УДК 519.24

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕКУРРЕНТНОЙ ПРОЦЕДУРЫ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

© 2017 Г.В. Трошина, С.С. Занило

Новосибирский государственный технический университет

Статья поступила в редакцию 11.12.2017

В данной работе рассматривается итерационная процедура для определения параметров линейных динамических объектов при наличии помех динамики и измерителя. В качестве входного сигнала используется входной сигнал типа меандра. Выполнено моделирование динамической системы на примере объекта четвертого порядка и итерационной процедуры метода наименьших квадратов в среде Simulink. Приводятся результаты оценивания параметров. В дальнейшем предполагается использовать предложенный подход для идентификации динамических объектов более высокого порядка.

Ключевые слова: моделирование, рекуррентный метод наименьших квадратов, меандр, математическая модель, коэффициент усиления.

ВВЕДЕНИЕ

При эксплуатации систем автоматического управления параметры объекта могут быть известны не точно, либо они могут меняться со временем. Поэтому определение параметров объекта в процессе работы системы с целью настройки параметров регулятора для более качественного функционирования объекта является актуальной задачей [1–6]. Одним из путей решения данной задачи – это воздействие на систему тестовым сигналом, оптимальным в некотором смысле. В работах [7–9] поиск оптимального сигнала, воздействующего на динамическую систему, реализуется посредством использования информационной матрицы Фишера. Авторы работы [10] описывают процедуру идентификации параметров в ходе синтеза управления по выходу для систем второго порядка с помощью решения системы нелинейных алгебраических уравнений. При этом параметры объектов предварительно были получены в специальных тестирующих экспериментах. В работе [11] анализируется выбор норм невязок и их комбинаций при параметрической идентификации моделей. Параметрическая идентификация основана на включении в модель параметров и их подборе из условия минимизации нормы невязки. В [12] предложен критерий, являющийся обобщением метода наименьших квадратов, который позволяет получать сильно состоятельные оценки параметров линейных динамических систем дробного порядка с ошибками в переменных и в условиях отсутствия информации о законе распределения.

Трошина Галина Васильевна, кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной техники. E-mail: troshina@corp.nstu.ru

Занило Станислав Сергеевич, магистрант кафедры вычислительной техники. E-mail: hoopmixtape94@gmail.com

В данной работе рассматривается динамический объект, который в общем виде можно выразить следующим образом:

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Psi u_k + w_k,$$

$$y_{k+1} = H x_{k+1} + v_{k+1},$$

где x_{k+1} – вектор состояния, u_k – вектор управления; w_k – вектор возмущения, y_{k+1} – вектор измерения, v_{k+1} – вектор ошибки измерения, Φ – матрица состояния, Γ – матрица возмущения, Ψ – матрица управления, H – матрица наблюдения, Q – неотрицательно определенная матрица ковариации вектора возмущения, R – положительно определенная матрица ковариации вектора ошибки измерения. Параметры $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, которые требуется определить, находятся в матрицах $\Phi(\theta), \Psi(\theta)$. Предлагается рекуррентная схема метода наименьших квадратов для определения параметров линейных динамических объектов в установившемся режиме, то есть все переходные процессы закончились.

1. РЕКУРРЕНТНАЯ СХЕМА МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Для определения параметров $\theta = (\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n)^T$ объекта $y = x^T \theta$ в случае векторного входа $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T$ и скалярного выхода y наиболее типичным алгоритмом оценивания неизвестных параметров является рекуррентный алгоритм метода наименьших квадратов [13–15]:

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + K_{N+1}(y_{N+1} - x_{N+1}^T \hat{\theta}_N),$$

$$K_{N+1} = P_N x_{N+1} \left(1 + x_{N+1}^T P_N x_{N+1}\right),$$

$$P_{N+1} = (I - P_N \frac{x_{N+1} x_{N+1}^T}{1 + x_{N+1}^T P_N x_{N+1}}) P_N,$$

где K_{N+1} – вектор-столбец коэффициентов усиления размером n, P_N, P_{N+1} – матрицы, обеспечивающие оценку дисперсии ошибки оценивания, вычисленные по результатам N и $N+1$ измерений соответственно, I – единичная матрица размером $n \times n$, y_{N+1} – скаляр, $\hat{\theta}_N$, $\hat{\theta}_{N+1}$, x_{N+1} – векторы-столбцы размером n. Моделирование рекуррентной процедуры метода наименьших квадратов организовано в виде блоков нескольких уровней. Каждый блок соответствует определенной формуле, входящей в алгоритм оценивания неизвестных параметров. Данный способ моделирования позволяет компактно отразить весь процесс определения параметров объекта. Более подробно ознакомиться с порядком формирования рекуррентного алгоритма наименьших квадратов в среде Simulink можно в работах [14, 15].

2. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

В общем случае представление используемой процедуры является очень большим и сложным, поэтому она иллюстрируется на модели (рис. 1), которая может быть использована при описании перевернутого маятника, Эта модель часто используется при анализе и синтезе систем управления [9, 16, 17] .

Для примера, изображенного на рис.1, была построена модель в пространстве состояний:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}^1 \\ x_{k+1}^2 \\ x_{k+1}^3 \\ x_{k+1}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 & -(ad+c) \\ 1 & 1-d & 0 & (ad-a-b) \\ 0 & \theta_1 & 0 & -(1+\theta_1 a) \\ 0 & \theta_1 & 1 & (\theta_2 - \theta_1 a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \\ x_k^3 \\ x_k^4 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} ad+c \\ -ad+a+b \\ \theta_1 a \\ \theta_1 a \end{pmatrix} u_k + \begin{pmatrix} w_{k+1}^1 \\ w_{k+1}^2 \\ w_{k+1}^3 \\ w_{k+1}^4 \end{pmatrix},$$

$$y_{k+1} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1) x_{k+1} + v_{k+1},$$

где $a = 135$, $b = -216{,}25$, $c = 87{,}5$, $d = 0{,}375$. Осуществив подстановку указанных значений, получим следующее описание объекта в пространстве состояний:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}^1 \\ x_{k+1}^2 \\ x_{k+1}^3 \\ x_{k+1}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}375 & 0 & -138{,}125 \\ 1 & 0{,}625 & 0 & 131{,}875 \\ 0 & \theta_1 & 0 & -1+135\theta_1 \\ 0 & \theta_1 & 1 & \theta_2 - 135\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \\ x_k^3 \\ x_k^4 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 138{,}125 \\ -131{,}875 \\ 135\theta_1 \\ 135\theta_1 \end{pmatrix} u_k + \begin{pmatrix} w_{k+1}^1 \\ w_{k+1}^2 \\ w_{k+1}^3 \\ w_{k+1}^4 \end{pmatrix},$$

$$y_{k+1} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1) x_{k+1} + v_{k+1}.$$

При рассмотрении данного примера приняты следующие базовые значения для θ_1, θ_2 : $\theta_1 = 0{,}005$, $\theta_1 = 2{,}05$. Для базовых значений θ_1, θ_2 динамический объект принимает вид:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}^1 \\ x_{k+1}^2 \\ x_{k+1}^3 \\ x_{k+1}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}375 & 0 & -138{,}125 \\ 1 & 0{,}625 & 0 & 131{,}875 \\ 0 & 0{,}005 & 0 & -1{,}675 \\ 0 & 0{,}005 & 1 & 1{,}375 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \\ x_k^3 \\ x_k^4 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 138{,}125 \\ -131{,}875 \\ 0.675 \\ 0.675 \end{pmatrix} u_k + \begin{pmatrix} w_{k+1}^1 \\ w_{k+1}^2 \\ w_{k+1}^3 \\ w_{k+1}^4 \end{pmatrix},$$

$$y_{k+1} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1) x_{k+1} + v_{k+1}.$$

В среде Simulink выполнено моделирование динамического объекта (рис. 2).

На рис. 3 показана реакция системы, если входной сигнал - единичная ступенчатая функция.

При подаче на вход тестового сигнала в виде единичной ступенчатой функции имеем следующие оценки параметров: $\theta_1 = 0{,}0003487$, $\theta_2 = 1{,}053$.

Во многих случаях в качестве тестового воздействия подают на вход периодический сигнал типа меандра. В данной работе выбран входной сигнал типа меандра с периодом $T = 8$ и с амплитудой, равной единице (рис. 4). В качестве начального значения матрицы P принято следующее значение: $P_0 = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1{,}5 \end{pmatrix}$.

На рис. 5 показан выходной сигнал системы, если в качестве тестового сигнала используется сигнал типа меандра.

