УДК 517.997.5 : 62-501.52

К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСА В СИСТЕМЕ НЕЗАВИСИМЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ. II

Ю.Н.Горелов

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва

Статья поступила в редакцию 20.12.2017

Рассматриваются задачи оптимального распределения ресурса для системы независимых объектов управления – пары двойных интеграторов, для которой решена задача оптимального управления с учетом ограничений на скорость расхода материального ресурса типа «топлива». Кроме того, для такой системы решены задачи на быстродействие, когда в качестве ресурсов, необходимых для создания управляющих воздействий и дополнительно ограниченных скоростью их расхода, рассматриваются энергетический и материальный ресурсы управления. По результатам решения указанных выявлены основные особенности оптимального распределения ресурса управления в зависимости от его вида. Отмечено, что рассмотренные задачи управления также можно отнести к классу смешанных задач по А.М.Летову.

Ключевые слова: ресурс управления, оптимальное распределение ресурса, система независимых объектов управления, двойной интегратор, энергетический и материальный ресурс, оптимальное управление, быстродействие

Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ (проект № 16-41-630524) и субсидий в рамках исполнения ГЗН (проект № 8.6675.2017/БЧ)

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с концепцией физической теории управления [1] в первой части статьи [2] была дана общая постановка задачи оптимального распределения ресурса управления для системы независимых объектов управления и приведено полное решение этой задачи для пары двойных интеграторов, когда в качестве распределяемого ресурса управления рассматривался энергетический ресурс (в виде «энергии управления»). Там же приведены и общие решения для задач на быстродействие и на минимум «энергии управления» для двойного интегратора в случае задания произвольных граничных условий, что необходимо для выявления закономерностей распределения ресурса определенного вида. Анализ распределения энергетического ресурса (мгновенной мощности) при различных сочетаниях ограничений на управляющие параметры пары двойных интеграторов показал, что при доминировании ограничения на энергетический ресурс его оптимальное распределение характеризуется согласованным в определенной пропорции и полным его расходованием.

Основной целью статьи является полное решение задачи оптимального распределения материального (в виде расходов «топлива» [2]) ресурса управления для системы двойных интеграторов. Кроме того, с учетом ограничений на энергетический и материальный ресурсы управления для этой же системы также рассматривается решение задач на быстродействие.

В настоящей части статьи ссылки на соотношения и формулы из [2] будут отмечаться звездочкой, например, (1.1*).

1. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВОЙНЫМ ИНТЕГРАТОРОМ ПО МИНИМУМУ РАСХОДА «ТОПЛИВА»

1.1. Предваряя решение задачи оптимального распределения материального ресурса – расхода «топлива» – между парой двойных интеграторов, вначале приведем решение задачи оптимального управления (1.6*), (1.7*), (1.9*). В этой задаче требуется найти оптимальное управление, минимизирующее на заданном интервале управления (при $T > T_{\min}$) функционал

$$J = \int_0^T |u|\,dt\,, \tag{1.1}$$

для двухточечной граничной задачи управления, а именно:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2\,; \quad \frac{dx_2}{dt} = u\,; \tag{1.2}$$

$$|u| \le m\,; \tag{1.3}$$

Горелов Юрий Николаевич, доктор технических наук, профессор, директор института проблем моделирования и управления (НИИ-310).
E-mail: yungor07@mail.ru

$$x_1(0) = x_{10}\ ;\ \ x_2(0) = x_{20}\ ;$$

$$x_1(T) = x_{1f}\ ;\ \ x_2(T) = x_{2f}\ , \qquad (1.4)$$

где m – максимально допустимое значение для управляющего воздействия u, а x_{10}, x_{20}, x_{1f} и x_{2f} – заданные параметры, определяющие цель совершаемого объектом управления (1.2) «маневра» за фиксированное время T. Функционал (1.1) здесь определяет суммарные затраты расходуемого «топлива» за время управления, а $|u(t)|$ – мгновенную скорость его расхода, необходимую для создания управляющего воздействия $u(t)$ ($\forall t \in [0, T]$).

