

## ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КАНАТА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ПРОДОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ

© 2017 В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов

Сызранский филиал Самарского государственного технического университета

Статья поступила в редакцию 17.05.2017

В статье исследуются колебания каната, движущегося в продольном направлении. Модель учитывает натяжение каната, изгибную жёсткость и сопротивление внешней среды. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами. При постоянной скорости продольного движения колебания каната характеризуются набором собственных частот. В случае отсутствия сопротивления среды для решения задачи использовано дискретное интегральное преобразование Фурье. В результате в виде ряда получено уравнение, позволяющее найти точные значения собственных частот. Задача при наличии сопротивления среды решалась методом Канторовича-Галеркина. Полученное уравнение позволяет найти приближённые значения двух первых собственных частот. Сравнением точных и приближённых частот оценена точность решения, полученного методом Канторовича-Галеркина. В статье проанализировано, как влияет скорость продольного движения каната на форму собственных колебаний. Решение произведено в безразмерных переменных, что позволяет использовать полученные результаты для расчёта колебаний широкого круга технических объектов.

**Ключевые слова:** колебания объектов с движущимися границами, краевые задачи, математические модели, резонансные свойства.

### ВВЕДЕНИЕ

В статье исследуются поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении. Модель учитывает натяжение каната, изгибную жёсткость и сопротивление внешней среды. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами и нагрузками [1-20]. Такие объекты широко распространены в технике. Это канаты грузоподъёмных установок [2, 9, 13, 20], гибкие звенья передач [1, 8, 17], балки [3, 18], лентопротяжные механизмы [14], конвейеры [16] и т.д. Наличие движущихся границ делает неприменимыми к решению таких краевых задач классические методы математической физики, поэтому они в настоящее время изучены недостаточно.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Схема объекта изучения изображена на рис. 1.

Уравнение, учитывающее изгибную жёсткость, натяжение каната и сопротивление внешней среды, имеет вид:

$$u_{tt}(x,t) + bu_{xxxx}(x,t) - a^2u_{xx}(x,t) + Gu_t(x,t) = 0. \quad (1)$$

Анисимов Валерий Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой общетеоретических дисциплин.

E-mail: anisimov170159@mail.ru

Литвинов Владислав Львович, кандидат технических наук, доцент кафедры общетеоретических дисциплин.

E-mail: vladlitvinov@rambler.ru

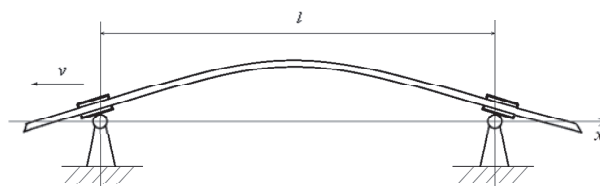


Рис. 1. Схема объекта

Здесь  $u(x,t)$  – поперечное смещение точки каната с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $b = (EI)/\rho$  ( $E$  – модуль упругости материала каната;  $I$  – осевой момент инерции сечения каната,  $\rho$  – масса единицы длины каната);  $a^2 = T/\rho$  ( $T$  – натяжение каната);  $G$  – коэффициент сопротивления среды (сила, действующая на единицу длины струны при единичной скорости поперечного движения).

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} u(vt, t) = 0; \quad u(vt + l, t) = 0; \\ u_{xx}(vt, t) = 0; \quad u_{xx}(vt + l, t) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $v$  – скорость продольного движения каната,  $l$  – длина колеблющейся части.

Введем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} u(x, t) = U(\xi, \tau); \quad \xi = \frac{2\pi(x - vt)}{l}; \\ \tau = \frac{2\pi\sqrt{a^2 - v^2}}{l} t. \end{aligned}$$

В результате получим задачу с условиями, заданными на неподвижных границах:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) + \beta U_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \gamma U_{\xi\tau}(\xi, \tau) + \lambda U_{\tau}(\xi, \tau) - \eta U_{\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (3)$$

$$U(0, \tau) = 0; U(2\pi, \tau) = 0; \quad (4)$$

$$U_{\xi\xi}(0, \tau) = 0; U_{\xi\xi}(2\pi, \tau) = 0.$$

Здесь

$$\beta = \frac{4\pi^2 b}{l^2(a^2 - v^2)}; \lambda = \frac{Gl}{2\pi\sqrt{a^2 - v^2}};$$

$$\gamma = \frac{2v}{\sqrt{a^2 - v^2}}; \eta = \frac{Gvl}{2\pi(a^2 - v^2)}.$$

Четыре коэффициента уравнения (1) могут быть выражены через три безразмерных параметра:

$$\alpha = \frac{v}{a}; \theta = \frac{4\pi^2 b}{l^2 a^2}; D = \frac{Gl}{2\pi a}.$$

Параметры характеризуют:  $\alpha$  – скорость продольного движения каната;  $\theta$  – изгибную жёсткость;  $D$  – сопротивление среды.

