

## УПРАВЛЕНИЕ ПРИ РАЗВЕРТЫВАНИИ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

© 2017 Ч. Ван<sup>1</sup>, Ю.М. Заболотнов<sup>2</sup><sup>1</sup> Северо-западный политехнический университет, г. Сиань, КНР<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва

Статья поступила в редакцию 23.01.2017

Рассматривается управление при разворачивании тросовой системы, находящейся на эллиптической околоземной орбите. Орбитальная система состоит из двух космических аппаратов, соединенных тросом. Предлагается новая номинальная программа управления, зависящая от параметров эллиптической орбиты и обеспечивающая разворачивание системы в заданное вертикальное положение. Методом Лагранжа построена математическая модель движения тросовой системы, учитывающая особенности данной задачи. Проверочные расчеты осуществляются с использованием математической модели движения системы с распределенными параметрами, записанной в неподвижной геоцентрической системе координат. Используется система стабилизации, реализующая обратную связь по длине и скорости троса.

*Ключевые слова:* Космическая тросовая система, управление, эллиптическая орбита, программа разворачивания.

*Работа поддержана грантом РФФИ РФ 16-41-630637.*

## ВВЕДЕНИЕ

Полезные применения космических тросовых систем (КТС) очень разнообразны [1–7] и требуют разработки универсальных методов управления движением. При освоении околоземного пространства в настоящее время используются орбиты различного вида: почти круговые орбиты (эксцентриситет  $e \approx 0$ ), орбиты с малым эксцентриситетом ( $e < 0.01$ ), эллиптические орбиты со средним и большим эксцентриситетом  $0.01 < e < 1$ . Поэтому разработка методов управления движением КТС, центр масс которых движется по эллиптической орбите, имеет важное значение. Особенности управления движением КТС в этом случае связаны, прежде всего, с действием периодических возмущений, зависящих от угла истинной аномалии ( $\vartheta$ ), который определяет положение центра масс КТС. Не учет этого возмущения может привести к не поправимым последствиям, к хаотическим движениям системы [8,9], к длительному провисанию троса и, как следствие, к потере управляемости системы. Поэтому разработке методов управления движением КА и КТС на эллиптической орбите в настоящее время уделяется особое внимание [10–12]. В данной работе предлагается при построении номинальной программы разворачивания КТС априори учитывать информацию о параметрах эллип-

*Ван Чанцин, кандидат технических наук, доцент школы автоматики. E-mail: wangcq@mail.ru*

*Заболотнов Юрий Михайлович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры программных систем. E-mail: yumz@yandex.ru*

тической орбиты, что позволяет уменьшить ошибки приведения КТС в заданное конечное состояние при работе системы регулирования выпуском троса.

В настоящей работе рассматривается КТС, состоящая из базового и малого космических аппаратов (КА). Предполагается, что масса базового КА, с которого осуществляется выпуск троса, много больше, чем массы малого КА и троса. Предлагается номинальная программа разворачивания КТС на эллиптической орбите в вертикальное положение, обеспечивающая выпуск троса на заданную конечную длину. Рассматриваемая программа не требует решения краевой задачи о приведении системы в заданное состояние, так как конечное положение КТС обладает свойством асимптотической устойчивости.

Для определения программы разворачивания КТС построена математическая модель движения КТС в орбитальной подвижной системе координат, учитывающая массу троса [13] и параметры эллиптической орбиты. Параметры программы управления выбираются из условия приведения КТС в заданное состояние. Программы управления предназначены для механизмов выпуска троса, работающих только на торможение и не втягивающих трос [2].

Проверка возможности использования предлагаемой программы и принятых допущений проводится с применением конечно элементной модели движения КТС, в которой трос представляется как дискретная совокупность материальных точек, связанных между собой упругими связями. Данная модель записана в геоцентрической системе координат, при этом

предполагается, что на каждом элементарном участке сила натяжения подчиняется закону Гука. Сила в механизме управления представляет собой сумму двух составляющих: программной силы и поправок к управлению, которые вычисляются в соответствии с принципом обратной связи по измерениям длины и скорости выпуска троса. При моделировании работы системы стабилизации не учитываются запаздывание, ошибки измерений и другие возмущения, связанные с функционированием реальной системы управления.