1.2. Гамильтониан задачи оптимального управления (1.1) – (1.4) имеет вид [3, 4]:

$$H = -|u| + \psi_1 x_2 + \psi_2 u\ , \qquad (1.5)$$

где ψ_1, ψ_2 – сопряженные переменные, удовлетворяющие системе уравнений (2.9*):

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0\ ;\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1\,. \qquad (1.6)$$

Решение системы (1.6) имеет вид

$$\psi_1(t) = \psi_{10}\ ;\ \ \psi_2(t) = \psi_{20} - \psi_{10} t\ ;$$

$$(\forall t \in [0, T]), \qquad (1.7)$$

где ψ_{10}, ψ_{20} – начальные значения сопряженных переменных.

Из условия максимума гамильтониана задачи H (1.5) по управляющему параметру u получим следующую структуру оптимального управления:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} m, & \psi_2(t) > +1; \\ 0, & 1 < \psi_2(t) \le +1; \\ -m, & \psi_2(t) \le -1. \end{cases} \qquad (1.8)$$

В силу линейности функции $\psi_2(t)$ (1.7) программа управления (1.8) в общем случае тогда будет иметь вид

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} s_0 m, & t \in [0, t_1); \\ 0, & t \in [t_1, t_2); \\ -s_0 m, & t \in [t_2, T]. \end{cases} \qquad (1.9)$$

Отметим, что параметрами программы (1.8) являются значения ψ_{10} и ψ_{20}, а программы (1.9) – значения t_1, t_2 и $s_0 = \pm 1$.

Интегрируя систему (1.2) с учетом граничных условий (1.4) и программы (1.9), получим:

1) $x_1(t_1) = x_{11} = x_{10} + x_{20} t_1 + \frac{1}{2} s_0 m t_1^2$;

$$x_2(t_1) = x_{21} = x_{20} + s_0 m t_1\ ;$$

2) $x_1(t_2) = x_{12} = x_{11} + x_{21}(t_2 - t_1)$;

$$x_2(t_2) = x_{22} = x_{21}\ ;$$

3) $x_1(T) = x_{1f} = x_{12} + x_{22}(T - t_2) - \frac{1}{2} s_0 m (T - t_2)^2$;

$$x_2(T) = x_{2f} = x_{22} - s_0 m (T - t_2)\,.$$

Исключая здесь промежуточные значения переменных состояния x_{11}, x_{12}, x_{21} и x_{22}, получим

$$t_1 + t_2 = T + \frac{x_{2f} - x_{20}}{s_0 m}\,, \qquad (1.10)$$

а также

$$x_{1f} = x_{10} + x_{20} t_1 + \tfrac{1}{2} s_0 m t_1^2 +$$

$$+ (x_{20} + s_0 m t_1)(T - t_1) - \tfrac{1}{2} s_0 m (T - t_2)^2 =$$

$$= x_{10} + x_{20} T - \tfrac{1}{2} s_0 m t_1^2 + s_0 m t_1 T - \tfrac{1}{2} s_0 m (T - t_2)^2\,. \qquad (1.11)$$

С учетом (1.10) из (1.11) можно получить квадратные уравнения относительно t_1 или t_2, которые имеют идентичный вид, а именно: первое уравнение будет иметь вид

$$t_1^2 - \left(T + \frac{x_{2f} - x_{20}}{s_0 m}\right) t_1 + \frac{x_{1f} - x_{10} - x_{20} T}{s_0 m} +$$

$$+ \frac{(x_{2f} - x_{20})^2}{2 (s_0 m)^2} = 0\,, \qquad (1.12)$$

а второе получается из (1.12), соответственно, при замене t_1 на t_2.