Через безразмерные параметры коэффициенты уравнения (3) выражаются следующим образом:

$$\beta = \frac{\theta}{1 - \alpha^2}; \gamma = \frac{2\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}};$$

$$\lambda = \frac{D}{\sqrt{1 - \alpha^2}}; \eta = \frac{\alpha D}{1 - \alpha^2}.$$

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решим задачу (3), (4) без учёта изгибной жёсткости ( $\beta = 0$ ). Решение будем искать в виде:

$$U(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{\omega\tau}.$$

Для нахождения функции  $\mu(\xi)$ , получим следующую краевую задачу:

$$\mu''(\xi) + (\gamma\omega + \eta)\mu'(\xi) - (\omega^2 + \lambda\omega)\mu(\xi) = 0; \quad (5)$$

$$\mu(0) = 0; \mu(2\pi) = 0. \quad (6)$$

Решение задачи (5-6) не представляет затруднений. В результате решения получено выражение для собственных частот колебаний:

$$\omega_n = -\frac{\gamma\eta + 2\lambda}{\gamma^2 + 4} +$$

$$+ i \frac{\sqrt{(\gamma^2 + 4)(n^2 + \eta^2) - (\gamma\eta + 2\lambda)^2}}{\gamma^2 + 4}.$$

Здесь  $i$  – мнимая единица;  $n$  – порядковый номер частоты. Действительная часть выражения (7) характеризует затухание колебаний, а мнимая частоту.

При отсутствии затухания ( $\lambda = \eta = 0$ ) выражение (7) примет вид:

$$\omega_n = i \frac{n}{\sqrt{\gamma^2 + 4}}. \quad (8)$$

При этом собственные функции определяются выражением:

$$\mu(\xi) = \sin\left(\frac{(1 - \alpha)n\xi}{2}\right) + \sin\left(\frac{(1 + \alpha)n\xi}{2}\right).$$

Как изменяются собственные функции  $\mu(\xi)$  в зависимости от параметра  $\alpha$ , показано на рис. 2.

Анализ рисунка 2 показывает, что чем больше скорость движения каната, тем больше искажаются собственные функции. Искажение

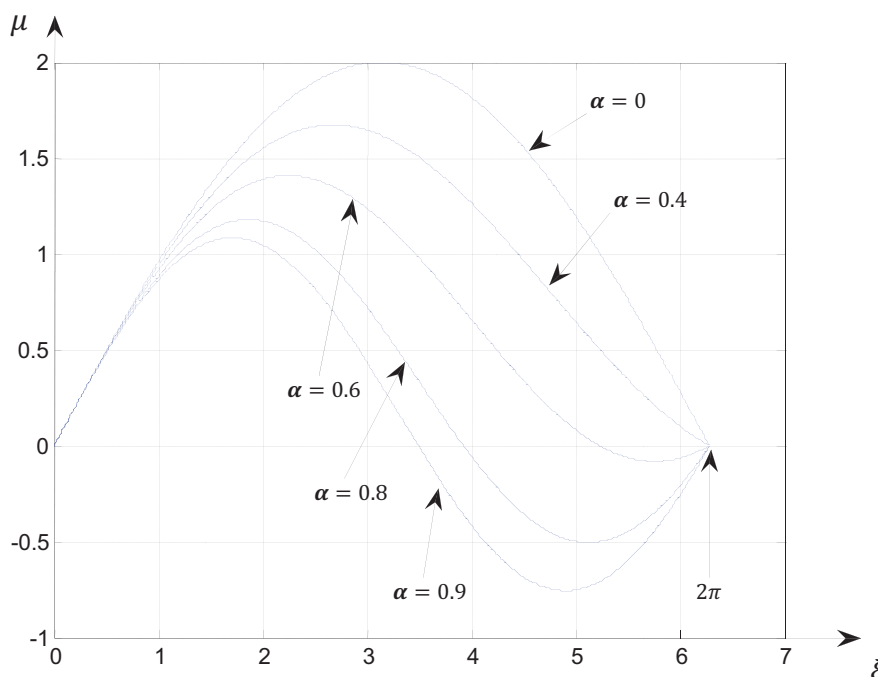


Рис. 2. Зависимость собственных функций от скорости продольного движения каната

происходит на границе, движущейся навстречу бегущим волнам.