### МОДЕЛЬ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПРОГРАММЫ РАЗВЕРТЫВАНИЯ КТС

При выводе уравнений движения предполагается, что центр масс системы движется по невозмущенной эллиптической орбите и совпадает с центром масс базового КА. Трос считается нерастяжимым. При описании движения КТС используются следующие правые прямоугольные системы координат (рис. 1): 1) орбитальная подвижная система координат  $Cx_oy_oz_o$ , где  $C$  – центр масс системы, ось  $Cx_o$  направлена по радиус-вектору  $\vec{R}_c$ , ось  $Cy_o$  – в плоскости орбиты по направлению орбитального движения; 2) система координат, связанная с тросом  $Cx_t y_t z_t$ , где ось  $Cx_t$  направлена по тросу от малого КА, ось  $Cy_t$  лежит в плоскости, проходящей через радиус-вектор  $\vec{R}_c$  и трос. Матрица перехода между системами координат  $Cx_oy_oz_o$  и  $Cx_t y_t z_t$  определяется стандартным образом через углы  $\theta, \beta$  (рис. 1).

Для вывода уравнений пространственного движения КТС используются уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_c}{\partial q_i} = - \frac{\partial P}{\partial q_i} + Q_i; \quad (1)$$

где  $q_1 = L, q_2 = \theta, q_3 = \beta$  – обобщенные координаты,  $T_c$  и  $P$  – кинетическая и потенциальная энергии системы,  $L$  – длина троса,  $\theta$  и  $\beta$  – углы, определяющие положение троса относительно плоскости орбиты базового КА,  $Q_i$  – обобщенные непотенциальные силы.

Кинетическая энергия в уравнениях (1) представляет собой сумму

$$T_c = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + T_t, \quad (2)$$

где  $T_t$  – кинетическая энергия троса;  $x, y, z$  – координаты малого КА в неподвижной геоцентрической системе координат, связанной с невозмущенной эллиптической орбитой центра масс системы.

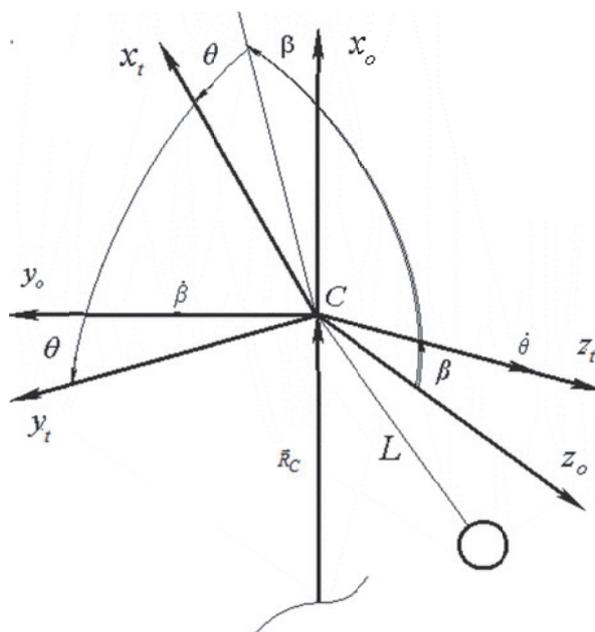


Рис. 1. Взаимное положение систем координат  $Cx_oy_oz_o$  и  $Cx_t y_t z_t$

Координаты центра масс малого КА вычисляются следующим образом

$$\begin{aligned} x &= (R_c - L \cos \theta \cos \beta) \cos u + L \sin \theta \sin u, \\ y &= (R_c - L \cos \theta \cos \beta) \sin u - L \sin \theta \cos u, \\ z &= -L \cos \theta \sin \beta, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u$  – аргумент широты.

При выводе уравнений предполагается, что параметры эллиптической орбиты за время разворачивания КТС не изменяются.

Кинетическая энергия троса как любой механической системы складывается из кинетической энергии движения центра масс и кинетической энергии движения троса относительно своего центра масс ( $T_r$ ). Поэтому

$$T_t = \frac{1}{2} L \dot{n} V_t^2 + T_r, \quad (4)$$

где  $V_t$  – скорость центра масс троса,  $\dot{n}$  – линейная плотность троса.

Вектор скорости центра масс троса состоит из следующих составляющих

$$\vec{V}_t = \vec{V}_c + \vec{V}_s + \vec{V}_r, \quad (5)$$

где  $\vec{V}_c$  – вектор скорости центра масс системы,  $\vec{V}_s$  – вектор скорости центра масс троса относительно центра масс системы за счет вращения тросовой системы координат,  $\vec{V}_r$  – вектор скорости центра масс троса относительно центра масс системы, обусловленный изменением длины троса  $V_r = \dot{L}$ .