После $N = 100$ измерений получены оценки параметров $\theta = (\theta_1, \theta_2)$: $\theta_1 = 0{,}003592$, $\theta_2 = 1{,}77792$. Результаты моделирования даны для случая, когда присутствуют шумы про-

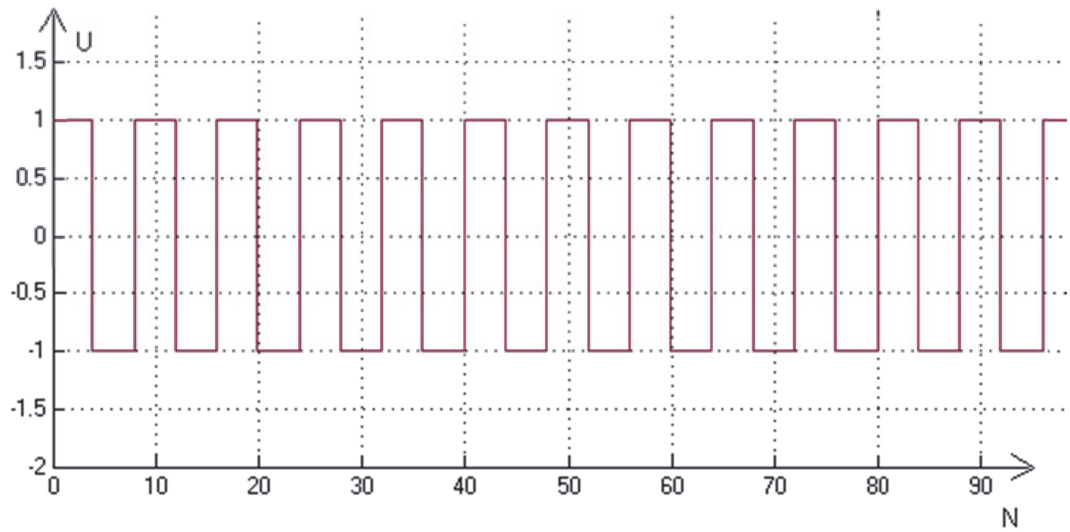

Рис. 4. Входной сигнал типа меандра с периодом $T = 8$

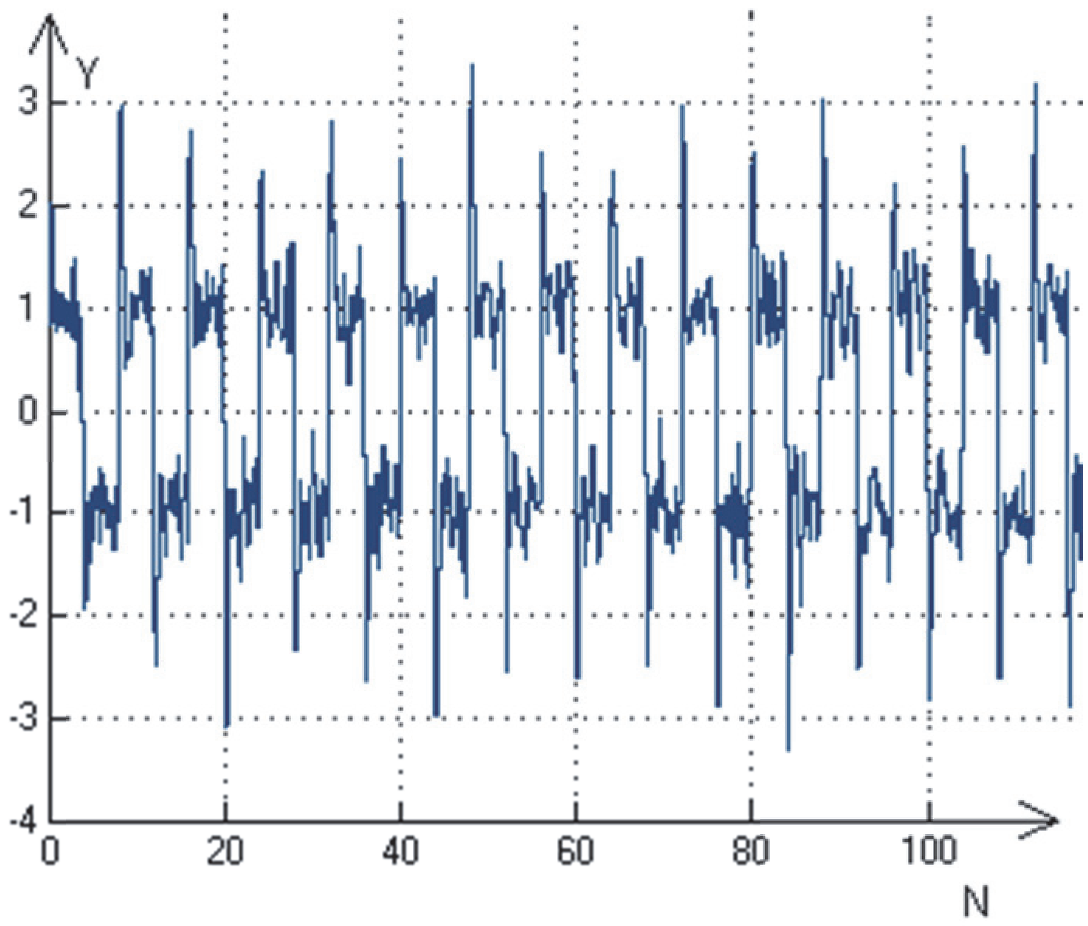

Рис. 5. Выходной сигнал

ние уравнений рекуррентного метода наименьших квадратов. Приводятся графики входного и выходного сигналов. В данной работе используется входной сигнал типа меандра. Приводятся результаты определения динамических параметров. Использование итерационных схем определения параметров в практических исследованиях является важной задачей, поскольку алгоритмы идентификации должны осуществлять мониторинг любых изменений свойств системы за определенный промежуток времени. В дальнейшем предполагается использование рекуррентных методов оценивания для определения параметров многоканальных динамических объектов более высокого порядка с большим числом параметров.

