ определённости и единственности, второму – случайная последовательность, которая является стандартом в теории вероятностей (схема Бернулли).

Следует различать энтропию двух видов. Приняв в качестве её семантического формального варианта Z_2 как пространство делимости, мы, тем самым, принимаем и его инволюцию как пространство аффинных движений. Инволютивный образ энтропии, когда символ *n* из уровня деления/иерархии интенсивного ряда становится членом экстенсивного натурального ряда (26), определяет размазывание объёма с ростом *n* со скоростью *D*. Первому соответствует рост энтропии параметров материи при переходе на другие масштабы – движение по координате делимости; второму – размазывание объема неизменного состава, диффундирование в открытое пространство. В этом случае вычислительная сложность принимает вид физической проблемы многих тел.

Объём. Поскольку концентрация и рассеяние являются сопряжёнными процессами и неотделимы друг от друга, то любой объём материала *V* должен рассматриваться одновременно в вещественном и *p*-адическом пространствах. Первое рассмотрение является энергетическим выражением, второе – энтропийным. Исходное соотношение следует из теоремы Островского и повторяет его же для метрик:

$$\left|V\right|_\infty \cdot \left|V\right|_p^D = const \qquad (27)$$

Это выражение есть общая форма термодинамических потенциалов – произведение экстенсивных и интенсивных переменных. Оно может быть записано для любой пары сопряженных переменных: давление-объём, энтропия-энергия, температура-число молекул и т.д. введением соответствующих мер Лебега и Хаара на объёме *V*.

$$\mu_L\left|V\right|_\infty \cdot \; \mu_H\left|V\right|_p^D = const^* \qquad (27^*)$$

Если в качестве объёма берётся т.н. элементарный объём (термодинамические соотношения пишутся в дифференциальной форме), то отсюда сразу следует соотношение связи энергии ΔE и энтропии ΔS, воспроизводящее их сопряженность:

$$\Delta E \cdot \Delta S = const\,. \qquad (28)$$

Правая часть в (27) и (28) имеет смысл термодинамического потенциала. Подставляя в (27) выражения (21) дополненные (23) получим уравнение, связывающее все термодинамические параметры в единый объёкт-вещество. Иными словами этим способом материальный объём представляется как синтез своих свойств в координатах «энергия-энтропия», «агрегация-диспергирование» и т.п. В теории систем он известен как *анализ через синтез*. Соответственно, получаем зависимость выбранного параметра – теплопроводности, электропроводности и т.п. от состояния всего объёма вещества. Отметим, что определённые таким образом параметры/свойства могут принимать значения от нуля до уровня, распознаваемого прибором. Тем самым, мы получаем простейшую модель *эмерджентности* – появления новых свойств в изменяющихся условиях.

8. ДВИЖЕНИЯ ВНУТРЕННЕГО ПРОСТРАНСТВА

Посредством ветвей Z_2 все точки объёма образца *V* оказываются связанными между собой как части целого. То есть движение каждой точки зависит от состояния Z_2, т.е. является функцией состояния в каждой другой его точке. Поэтому имеет смысл в каждой точке числового поля $\xi \in Z_2$ вычисление его действия как физического поля через метрики $\left|\bullet\right|_\infty$ и $\left|\bullet\right|_2$. Очевидно, существуют четверка производных

$$e_1 = \frac{\left|d\,\xi\right|_\infty}{\left|d\,\eta\right|_\infty} \quad e_2 = \frac{\left|d\,\xi\right|_\infty}{\left|d\,\eta\right|_2} \quad e_3 = \frac{\left|d\,\xi\right|_2}{\left|d\,\eta\right|_\infty} \quad e_4 = \frac{\left|d\,\xi\right|_2}{\left|d\,\eta\right|_2}, \qquad (29)$$

имеющие одинаковый характер, независимо от $\xi, \eta \in Z_2$ и $e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \cdot e_4 = \tilde{n}_\xi^2 / \tilde{n}_\eta^2 \neq 0$. Таким образом, получаем картину движений внутреннего пространства. Очевидно, что в (29) производные относятся ко всем парам экстенсивных и интенсивных переменных. Соответственно e_1, ..., e_4 являются линейно независимыми и могут быть выбраны в качестве базиса движений внутреннего пространства. Какой-либо конкретный вид вещества формально характеризуется определённой их комбинацией. Соответственно, их гиперболическая ортогональность, или, иными словами, мультипликативная связанность, могут послужить основой для построения теории фазовых переходов, основанной на картине движений различных фаз вещества.