Составляющие вектора  $\vec{V}_c$  в неподвижной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} V_{cx} &= \dot{R}_c \cos u - R_c \dot{u} \sin u, \\ V_{cy} &= \dot{R}_c \sin u + R_c \dot{u} \cos u, \\ V_{cz} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Компоненты вектора  $\vec{V}_s$  определяются следующим образом

$$\begin{pmatrix} V_{sx} \\ V_{sy} \\ V_{sz} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \omega_{sx} \\ \omega_{sy} \\ \omega_{sz} \end{pmatrix} \frac{L}{2}, \quad (7)$$

где  $D = D_u^T D_\beta^T D_\theta^T$  – матрица перехода от тросовой системы координат  $Cx_t y_t z_t$  к неподвижной системе координат,  $D_u, D_\beta, D_\theta$  – матрицы элементарных вращений [16],  $(T)$  – знак транспонирования матрицы,  $\omega_{sx}, \omega_{sy}, \omega_{sz}$  – проекции вектора угловой скорости вращения тросовой системы координат  $Cx_t y_t z_t$  относительно неподвижной геоцентрической системы координат (проекции определяются в системе  $Cx_t y_t z_t$ ).

Угловые скорости  $\omega_{sx}, \omega_{sy}, \omega_{sz}$  определяются из следующих выражений

$$\begin{aligned} \omega_{sx} &= \dot{\beta} \sin \theta - \dot{u} \cos \theta \sin \beta, \\ \omega_{sy} &= \dot{\beta} \cos \theta + \dot{u} \sin \theta \sin \beta, \\ \omega_{sz} &= \dot{\theta} + \dot{u} \cos \beta. \end{aligned} \quad (8)$$

Компоненты вектора  $\vec{V}_r$  в неподвижной системе координат определяются следующим образом

$$\begin{pmatrix} V_{rx} \\ V_{ry} \\ V_{rz} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} -\dot{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Кинетическая энергия троса  $T_r$  при его вращении относительно своего центра масс определяется из выражения

$$T_r = \frac{1}{2} J_t (\omega_{sy}^2 + \omega_{sz}^2), \quad (10)$$

где  $J_t = \dot{n}L^3 / 12$  – момент инерции троса относительно своего центра масс.

Выражения (3–10) определяют зависимость кинетической энергии КТС от обобщенных координат и скоростей, что позволяет использовать их в уравнениях Лагранжа (1).

Для получения обобщенных сил, обусловленных гравитационным полем Земли, воспользуемся выражениями

$$\Pi_m = -Km / r, \quad \Pi_t = \int_L d\Pi_t, \quad (11)$$

где  $K$  – гравитационный параметр Земли,

$$r = \sqrt{R_c^2 + L^2 - 2LR_c \cos \theta \cos \beta},$$

$$d\Pi_t = - \frac{K\rho ds}{\sqrt{R_c^2 + s^2 - 2sR_c \cos \theta \cos \beta}}.$$

Потенциальная энергия троса запишем в виде

$$\Pi_t = -K\rho \int_0^L \frac{ds}{\sqrt{R_c^2 + s^2 - 2sR_c \cos \theta \cos \beta}}. \quad (12)$$

Разлагая функции  $\Pi_m, d\Pi_t$  в ряды по параметрам  $L, s$  и сохраняя члены до второго порядка включительно, получим

$$\Pi_m \approx -\frac{Km}{R_c} \left[ 1 + L \cos \theta \cos \beta + \frac{1}{2} L^2 (3 \cos^2 \theta \cos^2 \beta - 1) \right], \quad (13)$$

$$d\Pi_t \approx -\frac{K\rho ds}{R_c} \left[ 1 + s \cos \theta \cos \beta + \frac{1}{2} s^2 (3 \cos^2 \theta \cos^2 \beta - 1) \right]. \quad (14)$$

Приближенные выражения (13–14) можно использовать, когда  $L / R_c \ll 1$  и  $s / R_c \ll 1$ . Вычисляя интеграл (12) с учетом (14) и дифференцируя потенциальные энергии по обобщенным координатам, получим

$$\begin{aligned} Q_L &= L(m + L\rho / 2) v^{-1} \dot{u}^2 (3 \cos^2 \theta \cos^2 \beta - 1), \\ Q_\theta &= -\frac{3}{2} J_e v^{-1} \dot{u}^2 \cos^2 \beta \sin 2\theta, \\ Q_\beta &= -\frac{3}{2} J_e v^{-1} \dot{u}^2 \cos^2 \theta \sin 2\beta, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $J_e = L^2(m + L\rho/3)$ ,  $v = 1 + e \cos \vartheta$ ,  $\vartheta$  – истинная аномалия,  $e$  – эксцентриситет орбиты,  $R_c = p / v$  – уравнение орбиты,  $p$  – параметр орбиты.