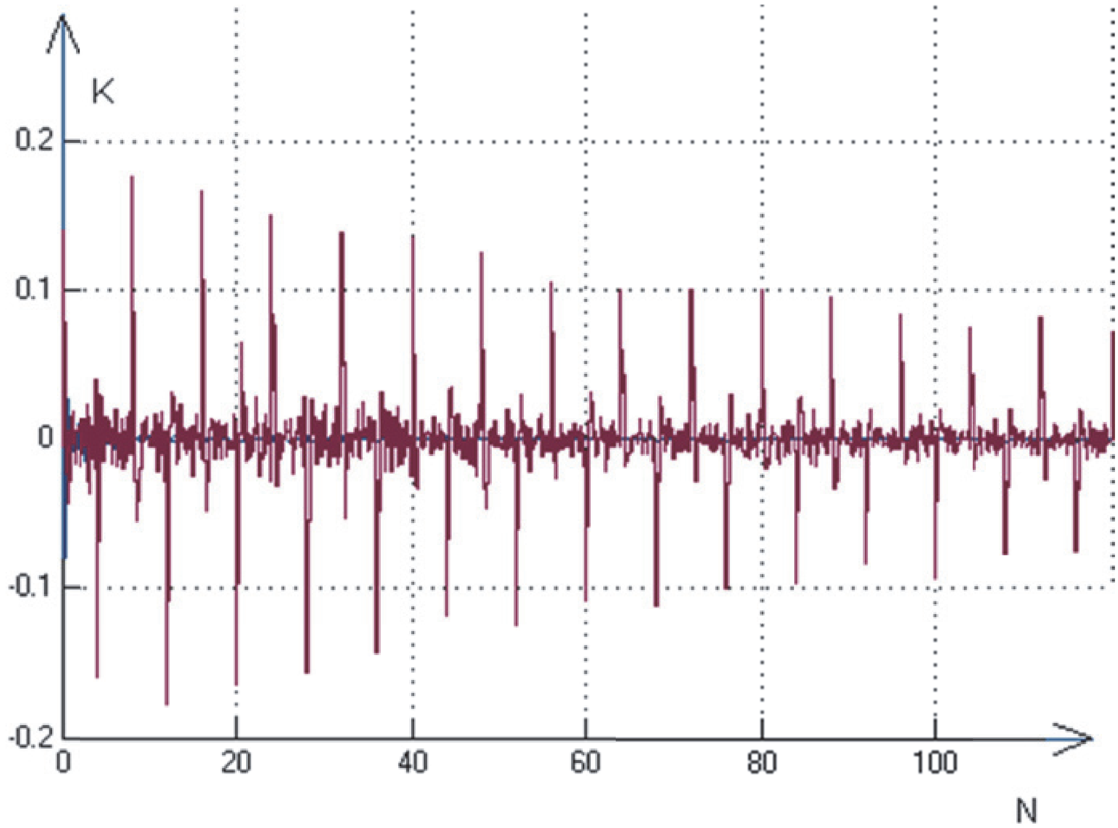

Рис. 6. Поведение коэффициента усиления K

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя [под ред. Я.З. Цыпкина]. М.: Наука, 1991. 432 с.
2. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. 683 с.
3. *Sage A.P., Melsa J.L.* System Identification. New York: Academic Press, 1971. 238 p.
4. *Гроп Д.* Методы идентификации систем. М.: Мир, 1979. 302 с.
5. *Sage A.P., Melsa J.L.* Estimation Theory with Application to Communication and Control. New York: Mc. Graw Hill, 1972. 495 p.
6. *Meditch J.S.* Stochastic Optimal Linear Estimation and Control. New York: Mc. Graw Hill, 1969. 440 p.
7. *Mehra R.K.* Optimal Input for Linear System Identification // IEEE Trans. Autom. Control, 1974 – Vol. 19. No. 3. P. 192-200.
8. *Mehra R.K.* Optimal input signal for parameter estimation in dynamic system – survey and new results / IEEE Trans. Autom. Control, 1974. Vol. AC – 19. № 6. P. 753-768.
9. *Voevoda A.A., Troshina G.V.* The parameters vector estimation in the steady state for the linear dynamic systems // 11 International forum on strategic technology (IFOST 2016): proc., Novosibirsk, 1–3 June 2016. Novosibirsk : NSTU, 2016. Pt. 1. P. 582-584.
10. *Ощепков А.Ю.* Адаптивное управление линейными объектами с инерцией с использованием дискретных быстрых алгоритмов // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014, Москва, 16-19 июня 2014 года: труды. М.: Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 2332-2337. URL: http://vspu2014.ipu.ru/proceedings/vspu2014.zip (дата обращения: 28.10.2014).
11. *Блюмин С.Л., Сараев П.В.* Комбинация норм невязок и методы параметрической идентификации моделей [Электронный ресурс] XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014, Москва, 16-19 июня 2014 года: труды. М.: Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 2612-2618. URL: http://vspu2014.ipu.ru/proceedings/vspu2014.zip (дата обращения: 28.10.2014).