Если обозначить: $t_1 + t_2 = a = T + \dfrac{x_{2f} - x_{20}}{s_0 m}$,

а $t_2 - t_1 = b \ge 0$, то отсюда получим

$$t_1 = \frac{1}{2}\left(T + \frac{x_{2f} - x_{20}}{s_0 m}\right) - \frac{1}{2} b\ ;$$

$$t_2 = \frac{1}{2}\left(T + \frac{x_{2f} - x_{20}}{s_0 m}\right) + \frac{1}{2} b\,,$$

где $b = \sqrt{D}$, а D – дискриминант уравнения (1.12), вычисляемый по формуле

$$D = T^2 + 2\frac{x_{2f} - x_{20}}{s_0 m} T - \frac{4(x_{1f} - x_{10} - x_{20} T)}{s_0 m} - \frac{(x_{2f} - x_{20})^2}{m^2}\,.$$

Если $D < 0$, то задача (1.1) – (1.4) не имеет решения, а при $D = 0$ – вырождается в задачу на быстродействие, когда $t_1 = t_2$, и, соответственно, $t_{1,2} = \dfrac{1}{2}\left(T_{\min} + \dfrac{x_{2f} - x_{20}}{s_0 m}\right)$. Значение s_0 определяется из условия $D \ge 0$. Для модельных наборов граничных условий (2.7*) и (2.8*) получим, соответственно:

а) для набора (2.7*):

$$t_{1,2} = \frac{1}{2}\left(T \pm \sqrt{T^2 - \frac{4 x_{1f}}{s_0 m}}\right), \text{ где } s_0 = \operatorname{sign} x_{1f}\ ;$$

б) для набора (2.8*):

$$t_{1,2} = \frac{1}{2}\left(T \pm \sqrt{T^2 + \frac{2x_{20}}{s_0 m}T + \frac{4x_{10}}{s_0 m} - \frac{x_{20}^{\ 2}}{m^2}} \right),$$

где $s_0 = -\operatorname{sign}(2mx_{10} + x_{20}\,|\,x_{20}\,|)$, если точка (x_{10}, x_{20}) находится в области достижимости начала фазовой плоскости для данного $T > T_{\min}$.

Отметим, что частные случаи реализации программы (1.9) связаны со следующими возможными вариантами выполнения условий: $0 \le t_1 \le t_2 \le T$, а именно:

1) $t_1 = 0$; $t_2 = T$, когда $\tilde{u}(t) \equiv 0$, $\forall t \in [0, T]$;

2) $0 < t_1 < t_2 = T$, когда $\tilde{u}(t) = s_0 m$, $\forall t \in [0, t_1)$ и $\tilde{u}(t) = 0$, $\forall t \in [0, T]$;

3) $t_1 = 0$; $0 < t_2 < T$, когда $\tilde{u}(t) = 0$, $\forall t \in [0, t_2)$ и $\tilde{u}(t) = s_0 m$, $\forall t \in [t_2, T]$,

и, наконец, в общем случае, когда в (1.9) выполняются условия $0 < t_1 < t_2 < T$.

2. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОГО РЕСУРСА УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ НЕЗАВИСИМЫХ ДВУКРАТНЫХ ИНТЕГРАТОРОВ

2.1. Рассмотрим на заданном интервале $[0, T]$ двухточечную граничную задачу для системы из двух независимых объектов управления суть двойных интеграторов (3.1*):

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \ \frac{dx_2}{dt} = u_1; \ \frac{dy_1}{dt} = y_2; \ \frac{dy_2}{dt} = u_2, \quad (2.1)$$

с граничными условиями общего вида:

$$\begin{aligned} &x_1(0) = x_{10}; \ \ x_2(0) = x_{20}; \\ &x_1(T) = x_{1f}; \ \ x_2(T) = x_{2f}; \\ &y_1(0) = y_{10}; \ \ y_2(0) = y_{20}; \\ &y_1(T) = y_{1f}; \ \ y_2(T) = y_{2f}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где x_{10}, x_{20}, x_{1f}, x_{2f}, y_{10}, y_{20}, y_{1f}, y_{2f} – некоторые заданные параметры, определяющие цели парциальных задач управления для (2.1);в (2.2) $T > \max\{T_{\min}^{(1)}, T_{\min}^{(2)}\}$, где $T_{\min}^{(1)}$ и $T_{\min}^{(2)}$ – соответствующие «сепаратные» быстродействия для (2.1). На управляющие параметры в (2.1) накладываются следующие ограничения:

$$u_1^2(t) \le m_1^2; \ \ u_2^2(t) \le m_2^2, \ \forall t \in [0, T], \quad (2.3)$$