С каждой из $e_1, ..., e_4$ можно связать кинетическую энергию молекулы/атома, которые составят основу определения тепла и температуры. Такое их определение дает возможность смоделировать превращения этих величин при движении по координате делимости, т.е. при уменьшении как числа так и при изменении размера частиц. Эти переходы отображаются двумя метриками.

Фононы. Рассмотрим плоскость $(\left|\bullet\right|_\infty, \left|\bullet\right|_2)$ как координаты внутреннего пространства. В произвольной точке x выполняется гиперболическая зависимость между метриками $\left|x\right|_\infty = c(x)\cdot\left|x\right|_2^{-1}$. Введем лабораторное время наблюдателя t, и рассмотрим метрики как функции этого времени. В силу лежандровой двойственности $\left|x\right|_2 \propto d_t\left|x\right|_\infty$ [1], где d_t – производная по времени. Дифференцируя по времени гиперболическое соотношение для метрик и обозначив для простоты $\left|x\right|_\infty = q,\ \left|x\right|_2 = d_t\, q$, после несложных преобразований, получим нелинейное уравнение:

$$\frac{d^2q}{d\,t^2} + d_t\, c\cdot\frac{d\,q}{d\,t} - c\cdot(d_t\,q)^3 = 0\ , \quad (30)$$

которое имеет частный вид универсального уравнения для осциллирующих систем. Его особенность в том, что вынуждающая сила является не внешней, а внутренней. Оно, очевидно, верно для всех масштабов. Поэтому внутреннее пространство осциллирует. Это можно соотнести с колебаниями прямой решётки и порождением фононов.

Переход в область наноразмеров характеризуется как уменьшение размера частиц, переходящее в уменьшение числа атомов/молекул. Формально это выразится одновременным стремлением метрик к нулю:

$$\left|\xi\right|_2 \to 0 \ \text{ и } \ \left|\xi\right|_\infty \to 0. \quad (31)$$

Отметим, что формальное разделение величин на экстенсивные – архимедовы и интенсивные – неархимедовы, справедливо не только для термодинамических, но и для геометрических величин, тем самым соотношения (29) - (31) являются формализацией действия геометрического фактора – структуры и формы внутреннего пространства материала.

Этот особый вид предельного перехода, противоречащий стандартной обратно пропорциональной зависимости между метриками, требует детальной разработки. Здесь мы только отметим, что предлагаемый подход, восполняет пробел стандартной техники, и позволяет надеяться на построение последовательной теории в дополнение к эксперименту.

9. ГЕОМЕТРИЯ КАК ПАРАМЕТР

Упомянутый выше геометрический фактор можно включить, воспользовавшись сетевым или теоретико-графовым представлением внутреннего пространства. Вместо вычисления средних по объёму термодинамических характеристик, естественно перейти к распределению локальных их значений в вершинах графа-структуры внутреннего пространства. Далее от матрицы смежности этого графа можно перейти к матрице энергий, плотности, энтропий, давления и других термодинамических характеристик [93, С.50-57]. Таким образом мы приходим к матричному исчислению. Но теперь стандартные матричные операции дополняются кронекеровым умножением [1]. Такое двойственное матричное исчисление будет, с одной стороны, отражать динамику структуры/геометрии в соответствии с (29), с другой – влияние физико-химических параметром, согласованных со структурой внутреннего пространства. Матричное исчисление формально идентично операциям стандартного анализа, Поэтому можно говорить о варианте принципа переноса для p-адических чисел для числовой асимметрии – соотношения (27), (27*), (28) справедливы и для (нелокального) матричного исчисления. *Принцип переноса гласит*: базовые соотношения, законы физики, справедливые в вещественных числах R, остаются справедливыми ив p-адических числах Q_p или Z_p. Как физический принцип инвариантности законов физики он был сформулирован И.В.Воловичем [36, 94]. В теории моделей он имеет вид:

Для любого утверждения φ *первого порядка в языке нормированных полей, существует* $p_0(\varphi)$ *такое, что* $\forall\, p > p_0(\varphi)$ [95; 96; С.108; 97, С.329)

$$Q_p \models \varphi \iff F_p(\ t\ ) \models \varphi. \quad (32)$$

В таком виде он остаётся верным для алгебраических структур и булевых алгебр [98, PP. 11, 39, 111].