К действующим силам необходимо добавить силу натяжения  $T$  в точке выпуска троса, совершающую работу только на возможном перемещении  $\delta L$ .

Дифференцируя кинетическую энергию (2), учитывая потенциальные силы (15) и силу натяжения троса, получим в соответствии с уравнениями Лагранжа (1) систему дифференциальных уравнений движения КТС

$$\begin{aligned} \ddot{L} &= M_1 L \left[ \dot{\theta}^2 + (1 - v^{-1}) \dot{u}^2 + 2\dot{\theta} \dot{u} \cos \beta - \right. \\ &\quad \left. - \dot{u}^2 \cos^2 \theta \sin^2 \beta + 2\dot{\theta} \dot{u} \cos \beta - \dot{u}^2 \cos^2 \theta \sin^2 \beta + \right. \\ &\quad \left. + 2\dot{\theta} \dot{u} \cos \beta - \dot{u}^2 \cos^2 \theta \sin^2 \beta + \dot{\beta}^2 \cos^2 \theta + \right. \\ &\quad \left. + \dot{\beta} \sin \beta \sin 2\theta + 3v^{-1} \dot{u}^2 \cos^2 \theta \cos^2 \beta \right] - \frac{T + \rho L^2}{m + \rho L}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -2M_2 \frac{\dot{L}}{L} (\dot{\theta} + \dot{u} \cos \beta) + \dot{u}^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \beta - \\ &\quad - \dot{u} \cos \beta - \frac{1}{2} \dot{\beta}^2 \sin 2\theta + 2\dot{\beta} \dot{u} \cos^2 \theta \sin \beta - \\ &\quad - \frac{3}{2} v^{-1} \dot{u}^2 \sin 2\theta \cos^2 \beta, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\ddot{\beta} \cos^2 \theta = -M_2 \frac{\dot{L}}{L} (2\dot{\beta} \cos^2 \theta + \dot{u} \sin 2\theta \sin \beta) + \dot{\theta} \dot{\beta} \sin 2\theta - \ddot{u} \sin 2\theta \sin \beta - 2\dot{u} \dot{\theta} \cos^2 \theta \sin \beta - 2v^{-1} \dot{u}^2 \cos^2 \theta \sin 2\beta, \quad (18)$$

где  $M_1 = \frac{m + \dot{n}L/2}{m + \dot{n}L}$ ,  $M_2 = \frac{m + \dot{n}L/2}{m + \dot{n}L/3}$ .

Производные аргумента широты  $u$  по времени определяются известными выражениями

$$\dot{u} = \sqrt{\frac{K}{p^3}} (1 + e \cos \vartheta)^2, \quad \ddot{u} = -\frac{2K}{p^3} e \sin \vartheta, \quad (19)$$

где  $\vartheta = u - \omega_\pi$ ,  $\omega_\pi$  – аргумент перицентра.

Таким образом, в системе уравнений (17–19) имеется параметрическое периодическое возмущение, связанное с неравномерным изменением угла  $u$ . При записи уравнений (17–19) полагается  $\dot{R}_c \approx 0$ .

### ПРОГРАММА РАЗВЕРТЫВАНИЯ КТС НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

Полученные уравнения (16–18) могут быть использованы для построения номинальной программы разворачивания КТС в вертикальное положение при движении центра масс системы по эллиптической орбите. Если  $e = 0$ , то уравнения (16–18) совпадают с аналогичными уравнениями, полученными в работе [13].

Если исходная орбита круговая, то закон разворачивания КТС в вертикальное положение получен в работе [13] и имеет вид

$$T = (m + \dot{n}L/2) \Omega^2 \left[ a(L - L_K) + b \frac{\dot{L}}{\Omega} + 3L_K \right], \quad (20)$$

где  $L_K$  – длина троса в конечном положении системы,  $a, b, c$  – параметры закона,  $\Omega = \dot{u} = \text{const}$  – угловая скорость движения центра масс системы по круговой орбите.

Если программная сила натяжения троса задана в виде (20), то система (16–18) при  $e = 0$  будет иметь асимптотически устойчивые вертикальные положения равновесия  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  ( $\dot{\theta} = \dot{L} = \dot{\beta} = \dot{\beta} = 0, L = L_K \neq 0$ ), когда  $a > 3, b > 0$  [13].

Аналогичный результат можно получить и для эллиптической орбиты ( $e > 0$ ), если пренебречь  $\ddot{u} \approx 0$  в уравнении (17). Тогда в положении равновесия КТС  $\dot{L} = \dot{L} = \dot{\theta} = \theta = \beta = \dot{\beta} = 0$  из уравнения (17) следует

$$(m + \rho L/2) L \dot{u}^2 (1 + 2v^{-1}) - T = 0. \quad (21)$$

Здесь производная  $\dot{u}$  определяется для эллиптической орбиты:  $\dot{u} = \Omega_e v^2$ , где  $\Omega_e = \sqrt{K/p^3}$ .