Решим задачу (3, 4) с учётом изгибной жёсткости, но без учета затухания ( $\lambda = \eta = 0$ ). Решение будем искать в виде

$$U(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{i\omega\tau},$$

где  $i$  – мнимая единица.

Для определения  $\mu(\xi)$  получим следующую задачу:

$$\beta\mu''''(\xi) - \mu''(\xi) - i\gamma\omega\mu'(\xi) - \omega^2\mu(\xi) = 0; \quad (9)$$

$$\mu(0) = 0; \mu(2\pi) = 0; \mu''(0) = 0; \mu''(2\pi) = 0. \quad (10)$$

Для решения предполагается использовать дискретное интегральное преобразование Фурье. При применении преобразования к задаче (9,10) ряд для  $\mu''(\xi)$  получается расходящимся. Для улучшения сходимости введем новую функцию:

$$f(\xi) = \mu(\xi) + \frac{\mu_1}{2}\xi - \frac{\mu_1}{2}\xi^3 + \frac{\mu_1}{2}\xi^4, \quad (11)$$

где  $\mu_1 = \mu'(2\pi) - \mu'(0)$ .

Функция  $f(\xi)$  удовлетворяет условиям:

$$f(0) = 0; f(2\pi) = 0; f''(0) = 0;$$

$$f''(2\pi) = 0; f'(2\pi) = f'(0).$$

Это улучшает сходимость получаемых далее рядов.

Относительно  $f(\xi)$  получим следующую задачу:

$$\begin{aligned} & \beta f''''(\xi) - f''(\xi) - i\gamma\omega f'(\xi) - \omega^2 f(\xi) = \\ & = \mu_1 \left( \frac{12\beta}{(2\pi)^3} - \frac{1}{2} i\gamma\omega + \left( \frac{6}{(2\pi)^2} - \frac{\omega^2}{2} \right) \xi + \left( \frac{-6}{(2\pi)^3} + i\gamma\omega \frac{3}{(2\pi)^2} \right) \xi^2 + \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} - \frac{2}{(2\pi)^3} i\gamma\omega \right) \xi^3 - \frac{\omega^2}{2(2\pi)^3} \xi^4 \right); \\ & f(0) = 0; f(2\pi) = 0; f''(0) = 0; f''(2\pi) = 0. \end{aligned}$$

Для решения задачи используем дискретное интегральное преобразование Фурье:

$$F(p) = \int_0^{2\pi} f(\xi) e^{ip\xi} d\xi; \quad p = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

В результате применения преобразования получим:

$$F(p) = \frac{-\beta f_3 + 0.30396 \frac{\mu_1}{p^4} (-p^2 + (\beta\omega p + \omega^2)(3.28991p^2 + 1))}{\beta p^4 + p^2 - \beta\omega p - \omega^2};$$

$$p = \pm 1, \pm 2 \dots$$

$$F(0) = \frac{\beta}{\omega^2} f_3 + 0.30396 \mu_1 \left( 12.98788 - \frac{\beta}{\omega^2} - \frac{3.289905}{\omega^2} \right),$$

где  $f_3 = f'''(2\pi) - f'''(0)$ .

Обратное интегральное преобразование имеет вид:

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} F(p) e^{-ip\xi}. \quad (12)$$

Объединяя члены при  $p$  и  $-p$  с учётом (11) и краевых условий (10), получим систему двух линейных уравнений относительно  $\mu_1$  и  $f_3$ :

$$\mu(2\pi) = \mu(0) = \frac{1}{2\pi} \left( F(0) + \sum_{p=1}^{\infty} (F(-p) + F(p)) \right) = 0;$$

$$\mu''(2\pi) = \mu''(0) = -\frac{1}{2\pi} \left( F(0) + \sum_{p=1}^{\infty} p^2 (F(-p) + F(p)) \right) = 0.$$