где m_1 и m_2 – максимально возможные уровни управляющих воздействий. Ограничения (2.3) можно рассматривать в виде множеств допустимых управляющих воздействий [2]:

$$\boldsymbol{U}_1 = \{u_1 \in \boldsymbol{R} : |\,u_1\,| \le m_1\};$$

$$\boldsymbol{U}_2 = \{u_2 \in \boldsymbol{R} : |\,u_2\,| \le m_2\}.$$

Очевидно, что $\boldsymbol{U}_{12} = \boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2$ – прямоугольник в плоскости $\mathrm{O}u_1u_2$ с центром в ее начале.

Рассмотрим для (2.1) – (2.3) задачу оптимального управления, в которой требуется минимизировать функционал

$$J_0 = \int_0^T (\alpha_1\,|\,u_1\,| + \alpha_2\,|\,u_2\,|)\,dt, \quad (2.4)$$

где $\alpha_1 \ge 0$, $\alpha_2 \ge 0$ – весовые коэффициенты, определяющие приоритеты расхода ресурса управления (здесь – «топлива»), при дополнительном ограничении на скорость расходования ресурса, а именно:

$$\eta_1\,|\,u_1(t)\,| + \eta_2\,|\,u_2(t)\,| \le M_0, \ \forall t \in [0, T], \quad (2.5)$$

Управляющие параметры в (2.1) суть управляющие воздействия, которым в плоскости $\mathrm{O}u_1u_2$ согласно (2.3) отвечает множество их допустимых значений $\boldsymbol{U}_{12} = \boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2$ (см. п.3.1 [2]). В (2.4), (2.5) управляющие параметры характеризуют скорости расходования ресурса, то есть ограничения (2.3) и (2.5) здесь имеют различный физический смысл. Соответственно, в (2.5) M_0 – мгновенная максимальная скорость расхода ресурса, а коэффициенты $\eta_1 \ge 1$, $\eta_2 \ge 1$ учитывают его непроизводительные затраты при формировании управляющих воздействий в (2.1) [2]. Ограничение (2.5) задает множество $\boldsymbol{U}_M = \{(u_1, u_2) \in \boldsymbol{R}^2 : \ \eta_1\,|\,u_1\,| + \eta_2\,|\,u_2\,| \le M_0\}$, то есть $\boldsymbol{U}_M$ – ромбовидная область в плоскости $\mathrm{O}u_1u_2$ с центром в начале и с полудиагоналями, совмещенными с координатными осями и равными M_0/η_1 и M_0/η_2.

Если $\boldsymbol{U}_M \subseteq \boldsymbol{U}_{12}$, то ограничение $\boldsymbol{U}_M$ эффективное, а $\boldsymbol{U}_{12}$ – неэффективное, то есть последнее можно исключить из рассмотрения [2]. Если же $\boldsymbol{U}_{12} \subseteq \boldsymbol{U}_M$, то исключается $\boldsymbol{U}_M$ и решение задачи (2.1) – (2.5) в этом случае распадается на отдельные задачи, решение которых рассмотрено в п. 1.2.

В общем случае, при $(\boldsymbol{U}_{12} \cup \boldsymbol{U}_M)/(\boldsymbol{U}_{12} \cap \boldsymbol{U}_M) \ne \varnothing$ ограничения (2.3) и (2.5) эффективные.

2.2. Рассмотрим теперь задачу оптимального управления (2.1) – (2.5), гамильтониан которой имеет вид [3, 4]

$$\begin{aligned} H = {} & -\alpha_1\,|\,u_1\,| - \alpha_2\,|\,u_2\,| + \psi_1 x_2 + \\ & + \psi_2 u_1 + \psi_3 y_2 + \psi_4 u_2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где сопряженные переменные ψ_k, $k = 1, 2, 3, 4$, удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0; \ \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1;$$

$$\frac{d\psi_3}{dt}=0\,;\ \frac{d\psi_4}{dt}=-\psi_3\,, \qquad (2.7)$$

Для заданных ψ_{10}, ψ_{20}, ψ_{30} и Ψ_{20} можно получить следующие решения (2.7):

$$\psi_2(t)=\psi_{20}-\psi_{10}\,t\,;\ \psi_4(t)=\psi_{40}-\psi_{30}\,t\,. \quad (2.8)$$