Недавно идея принципа переноса была высказана в необычной форме – моделирования физических сущностей алгебраическими [99].

Матрицы являются числовыми объектами. С одной стороны – из линейной алгебры они моделируют движения в физическом пространстве. С другой – кронекеровы матрицы, не упоминаемые в курсах математики, отражают движения по координате делимости, т.е. движения по масштабам дисперсности. И в этом, втором смысле, являются характеризацией распределённых объектов. Формально матричные уравнения тождественны обычным «точечным» уравнениям и зависимостям [100]. Поэтому для матриц в первом, базовом приближении верна диаграмма, аналогичная (1*), (3):

$$[\, R \xleftarrow{conv} \{M\} \xrightarrow{div} Z_2 \,\} \,. \qquad (33)$$

Диаграмма (33) осуществляет то же преобразование, что и преобразование Фурье, переводя сжатие в расширение и обратно.

Поэтому некристаллические структуры, не имеющие обратной решётки, обратного пространства, с помощью *р*-адических чисел снабжаются её аналогом (*квазирешёткой* в терминах физики). Таким образом, мы получаем формальное исчисление для обратного пространства некристаллических систем. Иными словами, получается расширение/вложение 3-х мерного кристаллического пространства в пространство большей размерности. Кроме того, преодолевается трудность, связанная с конечными размерами образца – модель допускает без изменений продолжение теории образца конечных размеров на его расширение до размеров любой величины (см. об этих проблемах [8;9;12, С.10-11].

10. ГОЛОГРАММА МАТЕРИИ

Системный подход к моделированию внутреннего пространства материала представляет собой многостороннюю работу. Настоящая статья, не претендуя на полный охват всех её сторон, направлена на исследование возможности построения логически последовательной математической модели, опираясь на уже известные достигнутые результаты. Представляется, что следующим шагом в построении теории должно быть включение голограммы материи, которая получается как цепочка изоморфизмов канторова совершенного множества и его изоморфа 2-адических чисел, которые обнаруживаются в ряде разделов математики с привлечением «физики» фракталов. Приведем кратко её вид. Варианты формального содержания Z_2 в связи с другими разделами математики возникают по наследству от канторова множества *С*. Мы приведём лишь результаты в виде цепочки изоморфизмов (подробнее см. [4, гл.4]:

Варианты формального содержания Z_2 в связи с другими разделами математики возникают по наследству от канторова множества *С*. Мы приведём лишь результаты в виде цепочки изоморфизмов:

$$C \cong C_{matter} \cong \exp(C) \cong 2^C \cong Z_2 \cong [IFS \equiv \{0,1\}^N] \cong$$
$$\cong [Z_2 \to Z_2] \cong C(Z_2, Z_2) \cong H \cong C_{Bool} \cong C_{Stone} \equiv C. \quad (34)$$

Здесь знаки эквивалентности (изоморфизма) означают по порядку слева направо:

C_{matter} – модель делимой материи из фрактальной теории; *С* – экспоненциально полно, то есть преобразования материи не меняют её числовой природы [101, Ch.4]. Такое распределение материи представляет собой спектр функций истинности булевой алгебры [102; 103, th. 1.39–1.45, p. 81 и далее]. Это материя с числовыми свойствами, Z_2 есть топологическая алгебра [35]. Такое строение материи (нульмерное, дисконтинуальное, фрактальное) совпадает с формальными языками теоретической информатики, является доменом в теоретической информатике (итеративная система функций – *IFS*, является центральной техникой порождения фракталов) [98, P. 203; 104, PP. 197–205, 272–275]. Это символическое пространство, область действия символической динамики. Как решётка, она совпадает с пространством непрерывных функций над собой [105; 56, P. 510]. Такой числовой или алгебраический образ материи представим своим полем непрерывных функций по теореме о двойственности Стоуна [106,107].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные рассуждения являются схемой построения системной теории внутреннего пространства материалов. Каждый из затрагиваемых термодинамических разделов предполагает дальнейшую разработку в направлении построения методов расчёта. Однако схематический характер рассуждений показывает, что возможности, предоставляемые фрактальной теорией материи в интерпретации авторов, вскрывают большое количество фактов, которые не улавливаются стандартной физико-математической техникой и позволяют надеяться на логически последовательную теорию материаловедения. В частности, главной особенностью предлагаемого подхода, связанной с введением новой степени свободы – делимости вещества, является возможность построения формальных методов моделирования влияния структуры и формы образца, формализация наноявлений и построения единой классификации материалов. Кроме того, можно видеть перспективу построения многомасштабного или мультифрактального анализа с новыми возможностями, который будет естественной частью теории внутреннего пространства.