Тогда, чтобы система (16–18) имела устойчивое положение равновесия на эллиптической орбите при  $L = L_K \neq 0$ , силу натяжения необходимо определять из выражения

$$T = (m + \rho L/2) \Omega^2 \left[ a(L - L_K) + b \frac{\dot{L}}{\Omega} + c(\vartheta) L_K \right], \quad (22)$$

где  $c(\vartheta) = v(\vartheta)^3 (2 + v(\vartheta))$ ,

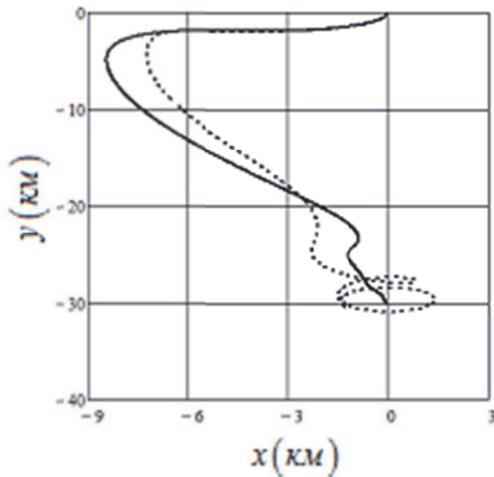
$$v(\vartheta) = 1 + e \cos \vartheta.$$

Выражение (22) обобщает программу (20) на эллиптические орбиты, причем сила натяжения  $T$  теперь зависит от истинной аномалии  $\vartheta$ , то есть от положения центра масс системы на эллиптической орбите. Очевидно, что при  $v(\vartheta) = 1$ , когда  $e = 0$ , программа (22) совпадает с программой (20). Вертикальные положения равновесия  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  в плоском случае ( $\beta = \dot{\beta} = 0$ ) будут асимптотически устойчивы при любой длине  $L_K$ , если  $a > c(\vartheta)$  и  $b > 0$ . Данное утверждение доказывается с помощью стандартного метода построения линеаризованной системы относительно исследуемого положения равновесия. Причем в линеаризованной системе уравнения для переменных  $\beta, \dot{\beta}$  отделяются, и их характеристическое уравнение имеет всегда чисто мнимые корни. Матрица, соответствующая остальным уравнениям линеаризованной системы, имеет при выполнении условий  $a > c(\vartheta), b > 0$  всегда собственные значения с отрицательными действительными частями. Поэтому плоское движение КТС в этом случае при  $L = L_K \neq 0$  имеет асимптотически устойчивые заданные вертикальные положения равновесия.

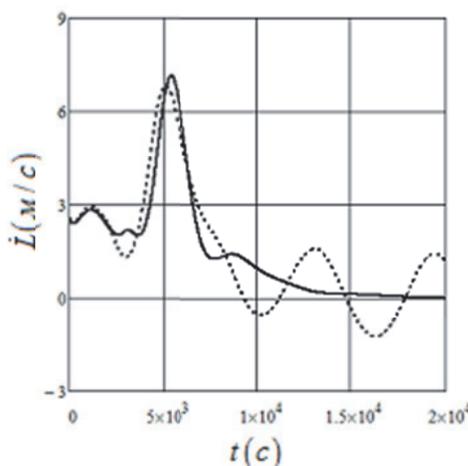
Введение допущения  $\ddot{\vartheta} \approx 0$  позволяет с одной стороны получить явное выражение для силы натяжения троса (22), а другой стороны приводит к возникновению колебаний угла  $\theta$  относительно вертикальных положений равновесия. Причем, как следует из выражений (19), эти колебания тем больше, чем больше эксцентриситет  $e$ . Однако это не приводит к колебаниям скорости выпуска троса относительно нуля, так как от переменной  $\ddot{\vartheta}$  правая часть уравнения (16) не зависит. Приведенные рассуждения подтверждаются также численными оценками по более сложной модели, которые приводятся ниже.