Очевидно, что в случае $\boldsymbol{U}_{12}\subseteq\boldsymbol{U}_M$, когда из рассмотрения исключается ограничение (2.5), в соответствии с (1.8) максимум функции H (2.6) доставляется управляющими параметрами, для которых $\operatorname{sign}\tilde{u}_1=\operatorname{sign}\psi_2$ (при $|\psi_2|\ge\alpha_1$) и $\operatorname{sign}\tilde{u}_2=\operatorname{sign}\psi_4$ (при $|\psi_4|\ge\alpha_2$), или, что то же самое, когда программа оптимального управления имеет вид:

$$\tilde{u}_1(t)=\begin{cases} m_1\operatorname{sign}\psi_2(t), & |\psi_2(t)|\ge\alpha_1;\\ 0, & |\psi_2(t)|<\alpha_1;\end{cases}$$

$$\tilde{u}_2(t)=\begin{cases} m_2\operatorname{sign}\psi_4(t), & |\psi_4(t)|\ge\alpha_2;\\ 0, & |\psi_4(t)|<\alpha_2.\end{cases} \qquad (2.9)$$

Стало быть, если $\boldsymbol{U}_M$ неэффективно, то программа (2.9) реализует независимое оптимальное управление для соответствующих подсистем в (2.1).

Рассмотрим решение задачи, когда $\boldsymbol{U}_M\subseteq\boldsymbol{U}_{12}$, то есть когда исключаются ограничения (2.3). В этом случае максимум гамильтониана H (2.6) по u_1 и u_2 должен отыскиваться с учетом только ограничения (2.5). Итак, пусть $0<\xi\le 1$ – доля использования располагаемого ресурса управления (если $\xi=0$, то, очевидно, $u_1\equiv 0$ и $u_2\equiv 0$). Тогда, исходя из (2.5), введем следующие обозначения:

$$\rho=\frac{\eta_1|u_1|}{\xi M_0}\,;\ 1-\rho=\frac{\eta_2|u_2|}{\xi M_0}\,, \qquad (2.10)$$

где $0\le\rho\le 1$ – доля используемого ресурса для создания управляющего воздействия u_1; соответственно, оставшаяся доля, то есть $1-\rho$, предназначается для создания u_2. С учетом (2.10) из (2.6) получим

$$H=\xi M_0\Big[\rho(|\psi_2|-\alpha_1)/\eta_1+$$
$$+(1-\rho)(|\psi_4|-\alpha_2)/\eta_2\Big]+\psi_1 x_2+\psi_3 y_2\,. \ (2.11)$$

Введем функцию

$$K(\rho;\,\psi_2,\psi_4)=\rho(|\psi_2|-\alpha_1)/\eta_1+$$
$$+(1-\rho)(|\psi_4|-\alpha_2)/\eta_2\,, \qquad (2.12)$$

и перепишем (2.11) в следующем виде:

$$H=\xi M_0 K(\rho;\,\psi_2,\psi_4)+\psi_1 x_2+\psi_3 y_2\,. \ (2.13)$$

Из условия максимума гамильтониана H (2.6) по u_1 и u_2 из (2.13) с учетом (2.10) следует, что при любом значении $K<0$ должно быть $\xi=0$, то есть располагаемый ресурс управления в этом случае не используется и, стало быть, $\tilde{u}_1=0$ и $\tilde{u}_2=0$. Очевидно, что в данном случае это является следствием выполнения условий: $|\psi_2|<\alpha_1$; $|\psi_4|<\alpha_2$, то есть когда $(\psi_2,\psi_4)\in\boldsymbol{\Psi}_2\backslash\partial\boldsymbol{\Psi}_2$ и $(\psi_2,\psi_4)\in\boldsymbol{\Psi}_4\backslash\partial\boldsymbol{\Psi}_4$, где $\boldsymbol{\Psi}_2=\{(\psi_2,\psi_4):\,|\psi_2|\le\alpha_1;\,\psi_4\in\boldsymbol{R}^1\}$, $\boldsymbol{\Psi}_4=\{(\psi_2,\psi_4):\,\psi_2\in\boldsymbol{R}^1;\,|\psi_4|\le\alpha_2\}$ – множества (полосы) в плоскости $O\psi_2\psi_4$. Если же, к примеру, $\psi_2\in\partial\boldsymbol{\Psi}_2$, а $\psi_4\in\boldsymbol{\Psi}_4\backslash\partial\boldsymbol{\Psi}_4$, то $\max\limits_{\rho}K(\rho;\,\psi_2,\psi_4)=0$ при $\rho=1$. При этом максимум функции (2.13) достигается при любом $0\le\xi\le 1$, то есть с учетом (2.10) при $|\tilde{u}_1|=\xi M_0/\eta_1$ и $\tilde{u}_2=0$. Напротив, если $\psi_2\in\boldsymbol{\Psi}_2\backslash\partial\boldsymbol{\Psi}_2$ и $\psi_4\in\partial\boldsymbol{\Psi}_4$, то $\max\limits_{\rho}K(\rho;\,\psi_2,\psi_4)=0$ при $\rho=0$ и, соответственно, максимум функции (2.13) также будет достигаться при любом $0\le\xi\le 1$, то есть здесь $\tilde{u}_1=0$ и $|\tilde{u}_2|=\xi M_0/\eta_2$. Однако, учитывая линейность функций $\psi_2(t)$ и $\psi_4(t)$ (2.8), а также требование минимизации функционала (2.4), далее следует принять, что в том случае, когда $(\psi_2,\psi_4)\in\boldsymbol{\Psi}_{24}=\boldsymbol{\Psi}_2\bigcap\boldsymbol{\Psi}_4$, имеет место: $\tilde{u}_1=0\,;\ \tilde{u}_2=0$.

Рассмотрим далее условия максимума функции (2.13) для следующих сочетаний (ψ_2,ψ_4): 1) $(\psi_2,\psi_4)\in\boldsymbol{\Psi}_4\backslash\boldsymbol{\Psi}_{24}$; 2) $(\psi_2,\psi_4)\in\boldsymbol{\Psi}_2\backslash\boldsymbol{\Psi}_{24}$; 3) $(\psi_2,\psi_4)\in\boldsymbol{R}^2\backslash(\boldsymbol{\Psi}_2\bigcup\boldsymbol{\Psi}_4)=\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$.

В первом случае выполняются условия: $|\psi_2|>\alpha_1$; $|\psi_4|\le\alpha_2$. Тогда для функции (2.12) получим: $\max\limits_{\rho}K(\rho;\,\psi_2,\psi_4)=\dfrac{|\psi_2|-\alpha_1}{\eta_1}$ при $\rho=1$, и, стало быть, максимум функции (2.13) достигается при $\xi=1$. Поэтому оптимальные значения для управляющих параметров с учетом (2.10) вычисляются так: $|\tilde{u}_1|=M_0/\eta_1$ и $\tilde{u}_2=0$. Аналогично и для второго случая, в котором $|\psi_2|\le\alpha_1$; $|\psi_4|>\alpha_2$, получим $\rho=0$, $\xi=1$, а также $\tilde{u}_1=0$ и $|\tilde{u}_2|=M_0/\eta_2$. Таким образом, в этих случаях располагаемый ресурс управления используется полностью одним из объектов управления в системе (2.1).

В третьем из указанных выше случаев выполняются условия: $|\psi_2|>\alpha_1$; $|\psi_4|>\alpha_2$, то есть для любых $0\le\rho\le 1$ здесь $K>0$ и, соответственно, максимум этой функции по ρ будет определяться так:

$$\max_{\rho}K(\rho;\,\psi_2,\psi_4)=\begin{cases}(|\psi_2|-\alpha_1)/\eta_1,\\ (|\psi_4|-\alpha_2)/\eta_2,\end{cases} \qquad (2.14)$$

где $\chi = \eta_2(|\psi_2| - \alpha_1) - \eta_1(|\psi_4| - \alpha_2)$.