Конечно, и это необходимо отметить особо, полная системная теория материи невозможна без отсутствующей на сегодняшний день математической модели периодической системы Д.И.Менделеева. Это общий изъян всех математических методов естественных наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Изотов А.Д., Маврикиди Ф.И.* Фракталы. Самара: СГАУ, 2011.
2. *Оствальд В.* Мир обойденных величин. М.: Изд-во товарищества Мир, 1923.
3. *Kalinnikov V.T., Kustov E.F. et.al.* Four-Dimensional Composition-Structure-Property-Dispersion Relationship // Russian J. of Inorganic Chemistry, 2010, vol.55, №13, PP.2031-2072.
4. *Маврикиди Ф.И.* Числовая асимметрия в прикладной математике. М., 2015.
5. *Cristol G.* p-Adic Numbers and Ultrametric Spaces/ In Waldschmidt M., Moussa P., Luck J.-M. (eds.) From Number Theory to Physics. Springer, 1995, P. 440-475.
6. *Калужнин Л.А.* Введение в общую алгебру. М.: Наука, 1973, С.347-348.
7. *Anderson P.W.* More is Different//Science N.S. vol.177, № 4047, 1972, PP.393-396.
8. *Finney J.L.* Modelling the structures of amorphous metals and alloys// Nature vol. 266, March 1977, PP. 309-314.
9. *Bernal J.D.* The Structure of liquids// Proc. Roy. Soc. London. Series A. Math and Phys. Sciences, vol.280, no. 1382, 1964, PP.299-322.
10. *Baake M., Grimm U.* Aperiodic Order. Vol.1 Mathematical Invitation. CUP, 2013.
11. *Badii R., Politi A.* Complexity. CUP, 1997.
12. *Займан Дж.* Модели беспорядка. М.: Мир, 1982, гл.1-3.
13. *Галиулин Р.В.* Кристаллографическая картина мира // УФН. 2002. Т. 172. №2. С.229-233.
14. *Антонюк П.Н., Галиулин Р.В., Макаров В.С.* Квазикристалл как идеальный кристалл пространства Лобачевского // Природа. 1993. №7. С.28-31.
15. *Lord E.A. et.al.* New Geometries for New Materials. CUP, 2006.
16. *Hyde S., Anderson S. et.al.* The Language of Shape. The Role of Curvature in condensed matter physics, chemistry and biology. Elsevier, 1997.
17. *Steurer W., Deludi S.* Crystallography of Quasicrystals. Concepts, Methods and Structures. Springer, 2009.
18. *Изотов А.Д., Маврикиди Ф.И.* Компьютер и числовая асимметрия в инженерных науках // Известия Академии инженерных наук им. Прохорова. 2013. №3. С.32-41.
19. *Паршин А.Н.* Размышления над теоремой Гёделя / В кн. Путь. Математика и иные миры. М.: Добросвет, 2002, С.82-84.
20. *Юдин В.В., Карыгина А.Е.* Фрактальность квазикристаллов на примере мозаики Пенроуза // Кристаллография. 2001. Т.46. №6. С.1004.
21. *Мадисон А.Е.* Симметрия квазикристаллов//ФТТ. 2013. Т. 55. Вып.4. С.789-796.
22. *Мадисон А.Е.* Самоподобие и самоинверсность квазикристаллов // ФТТ 2014. Т. 56. №8, С.1651-1661.
23. *Barber E.M.* Aperiodic Structures in Condensed Matter. CRS Press, 2009.
24. *Baake M., Moody R.V., Schlottmann M.* Limit-(quasi) periodic point sets as quasicrystals with p-adic internal spaces//arXiv: math-ph/9901008v1 1999.
25. *Гречников Ф.В., Ерисов Я.А.* Влияние параметров текстуры на устойчивость процессов формообразования анизотропных заготовок // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2012. Т. 14. № 4. С. 293-298.
26. *Арышенский В.Ю., Гречникова А.Ф., Ерисов Я.А.* Влияние параметров текстуры и структуры на предельное формоизменение обшивочных листов при обтяжке // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2012. № 2 (33). С. 142-148.
27. *Grechnikov F.V., Erisov Y.A.* Virtual material model with the given crystallographic orientation of the structure // Key Engineering Materials. 2016. Т. 684. С. 134-142.
28. *Katz A.* A Short Introduction to Quasicrystals/ In: Waldschmidt M., et.al. (eds.) From Number Theory to Physics. Springer, 1995, P. 496-537.
29. *Pelanová E, Masaková Z.* Quasicrystals: algebraic, combinatorial and geometrical aspects/ In Gazeau J.P. et.al. (eds.) Physics and Theoretical Computer Science. IOS Press, 2007, P.113-131.
30. *Артамонов В.А.* Квазикристаллы и их симметрии // Фунд. и прикладная математика. 2004. Т. 10. № 3. С. 3-10.
31. *Займан Дж.* Модели беспорядка. М.: Мир, 1982.
32. *Холл П.* Вычислительные структуры. М.: Мир, 1978.
33. *Суппес П., Зинес Дж.* Основы теории измерений. В кн. Психологические измерения. М.: Мир, 1967.
34. *Li.M., Vitanyi P.* An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Application. Springer, 1997, PP.125-126.
35. *Robert A.* A Course in p-Adic Analysis. Springer, 2000.
36. *Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И.* p-адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
37. *Edgar G.A.* Measure, Topology, Fractal Geometry. Springer, 2008.
38. *Davey B.A., Priestley H.A.* Introduction to Lattices and Order. CUP, 2002.
39. *Moody R.V.* Model Sets: A Survey//arXiv: math/0002020v1 2000.
40. *Baake M., et.al.* What is Aperiodic Order//arXiv. math.0203253v1 [math.HO], 2002.
41. *Ньютон И.* Оптика [перевод и примечания С.И. Вавилова]. М.-Л., 1927.
42. *Winslow M.D.* Force and Nature. Attraction and Repulsion. McMillan, 1869.
43. *Гратиа Д.* Квазикристаллы // УФН. 1988. Т. 156. Вып. 2. С.347-364.
44. *Burdik C. et.al.* Beta-Integers as Natural Counting Systems for Quasicrystals// J.Phys. A Math. Gen. 31(1998), P.6449-6472.
45. *Serre J.-P.* Trees. Springer, 1980, P.69.
46. *Скотт Д.* Теория решёток, типы данных и семантика. В кн. Данные в языках программирования, М.: Мир, 1982.
47. *Denecke K, Erne M., Withmath S.L.* Galois Connection and Applications. Kluwer A.P. 2004.
48. *Lemin A.* On Ultrametrization of General Metric Spaces// Proc. Of AMS, vol.131, #3, PP.979-989, 2004.
49. *Исмагилов Р.С.* Ультраметрические пространства и связанные с ними гильбертовы пространства // Математические заметки. 1997. Т. 62. Вып. 2. 1997. С. 223-237.
50. *Falconer K.* Digital Sundials, Paradoxical Sets and Vitushkin Conjecture // The Mathematical Intelligencer, vol.9, #1, p.24-27.
51. *Falconer K.* Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. Wiley, 2003.
52. *Dube S.* Undecidable Problems in Fractal Geometry// Complex Systems 7 (1993), P. 428-432.