В качестве примера на рис. 2 показаны две траектории малого КА относительно базового КА (начало координат), вычисленные с использованием программы (22), учитывающей эллиптичность орбиты ( $e = 0.02$ , сплошная линия), и с использованием программы (20), заданной для круговой орбиты [13]. Не учт эллиптич-

ности орбиты ведет к большим отклонениям вывода груза на вертикаль, которые при длине троса  $L_k = 30$  км достигают 1.5 км. Параметры законов  $a = 4$ ,  $b = 3.7$ . Начальная высота орбиты 1000 км, масса малого КА  $m = 20$  кг. Кроме того, не учет эллиптичности орбиты приводит к появлению отрицательных значений скорости выпуска троса (рис. 3), что для применяемых в настоящее время механизмов выпуска троса, работающих только на торможение, не допустимо. На рис.3 сплошной линией показана зависимость  $\dot{L}(t)$ , вычисленная с использованием закона (22), а штриховой линией – та же зависимость, определенная в соответствии с законом (20).



**Рис. 2.** Номинальные траектории движения малого КА относительно базового КА (начало координат):  
сплошная линия – программа (22),  
штриховая линия – программа (20)



**Рис. 3.** Скорости выпуска троса:  
сплошная линия – программа (22),  
штриховая линия – программа (20)

Здесь надо отметить, что программы развертывания КТС в вертикальное положение часто используются в качестве составной части более сложных программ выпуска троса. Так, напри-

мер, в реальном тросовом эксперименте YES2 [2] программа развертывания троса в вертикальное положение использовалась в качестве первого этапа формирования системы, причем на втором этапе применялись программы быстрого развертывания, включающие в себя участки разгона и торможения [2, 14–16]. Возникновение ошибок приведения на вертикаль на первом этапе развертывания троса из-за не учета эллиптичности орбиты неизбежно ведет к резкому возрастанию погрешностей на втором этапе, так как программы быстрого выпуска троса чувствительны к начальным отклонениям.

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КТС В ГЕОЦЕНТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Оценка допустимости принятых упрощений и предлагаемой программы развертывания КТС на эллиптической орбите проводится по более полной модели движения, в которой трос представлялся как совокупность  $n$  материальных точек с упругими и односторонними механическими связями. Данная дискретная модель описывает движение КТС как системы с распределенными параметрами. Подобные модели обычно используются, как эталонные, для оценки применимости более простых моделей [13], [17]. Силы натяжения между точками определяются по закону Гука. Аэродинамические силы, диссипативные силы внутри троса и движение относительно центров масс концевых тел (космических аппаратов) в данном случае не учитываются. Движение происходит в центральном ньютоновском поле и описывается в неподвижной геоцентрической системе координат. При достаточно большом количестве точек  $n$  данная модель близка к математической модели с распределенными параметрами, которая представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных [1].

Уравнения движения КТС записываются в виде

$$\frac{d\bar{r}_k}{dt} = \bar{V}_k, \quad m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} = \bar{G}_k + \bar{T}_k - \bar{T}_{k+1}, \quad (23)$$

где  $\bar{r}_k$ ,  $\bar{V}_k$  и  $m_k$  – радиус-вектор, скорость и масса  $k$ -ой материальной точки;  $\bar{G}_k$  – гравитационная сила,  $\bar{T}_k$  – сила натяжения троса, действующие между  $k$ -ой и  $k+1$ -ой точками и приложенная к  $k$ -ой точке;  $k = 1, 2, \dots, n$ . В системе (23) выпуск троса осуществляется с базового КА массой  $m_1$ . По мере развертывания системы добавляются новые материальные точки, описывающие трос, так как его длина увеличивается. Алгоритм добавления новых точек описывается в работе [13].

Система (23) рассматривается совместно с уравнениями, описывающие динамику работы

механизма управления. Эти уравнения записываются в виде [15,16]

$$m_i \frac{dV_l}{dt} = T_1 - F, \quad \frac{dl}{dt} = V_l, \quad (24)$$

где коэффициент  $m_i$  учитывает инерционность механизма управления,  $l$  – длина троса, выпущенного из механизма управления;  $V_l$  – скорость выпуска троса;  $T_1$  – сила натяжения на первом участке, считая от базового КА;  $F$  – управляющая сила в механизме торможения. Изменением инерционности  $m_i$  механизма в процессе развертывания КТС пренебрегается.

Управляющая сила в механизме выпуска троса часто задается в виде суммы [2, 13]

$$F = T + p_l(l-L) + p_V(V_l - V), \quad (25)$$

где  $L$  и  $V$  – программные (номинальные) зависимости длины и скорости троса от времени, соответствующие системе (16–18),  $p_l, p_V$  – коэффициенты обратной связи,  $l, V_l$  – возмущенные длина и скорость троса.

Система уравнений (23–25) позволяет оценить правомерность некоторых допущений, принятых при построении программ выпуска троса по модели (16–18). Модель (23–25) учитывает: 1) растяжимость троса; 2) инерционность механизма управления; 3) возмущенное движение центра масс системы.