Из равенства нулю определителя системы получается уравнение собственных частот:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\beta}{\omega^2} - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta A_p}{A_p^2 - B_p^2} \right) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{-A_p p^2 + (3.28991p^2 + 1)(A_p \omega^2 + B_p^2)}{p^2 (A_p^2 - B_p^2)} + \\ & \quad + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta A_p p^2}{A_p^2 - B_p^2} * \\ & \quad * \left( 12.98778 - \frac{\beta}{\omega^2} - \frac{3.28991}{\omega^2} + \right. \\ & \quad \left. + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{-A_p p^2 + (3.28991p^2 + 1)(A_p \omega^2 + B_p^2)}{p^4 (A_p^2 - B_p^2)} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $A_p = \beta p^4 + p^2 - \omega^2$ ;  $B_p = \gamma\omega p$ .

Решим задачу (3), (4) методом Канторовича-Галеркина. Решение будем искать в виде:

$$U(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{\omega\tau}.$$

Для определения  $\mu(\xi)$  получим следующую задачу:

$$\begin{aligned} L[\mu(\xi)] &= \beta\mu''''(\xi) - \mu''(\xi) - (\gamma\omega + \eta)\mu'(\xi) + \\ & \quad + (\omega^2 + \omega\lambda)\mu(\xi) = 0; \\ \mu(0) &= 0; \mu(2\pi) = 0; \\ \mu''(0) &= 0; \mu''(2\pi) = 0. \end{aligned}$$

Функцию  $\mu(\xi)$  возьмём в виде:

$$\mu(\xi) = C_1 \mu_1(\xi) + C_2 \mu_2(\xi),$$

где  $\mu_1(\xi) = \sin \frac{\xi}{2}$ ;  $\mu_2(\xi) = \sin \xi$ . Данные функции удовлетворяют граничным условиям (15) и являются первой и второй собственными функциями задачи (3), (4) в случае, когда продольное движение каната отсутствует.

Согласно методу Канторовича-Галеркина, произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  находятся из следующей однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\int_0^{2\pi} L[\mu(\xi)] \mu_1(\xi) d\xi = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} L[\mu(\xi)] \mu_2(\xi) d\xi = 0.$$

Дифференциальный оператор  $L[\mu(\xi)]$  определяется выражением (14).

Произведя интегрирование и приравняв определитель системы к нулю, получим уравнение собственных частот:

$$\omega^4 + 2\lambda\omega^3 + \omega^2(1.0625\beta + 0.36025\gamma^2 + 1.25) + \omega(\lambda(1.0625\beta + 1.25) + 0.72051\gamma\eta) + ((0.0625\beta + 0.25)(\beta + 1) + 0.36025\eta^2) = 0. \quad (16)$$

Данное уравнение позволяет получить две первые собственные частоты поперечных колебаний каната.

Уравнение (13) было решено численно при различных значениях параметров  $\alpha$  и  $\theta$ . Результаты вычислений приведены в табл. 2. При  $\theta = 0$  ряды, входящие в уравнение (13) расходятся, поэтому значения частот были вычислены по формуле (8).

Уравнение (16) решалось в среде MATLAB. Для оценки точности метода Канторовича-Галеркина уравнение (16) было решено для случая отсутствия затухания ( $\lambda = \eta = 0$ ). Результаты вычислений приведены в табл. 1. При каждом значении  $\alpha$  приведены следующие частоты: точное значение первой собственной частоты, точное значение второй собственной частоты, приближённое значение первой собственной частоты, приближённое значение второй собственной частоты. В таблице жирным шрифтом выделены приближённые частоты имеющие погрешность более 5%.

Анализ табличных данных показывает, что погрешность частот, полученных методом Канторовича-Галеркина, увеличивается с увеличением  $\alpha$  и уменьшается с увеличением  $\theta$ . Погрешность вторых собственных частот больше чем первых.

Уравнение (13) позволяет получить любую собственную частоту. Например, при  $\alpha = 0.4$  и  $\theta = 2$  получены следующие собственные частоты:

$$\omega_1 = 0.7770; \omega_2 = 2.7063; \omega_3 = 5.8510;$$

$$\omega_4 = 10.2345; \omega_5 = 15.8673; \omega_6 = 22.7436$$

Уравнение (16) позволяет учесть затухание ( $D \neq 0$ ). Например, для параметров  $\alpha = 0.8$ ;  $\theta = 2$ ;  $D = 0.1$  получены следующие частоты:

$$\omega_1 = -0.0626 + 0.7543 i;$$

$$\omega_2 = -0.0626 + 2.8476 i.$$

Действительная часть частот характеризует затухание колебаний, а мнимая частоту.