Если $\chi = 0$, то для любого $0 \le \rho \le 1$ получим

$$K = (|\psi_2| - \alpha_1)/\eta_1 = (|\psi_4| - \alpha_2)/\eta_2 > 0,$$

то есть в (2.13) должно быть $\xi = 1$. В связи с этим отметим, что здесь в силу допускаемого произвола в выборе ρ при $\chi = 0$ возможно существование особого оптимального управления [5], если только $\chi(t) = 0$, $\forall t \in (t_1, t_2) \subseteq [0, T]$. Последнее имеет место только для специальных наборов ψ_{10}, $\psi_{20}, \psi_{30}, \psi_{40}$ в (2.8), что возможно при задании соответствующих граничных условий (2.2), поэтому это требует отдельного рассмотрения.

Возвращаясь к анализу условия (2.14), отметим, что при $\chi = 0$ в плоскости $O\psi_2\psi_4$ задается соответствующее разбиение области $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$, в которой имеет место «конкуренция» за использование ресурса управления между подсистемами (2.1). В каждом квадранте $O\psi_2\psi_4$ уравнением $\chi(|\psi_2|, |\psi_4|) = 0$ задаются лучи L_k, $k = 1, 2, 3, 4$, с началами в точках $(\pm\alpha_1, \pm\alpha_2)$ (см. рис. 1; нумерация L_k ведется с положительного квадранта против часовой стрелки). Они делят $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$ на соответствующие подобласти, в которых либо $\chi > 0$, либо $\chi < 0$, и вместе с границей $\partial\boldsymbol{\Psi}_{24}$ задают соответствующую систему «линий переключения». Например, в положительном квадранте $O\psi_2\psi_4$: $\chi > 0$ в подобласти $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$ этого квадранта, примыкающей к области $\boldsymbol{\Psi}_4$; $\chi < 0$ в остальной ее части, примыкающей к $\boldsymbol{\Psi}_2$, а угол между лучом L_1 $\chi(\psi_2, \psi_4) = 0$ и осью $O\psi_2$ здесь равен $\operatorname{arctg}\dfrac{\eta_2}{\eta_1}$ (на рис. 1 принято $\eta_2 > \eta_1$; отметим, что здесь $L_1 \| L_3$ и $L_2 \| L_4$).

То же самое имеет место и в остальных квадрантах плоскости $O\psi_2\psi_4$, то есть и другие фрагменты $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$ также следует разделить аналогичным образом. Объединяя полученные части фрагментов $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$ с соответствующими фрагментами области $(\boldsymbol{\Psi}_2 \cup \boldsymbol{\Psi}_4) \setminus \boldsymbol{\Psi}_{24}$, в которых ненулевые значения управляющих параметров имеют одинаковые знаки, тогда получим, что плоскость $O\psi_2\psi_4$ будет разбита на пять областей, а именно: $\boldsymbol{\Psi}_{24}$; $\boldsymbol{\Psi}_2^{(+)}$; $\boldsymbol{\Psi}_2^{(-)}$; $\boldsymbol{\Psi}_4^{(+)}$; $\boldsymbol{\Psi}_4^{(-)}$. Соответственно, для $\boldsymbol{\Psi}_{24}$ оптимальные значения управляющих параметров нулевые и ресурс управления не используется, а в остальных случаях ресурс управления используется полностью и при этом оптимальные значения управляющих параметров определяются так: для $\boldsymbol{\Psi}_4^{(+)}$ – $\tilde{u}_1 = M_0/\eta_1$ и $\tilde{u}_2 = 0$; для $\boldsymbol{\Psi}_4^{(-)}$ – $\tilde{u}_1 = -M_0/\eta_1$ и $\tilde{u}_2 = 0$; для $\boldsymbol{\Psi}_2^{(+)}$ – $\tilde{u}_1 = 0$ и $\tilde{u}_2 = M_0/\eta_2$; для $\boldsymbol{\Psi}_2^{(-)}$ – $\tilde{u}_1 = 0$ и $\tilde{u}_2 = -M_0/\eta_2$.