Численные расчеты по модели движения КТС (23–25) проводятся для рассмотренной выше программы развертывания. Жесткость троса  $c = 7070$  н. Инерционность управляющего механизма  $0.5$  кг. Масса базового КА  $6000$  кг. Параметры законов  $a = 4$ ,  $b = 10$ . Задача оптимального выбора коэффициентов обратной связи не решается, так как требует отдельного рассмотрения. Коэффициенты обратной связи принимались постоянными  $p_l = 0.243$ ,  $p_V = 7.824$ , и были выбраны в соответствии с результатами работы [13], где рассматривалось развертывание КТС на круговых орбитах.

Результаты расчета траекторий малого КА, определенные по модели (23–25), относительно базового КА показаны на рис. 4 и 5 (номинальные траектории – сплошная линия, возмущенные траектории – штриховые линии). На рис. 4 показан случай, когда используется закон (20) для круговой орбиты, не учитывающий эллиптичность реальной орбиты. Погрешность вывода груза на вертикаль достигает около  $1.8$  км. Рис. 5 соответствует случаю, когда используется модифицированный закон (22). Погрешность вывода малого КА на вертикаль в данном случае уменьшается более чем в два раза.

При моделировании движения с применением более полной модели (23–25) для КТС с приведенными выше характеристиками достаточно задавать длину участка (расстояния меж-

ду точками) на уровне от  $1$  км до  $3$  км. Дальнейшее увеличение количества точек не приводит к изменению результатов моделирования.

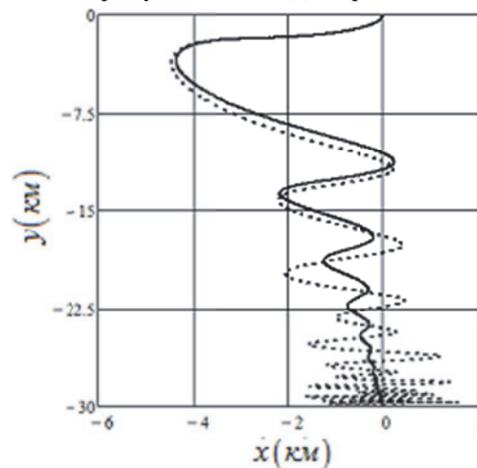


Рис. 4. Номинальная (сплошная линия) и возмущенная (штриховая линия) траектории движения малого КА относительно базового КА (начало координат) при использовании программы (20)

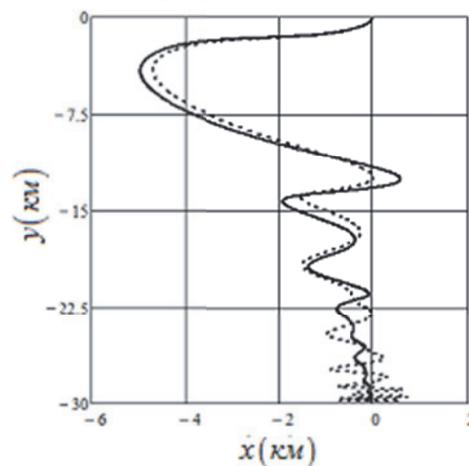


Рис. 5. Номинальная (сплошная линия) и возмущенная (штриховая линия) траектории движения малого КА относительно базового КА (начало координат) при использовании программы (22)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе предлагается при построении номинальных программ развертывания КТС в вертикальное положение априори учитывать параметры эллиптической орбиты, по которой движется центр масс системы. Это позволяет еще на этапе планирования космической миссии строить номинальные программы развертывания КТС с учетом особенностей конкретных орбит, на которых предполагается развертывание системы. Такой подход, как показали исследования, позволяет уменьшить ошибки регулирования при работе системы стабилизации и погрешности приведения системы в заданное со-