53. *Flagg B., Kopperman R.* Computational Models for Ultrametric Spaces// Proc. of Mathematical Foundations of Programming Semantics 13, ENTCS vol. 6, 1997.
54. *Schkhof W.H.* Ultrametric calculus. CUP, 1984.
55. *Meyer-Nielsen P.* Banach Lattices. Springer, 1991.
56. *Scott D.* Data types as Lattices // SIAM J. Comput. Vol.5, №3, 1976, P. 510.
57. *Vickers S.* An Algorithmic Approach to p-Adic Numbers// LNCS v. 298, Springer, 1988, P.599-615.
58. *Займан Дж.* Принципы теории твердого тела. М.: Мир, 1974.
59. *Натансон И.П.* Теория функций действительного переменного. М., Наука, 1974, С.79-82.
60. *Pruessner G.* Probability Densities in Complex Systems, Measuring. In Meyers R.A. Encyclopedia of Complexity and Systems Science. Springer, 2009.
61. *Изотов А.Д., Маврикиди Ф.И.* Числовая асимметрия, золотое сечение и квазикристаллы // Известия Академии инженерных наук им. А.М. Прохорова, 2015. №1. С. 3-6.
62. *Collins J.J. et.al.* A Random Number Generator Based on a Logit transform of the Logistic Variable // Computers in Physics 6, 1992, PP. 630-632.
63. *Phatak S.S., Rao S.S.* Logistic Map: A Possible Random Number Generator// PRE v.51, №4, 1995, PP. 3670-3678.
64. *Stakhov A.* The Mathematics of Harmony. WSPC, 2009.
65. *Dunlap R.A.* The Golden Section and Fibonacci Numbers. WSPC, 1997.
66. *Hof A.* Diffraction of Aperiodic Structures // Commun. Math, Phys. 169, 25-43, 1995.
67. *Lemin A.* Isometric Embeddings of Ultrametric (non-archimedean) Spaces in Hilbert space and Lebesgue space. In: p-Adic Functional Analysis (Ioannia), vol.222, of Lect. Notes of Pure Appl. Math. Marcel Dekker, 2001.
68. *Aref'eva I.Y., Dragovich B., Frampton P.,Volovich I.* The wave function of the Universe and p-adic gravity//Int. J. Mod. Phys.A 1990, vol. 6,№24, PP.4341-4358.
69. *Ko, Ker-I.* On the Computability of Fractal Dimensions and Hausdorff Measures// APAL, 93 (1998), № 1-3, P. 195-216.
70. *Beardon A.F.* On Hausdorff Dimension of General Cantor Sets// Proc. Camb.Phil.Soc. (1965), 61, P. 679-693.
71. *McCauley J.L.* Chaos, Dynamics and Fractals. CUP, 1995.
72. *Неймарк А.В.* Термодинамический метод расчёта поверхностной фрактальной размерности // Письма в ЖЭТФ. т.51. №10, С.535-538.
73. *Пригожин И.Р.* От существующего к возникающему. М.: КомКнига, 2006.
74. *Müller I., Weiss W.* Entropy and Energy. A Universal Competition. Springer, 2005.
75. *Ulam S.* Infinite models in Physics/ In Proc. 7-th Symp. Appl. Math. (Brooklin Politech. Inst., Apr., 1955), AMS Symp. Appl. Math. Vol.7, pp.87-95, N.Y., McGraw Hill Book comp. Inc., 1957, Улам С. Нерешённые математические задачи, М.: Наука, 1964.
76. *Мюнстер А.* Химическая термодинамика. М.: Мир, 1972.
77. *Гречников Ф.В., Ерисов Я.А., Арышенский Е.В.* Проектирование технологических режимов прокатки листов и лент для вытяжки изделий с минимальным фестонообразованием // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2011. № 2 (26). С. 158-167.