Если  $\omega_n$  безразмерная частота (задача (3), (4)), то частота исходной задачи (1), (2) находится по формуле:

$$W_n = \frac{\pi(\alpha^2 - \nu^2)\beta\omega_n}{lv}.$$

Таблица 1. Результаты вычислений

$\alpha$	$\theta$	0	2	4	6	8	10	примечания
0	0.5	0.6124	0.7071	0.7906	0.8660	0.9354	0.9354	$\omega_1$ (точн.)
	1	1.7321	2.2361	2.6458	3,0000	3.3166	3.3166	$\omega_2$ (точн.)
	0.5	0.6124	0.7071	0.7906	0.8660	0.9354	0.9354	$\omega_1$ (прибл.)
	1	1.7321	2.2361	2.6458	3,0000	3.3166	3.3166	$\omega_2$ (прибл.)
0.2	0.4899	0.6140	0.7130	0.7993	0.8769	0.9487	0.9487	$\omega_1$ (точн.)
	0.9798	1.7576	2.2747	2.2747	3.0565	3.3805	3.3805	$\omega_2$ (точн.)
	0.4815	0.6099	0.7099	0.7968	0.8749	0.9465	0.9465	$\omega_1$ (прибл.)
	1.0383	1.7753	2.2876	2.7048	3.0657	3.3885	3.3885	$\omega_2$ (прибл.)
0.4	0.4583	0.6179	0.7304	0.8274	0.9137	0.9913	0.9913	$\omega_1$ (точн.)
	0.9165	1.8430	2.4056	2.8586	3.2485	3.5968	3.5968	$\omega_2$ (точн.)
	0.4323	0.6046	0.7214	0.8196	0.9066	0.9857	0.9857	$\omega_1$ (прибл.)
	<b>1.1565</b>	1.9206	2.4624	2.9055	3.2896	3.6334	3.6334	$\omega_2$ (прибл.)
0.6	0.4000	0.6334	0.7770	0.8953	1.0001	1.0932	1.0932	$\omega_1$ (точн.)
	0.8000	2.0419	2.7063	3.2340	3.6870	3.3960	3.3960	$\omega_2$ (точн.)
	<b>0.3598</b>	0.6052	0.7558	0.8780	0.9842	1.0796	1.0796	$\omega_1$ (прибл.)
	<b>1.3896</b>	<b>2.2393</b>	2.8513	3.3542	3.7912	4.1829	4.1829	$\omega_2$ (прибл.)
0.8	0.3000	0.7013	0.9205	1.0942	1.2435	1.3764	1.3764	$\omega_1$ (точн.)
	0.6000	2.5899	3.5133	4.2350	4.8481	5.3913	5.3913	$\omega_2$ (точн.)
	<b>0.2584</b>	<b>0.6485</b>	<b>0.8777</b>	1.0576	1.2109	1.3468	1.3468	$\omega_1$ (прибл.)
	<b>1.9352</b>	<b>3.0485</b>	<b>3.8532</b>	<b>4.5168</b>	5.0948	5.6135	5.6135	$\omega_2$ (прибл.)
0.99	0.0705	2.1796	3.2835	4.1177	4.8151	5.4242	5.4242	$\omega_1$ (точн.)
	1.1411	10.3101	14.4443	17.6036	20.2682	22.6175	22.6175	$\omega_2$ (точн.)
	<b>0.0588</b>	<b>1.9451</b>	<b>3.0599</b>	3.9129	4.6256	5.2487	5.2487	$\omega_1$ (прибл.)
	<b>8.4981</b>	<b>13.2371</b>	<b>16.6261</b>	<b>19.4233</b>	<b>21.8623</b>	<b>24.0390</b>	<b>24.0390</b>	$\omega_2$ (прибл.)