12. *Иванов Д.В., Ширинов И.Р.* Идентификация линейных динамических систем дробного порядка многомерных по входу с ошибками в переменных [Электронный ресурс] // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014, Москва, 16-19 июня 2014 года: труды. – М.: Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 2658-2668. – URL: http://vspu2014.ipu.ru/proceedings/vspu2014.zip (дата обращения: 28.10.2014).
13. *Goodwin G.C., Payne R.L.* Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis. New York: Academic Press, 1977. 291 p.
14. *Трошина Г.В.* Моделирование динамических объектов в среде SIMULINK. Ч. 1. // Сб. науч. тр. НГТУ. - Новосибирск, 2015. Вып.3(81). С. 55-68.
15. *Воевода А.А., Трошина Г.В.* Реализация итерационного метода наименьших квадратов для оценивания параметров статических объектов в среде MATLAB // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управ-

ление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 1. С. 28-36.
16. *Chen C.T.* Linear system theory and design. New York Oxford: Oxford University Press, 1999. 334 p.
17. *Antsaklis P.J., Michel A.N.* Linear systems. New York: Mc. Graw Hill, 1997. 685 p.

THE RECURRENT PROCEDURE USE OF THE LEAST-SQUARES METHOD FOR THE LINEAR DYNAMIC OBJECTS PARAMETERS DETERMINATION

Novosibirsk State Technical University

The iterative procedure for the parameters determination of the linear dynamic objects with the dynamics noises and the measurements noises is considered in this work. The input signal like a meander is used as an input signal. The dynamic system modeling on the example of the fourth order object and iterative procedure of the least-squares method is executed in the Simulink environment. The parameters determination results are given. It is supposed to use the offered approach for the identification of the higher order dynamic objects further.
Keywords: modeling, recurrent least-squares method, meander, mathematical model, gain coefficient

Galina Troshina, Candidate of Technics, Associate Professor at the Computer Engineering Department.
E-mail: troshina@corp.nstu.ru
Stanislav Zanilo, Student at the Computer Engineering Department. E-mail: hoopmixtape94@gmail.com