стояние. На основании построенной математической модели (16–18), учитывающей параметры орбиты, на которой предполагается проводить развертывание КТС, предложен новый динамический закон выпуска троса (22), обобщающий известные законы развертывания КТС в вертикальное положение [1–2], [13–14], построенные для круговой орбиты. Проведены численные расчеты по наиболее полной математической модели движения КТС с распределенными параметрами, учитывающей работу системы регулирования, растяжимость троса и инерционность механизма управления. Численные расчеты подтвердили эффективность предлагаемого закона управления (с точки зрения уменьшения ошибок регулирования). Так, например, погрешность приведения малого КА в конечное состояние на вертикаль уменьшилась почти в два раза (с 1.8 км до 0.8 км при длине троса 30 км) по сравнению с использованием закона, не учитывающего параметры эллиптической орбиты.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белецкий В.В., Левин Е.М.* Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 336 с.
2. *Kruijff M.* Tethers in Space. The Netherlands: Delta-Utec Space Research, 2011. 432 p.
3. *Zabolotnov Yu.* Introduction of Space tether system motion dynamics and control. Beijing: Science Press, 2013. 140 p.
4. *Zhong R., Zhu Z.* Optimal trajectory design of a deorbiting electrodynamic tether system // *Int. J. Space Science and Engineering*. 2013. V. 1. No.2. Pp. 128–141.
5. *Zabolotnov Yu.M., Elenev D.V.* Stability of Motion of Two Rigid Bodies Connected by a Cable in the Atmosphere // *Mechanics of Solids*. 2013. V.48. No. 2. P. 156–164.
6. *Aslanov V.S., Ledkov A.S.* Dynamic of the Tethered Satellite Systems. Cambridge, UK. 2012. 356 p.
7. *Zhai G., Qiu Y., Liang B., Li C.* On-Orbit Capture with Flexible Tether-Net System // *Acta Astronautica*. 2009. Vol. 65. No. 5. Pp. 613–623.
8. *Fujii H.A., Ichiki W., Suda S.I., Watanabe T.R.* Chaos analysis on librational control of gravity-gradient satellite in elliptic orbit // *J. Guid. Control Dyn.* 2000. V.23. Pp. 145–146.
9. *Icarrea M.* Chaos and its control in the pitch motion of an asymmetric magnetic spacecraft in polar elliptic orbit // *Chaos Soli-tons Fractals*. 2009. V.40. Pp. 1637–1652.
10. *Icarrea M., Lanchares V., Pascual A.I., Salas J.P.* Attitude stabilization of electrodynamic tethers in elliptic orbits by time-delay feedback control // 2014. *Acta Astronautica*. 2014. V.96. Pp. 280–295.
11. *Kojima H., Sugimoto T.* Stability analysis of in-plane and out-of-plane periodic motions of electrodynamic tether system in inclined elliptic orbit // *Acta Astronautica*. 2009. Vol.65. Pp. 477–488.
12. *Kojima H., Iwasaki M., Fujii H.A., Blanksby C., Trivailo P.* Nonlinear control of librational motion of tethered satellites in elliptic orbits // 2004. *J. Guid. Control Dyn.* 2004. V.27. Pp. 229–239.
13. *Заболотнов Ю.М.* Управление развертыванием орбитальной тросовой системы в вертикальное положение с малым грузом // *Прикладная математика и механика*. 2015. Т.79. № 1. С. 28–34.
14. *Ишков С.А., Наумов С.А.* Управление развертыванием орбитальной тросовой системы // *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва*. 2006. № 1(5). С. 81–90.
15. *Zabolotnov Yu., Naumov O.* Methods of the analysis of motion of small space vehicles around the centre of masses at deployment of space tether system // *Int. J. Space Science and Engineering*. 2014. V. 2. No.4. Pp. 305–326.
16. *Заболотнов Ю.М., Наумов О.Н.* Движение спускаемой капсулы относительно центра масс при развертывании орбитальной тросовой системы // *Космические исследования*. 2012. Т.50. №2. С. 177–187.
17. *Дигнат Ф., Шилен В.* Управление колебаниями орбитальной тросовой системы // *Прикладная математика и механика*. 2000. Т. 64. № 5. С. 747–754.

#### MANAGMENT AT DEPLOYING A TETHERED SYSTEM IN ELLIPTICAL ORBIT

© 2017 Ch. Wang<sup>1</sup>, Y. M. Zabolotnov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Northwestern Polytechnical University, Xi'an, China

<sup>2</sup>Samara National Research University named after academician S.P. Korolev

Management at deploying a tethered system, located in an elliptical Earth orbit is viewed. Orbital system consists of two spacecraft connected by a tether. The new nominal control program depending on the elliptical orbit parameters and providing deployment of the tether system in a given vertical position is offered. Lagrange's method of mathematical model of motion of the system, taking into account the peculiarities of this problem is obtained. Testing calculations are carried out using a mathematical model of motion of the system with distributed parameters recorded in the fixed geocentric coordinate system. System of the stabilization, implementing feedback on the length and speed of the tether is used.

*Keywords:* Space tether system, management, elliptical orbit, program of the deployment.

*Changqing Wang, Ph.D., Associate Professor of School of Automation. E-mail: wangcq@mail.ru*

*Yury Zabolotnov, Doctor of Technics, Professor at the Program Systems Department. E-mail: yumz@yandex.ru*