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье произведен анализ колебаний каната движущегося в продольном направлении. Модель учитывает натяжение каната, изгибную жёсткость и сопротивление внешней среды. Решение произведено точным и приближённым методами, что позволяет оценить применимость метода Канторовича-Галеркина для описания колебаний систем с движущимися границами. Полученные количественные результаты могут быть использованы для расчёта широкого круга технических объектов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарин Ю.П., Анисимов В. Н. Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне // Изв. Вузов. Машиностроение, 1986. №12. С. 17–21
2. Горошко О. А., Савин Г. Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1971. 270 с.
3. Лежнева А. А. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела, 1970. №1. С. 159–161.
4. Весницкий А. И. Волны в системах с движущимися границами. М.: Физматлит, 2001. 320 с
5. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Исследование резонансных свойств механических объектов при помощи метода Канторовича-Галёркина // Вестн. Сам.гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2009. № 1(18). С. 149–158.
6. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В. Об одном методе получения точного решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестн. Сам.гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2012. №3(28). С. 145–151.
7. Ding Hu, Chen Li-Qun. Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams // *J. Sound and Vibr.*, 2010. no. 17. pp. 3484–3494.
8. Zhu W. D., Zheng N. A. Exact response of a translating string with arbitrarily varying length under general excitation // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 2008, vol. 75, no. 3. pp.
9. Zhu W. D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control // *Trans. ASME. J. Vibr. And Acoust.*, 2006. no. 1. Pp. 66–78.
10. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е. Возбуждение волн нагрузкой, движущейся по поврежденной гибкой одномерной направляющей, лежащей на упругом основании // Проблемы машиностроения и надёжности машин. 2016. № 6. С.14-18.
11. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Генерация волн источником, движущимся по деформируемой направляющей, лежащей на упруго-инерционном основании // Машиностроение и инженерное образование. 2014. № 2 (39). С.37-40.
12. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Лисенкова Е.Е. Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго-инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестник научно-технического развития. 2013. № 6 (70). С. 18–29.
13. Zhang P., Zhu C. M., Zhang L. J. Analyses of longitudinal

vibration and energetic on flexible hoisting systems with arbitrarily varying length// *Journal of Shanghai Jiao-Tong University*, 2008, 42(3). Pp. 481–488.

14. Рагульский К.И. Вопросы динамики прецизионных лентопротяжных механизмов // В сб.: Динамика машин. М.: Наука, 1971. С. 169–177.
15. Chen S.H., Huang J.L. On internal resonance of nonlinear vibration of axially moving beams// *Acta Mechanica Sinica*, 2005, vol.37, no. 1. pp. 57–63 (Chinese).
16. Хосаев Х. С. Математическое описание динамических характеристик канатного става ленточного конвейера // Тр. Сев.-Кавк. гос. технол. ун-та. 2001. № 8. С. 234–239.
17. Тихонов В.С., Абрамов А.А. Поперечные колебания гибкой нити переменной длины в потоке // Вестник МГУ. Сер. 1, 1993. № 5. С.45–48.
18. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Математические модели продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестн. Сам.гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2015. Т. 19. № 2. С. 382–397.
19. Кечеджиян Л.О., Пинчук Н. А., Столяр А.М. Об одной задаче математической физики с подвижной границей // Извест. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки, 2008. № 1. С. 22–27.
20. Анисимов В.Н. Продольные резонансные колебания вязкоупругого каната грузоподъёмной установки // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2016. Т. 18. № 4. С. 128–133.

## REFERENCES

1. Samarina Yu. P., Anisimov V. N. Forced transverse vibrations of the flexible link at dispersal // *Izv. Vuzov. Mashinostroenie*, 1986. no. 12. Pp. 17–21 (In Russian).
2. Goroshko O.A., Savin G. N. Introduction in mechanics of one dimensional deformable bodies of variable length. Kiev: Naukova Dumka, 1971. 270 pp. (In Russian).
3. Lezhnyaya A. A. Bending vibration of beam of variable length // *Izv. Acad. Nauk USSR. Mechanic of solidstate*, 1970. no. 1. pp. 159–161 (In Russian).
4. Vesnitskii A. I. Vaves in systems with moving boundaries and loads. Moscow: Fizmatlit, 2001. pp. 320 (In Russian).
5. Anisimov V. N., Litvinov V. L. Investigation of resonance characteristics of mechanical objects with moving borders by application of the Kantorovich-Galerkin method // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mt. Nauki*, 2009. no. 1(18). pp. 149–158 (In Russian).
6. Anisimov V. N., Litvinov V. L., Korpen I. V. On a method of analytical solution of wave equation describing the oscillation system with moving boundaries // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012. no. 3(28). pp. 145–151 (In Russian).
7. Ding Hu, Chen Li-Qun. Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams // *J. Sound and Vibr.*, 2010. no. 17. pp. 3484–3494.
8. Zhu W. D., Zheng N. A. Exact response of a translating string with arbitrarily varying length under general excitation // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 2008, vol. 75, no. 3. pp.
9. Zhu W.D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamic sand control // *Trans. ASME. J. Vibr. And Acoust.*, 2006. no. 1. Pp. 66–78.