78. *Гречников Ф.В., Антипов В.В., Ерисов Я.А., Гречникова А.Ф.* Повышение технологичности алюмостеклопластиков путем формирования в листах из сплава В95 эффективной кристаллографической текстуры // Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия. 2014. № 6. С. 38-43.
79. *Ерисов Я.А., Гречников Ф.В., Оглодков М.С.* Влияние режимов изготовления листов из сплава В-1461 на кристаллографию структуры и анизотропию свойств // Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия. 2015. № 6. С. 36-42.
80. *Базаров И.П.* Термодинамика. М.: Высшая школа, 1991.
81. *Erisov Y.A., Grechnikov F.V., Surudin S.V.* Yield function of the orthotropic material considering the crystallographic texture // Structural Engineering and Mechanics. 2016. Т. 58. № 4. С. 677-687.
82. *Мелвин-Хьюз Э.А.* Физическая химия. М.: ИЛ, 1962.
83. *Caldarelli G.* Scale-Free Networks. OUP, 2005.
84. *Newman M.E.J.* Networks. OUP, 2010.
85. *Nakayama T., Yakubo T.* Fractal Concept in Condensed Matter Physics. Springer, 2013.
86. *Мартин Н., Ингленд Дж.* Математическая теория энтропии. М.: Мир, 1988.
87. *Kolmogorov A.N., Tihomorov V.M.* ε-entropy and ε-capacity of sets of functional spaces/ In Edgar G.A. Classics on Fractals. Westview 2004.
88. *Li M., Vitanyi P.* An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications. Springer, 1997.
89. *Fernau H., Staiger L.* Valuation Entropy of ω-languages and IFS// ICALP'94 LNCS vol.820 P.11-22, 1994.
90. *Schneider F.M., Borchmann D.* Topological Entropy of Formal Languages // arXiv: 1507.03393v2 [math.DS] 14 Jan 2016.
91. *Петрушенко Л.А.* Самодвижение материи в свете кибернетики. М.: Наука, 1971.
92. *Manin Yu.I.* Kolmogorov Complexity as a Hidden Variable of Scientific Discourse: From Newton's Law to Data Mining// arXiv: 1301.0081v1 [math. HO] 2013.
93. *Сырников Ю.П.* Применение методов теории графов для описания структуры воды / Структура и роль воды в живом организме. Сб.3. Изд-во Ленинградского ун-та,1973.
94. *Volovich I.V.* Number Theory as Ultimate Theory of Physics / Preprint CERN – TH.4791 1987, P.13; перепечатано в p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications 2010, vol.2, PP.77-87.
95. Macyntire A. Twenty Years of p-Adic Model Theory // Logic Colloqium'84. *J.B. Paris, A.J. Wilkie, G.M. Wilmers* (eds.), Elsevier, NH, 1986.
96. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976.
97. *Кейслер Г., Чен Ч.Ч.* Теория моделей. М., Мир, 1977.
98. *Davey B.A., Priestley H.A.* Introduction to Lattices and Order. CUP, 2002.
99. *Домрачев Г.А., Лазарев А.И.* Приложение теории алгебраических систем для создания иерархии структур твердых тел, образующихся при равновесных и неравновесных условиях // ФТТ, 1999, т.41, вып. 5. С. 799-804.
100. *Magnus J.R., Neudecker H.* Matrix Differential Calculus. J.Wiley &Sons, 2007.
101. *Todorsevic S.* Topics in Topology. Springer, 1997.
102. *Givant S., Halmos P.* Introduction to Boolean Algebras. Springer, 2009.
103. *Nadler S.B.* Hyperspaces. M.Dekker, 1979.
104. *Barwise J., Moss L.* Vicious Circles: On the Mathematics