10. Erofeev V.I., Lisenkova E.E. Excitation of waves by a load moving along a damaged flexible one-dimensional guide lying on an elastic base // Problems of Mechanical Engineering and Machine Reliability. 2016. № 6. Pp. 14-18.
11. Erofeev V.I., Kolesov D.A., Lisenkova E.E. Generation of waves by a source moving along a deformable guide lying on an elastic-inertial base // Mechanical engineering and engineering education. 2014. № 2 (39). Pp. 37-40.
12. Erofeev V.I., Kolesov D.A., Lisenkova E.E. Investigation of wave processes in a one-dimensional system lying on an elastic-inertial base, with a moving load // Bulletin of Scientific and Technical Development. № 6 (70), 2013. Pp. 18-29.
13. Zhang P., Zhu C.M., Zhang L.J. Analyses of longitudinal vibration and energetic on flexible hoisting systems with arbitrarily varying length// *Journal of Shanghai Jiao-Tong University*, 2008, 42(3). Pp. 481-488.
14. Ragulsky K.I. Questions of the Dynamics of Precision Tape-Driving Mechanisms // In: The Dynamics of Machines. Moscow: Nauka, 1971. Pp. 169-177.
15. Chen S.H., Huang J.L. On internal resonance of nonlinearvibration of axially moving beams// *Acta Mechanica Sinica*, 2005, vol. 37, no. 1. pp. 57-63 (Chinese).
16. Khosaev Kh. S. Mathematical description of the dynamic characteristics of the rope belt of a belt conveyor, Tr. North-Caucasus. State. Technol. University. 2001. №8. Pp. 234-239.
17. Tikhonov V.S., Abramov A.A. Transverse Vibrations of a Flexible String with Tame-Varying Length in Flow, Vest. Mosk.Univ. Ser 1.Matematika, Mechanica, 1993, no.5, pp. 45-48 (In Russian).
18. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Mathematical models of nonlinear longitudinal-cross oscillations of object with moving borders ,Vestn. Samar.Gos.Tekhn. Univ., Ser. Fiz-Mat. Nauki, 2015, Vol. 19, no.2, pp. 382-397. (In Russian).
19. Kechedgiyan L.O., Pinchuk N.A., Stolyar A.M. A problem of mathematical physics with moving boundary // Vest. Vuzov North-Kaukaz. Region.Natural Sciences, 2008. no 1. pp. 22-27.(In Russian).
20. Anisimov V.N. Longitudinal resonance oscillations of a viscoelastic rope of a load-lifting installation // *Izvestiya Samara Scientific Center, Russian Academy of Sciences*. 2016. Vol. 18. № 4-1. Pp. 128-133.

## TRANSVERSE VIBRATIONS ROPE MOVING IN LONGITUDINAL DIRECTION

© 2017 V.N. Anisimov, V.L. Litvinov

Syzran' Branch of Samara State Technical University

The article researches the oscillations of a rope moving in the longitudinal direction. The model takes into account the tension of the rope, flexural stiffness and resistance of the external environment. The object of the study refers to a wide range of oscillating one-dimensional objects with moving boundaries. At a constant speed of longitudinal motion, the rope oscillations are characterized by a set of eigen frequencies. In the absence of medium resistance, a discrete integral Fourier transform is used to solve the problem. As a result, an equation is obtained in the form of series, which makes it possible to find the exact values of the eigen frequencies. The problem in the presence of medium resistance was solved by the Kantorovich-Galerkin method. The equation obtained allows us to find approximate values of the first two eigen frequencies. A comparison of the exact and approximate frequencies estimates the accuracy of the solution obtained by the Kantorovich-Galerkin method. The article analyzes how the speed of longitudinal rope motion affects the shape of natural oscillations. The solution is made in dimensionless variables, which allows us to use the obtained results to calculate the oscillations of a wide range of technical objects.

*Keywords:* oscillations of objects with moving boundaries, boundary value problems, mathematical models, resonant properties.