of Non-Wellfounded Phenomena. CSLI Publ., 1996.
105. *Weger B.M.M.* Approximation Lattices of p-adic Numbers // J. Number Theory, 1986, 24, p. 70–88.
106. *Stone M.* The Theory of Representation of Boolean Algebras // Trans. AMS, 40, 1936, PP. 37–111.
107. *Stone M.* Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology // Trans. AMS, v.41, №.3, 1937, PP. 375–481.

NUMBER ASYMMETRY OF INNER SPACE OF NON-CRYSTALLINE MATERIALS

© 2017 A.D. Izotov[1], F.I. Mavrikidi[2]

[1] Kurnakov Institute of General and Inorganic Chemistry, RAS, Moscow
[2] Oil and Gas Research Institute, RAS, Moscow

Paper proposes expansion of the model internal space of non-crystalline materials by number asymmetry - pairing Euclidean space *R* with fractal *p* -adic Z_p in a self-dual space-time. This is a formal expression of the universal pair of forces in Nature - attraction and repulsion, which generates complimentary processes of energy and entropy. We check compliance with this duality basic facts and issues of material science. It appears that this model allows to prove the existence of 5-fold symmetry, closely connected with Fibonacci numbers in the theory of quasi-crystals, exotic symmetries and supply modeling task in the spirit of the theory of systems - synthesizing physico-chemical processes of different nature and formal models of non-reducible languages. On this basis we consider new version of thermodynamics with duality – a conjugation its energetic and entropic representations. The formalization of the concept of divisibility of matter as a particular degree of freedom allows to formalize concepts of entropy, heat, temperature and to classify all materials via four types of permitted motions of particles. These formal analogs are invariant under change of number of particles and their size, which is important from the standpoint of nanoscience. The possibility of incorporating the structure of space as a separate non-local, non-physical geometrical parameter is shown. A given holographic representation of the inner space of matter suggests further development in a logically coherent model.
Comments: 26 pages.
PACS numbers: 02.10.De; 81.00.00.
Keywords: noncrystalline materials, mathematical modelling, fractals, *p*-adic numbers, number-theoretical duality.

Alexandr Izotov, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Chemistry, Professor, Chief Research Fellow.
Fedor Mavrikidi, Candidate of Technics, Senior Research Fellow. E-mail: mavrikidi@mail.ru