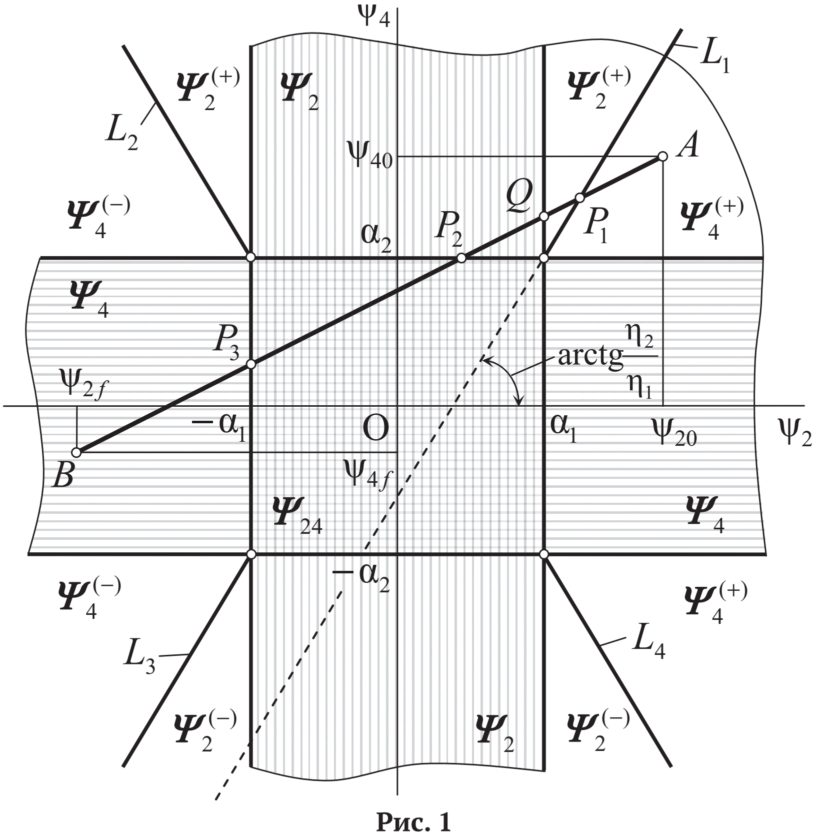

Рис. 1

И, наконец, рассмотрим случай $(\psi_2,\psi_4)\in\hat{\boldsymbol{\varnothing}}_{24}$, то есть когда $|\psi_2|>\alpha_1$ и $|\psi_4|>\alpha_2$. Здесь максимум функции (2.12) находится в соответствии с (2.14). Например, если для точки A (см. рис. 1, то есть для $(\psi_{20},\psi_{40})\in\boldsymbol{\varnothing}_4^{(+)}$) в (2.14) $\rho=1$, то $\max\limits_{\rho} K(\rho;\,\psi_2,\psi_4)=(|\psi_2|-\alpha_1)/\eta_1>0$. Но с учетом (2.10) и (2.15) тогда $\bar{u}_1=m_1\operatorname{sign}\psi_2$ и $\bar{\xi}=\eta_1 m_1/M_0<1$. Поскольку $|\psi_4|>\alpha_2$, постольку остаток располагаемого ресурса управления $M_0-\eta_1 m_1>0$ с учетом условия максимизации гамильтониана H (2.6) и по u_2 может быть использован и для создания управляющего воздействия $\bar{u}_2=\mu_2\operatorname{sign}\psi_4$, где $\mu_2=(M_0-\eta_1 m_1)/\eta_2$.

Итак, если $(\psi_2,\psi_4)\in\boldsymbol{\varnothing}_4^{(\pm)}$, то оптимальные значения управляющих параметров тогда определяются так: $\tilde{u}_1=m_1\operatorname{sign}\psi_2$; $\tilde{u}_2=\mu_2\operatorname{sign}\psi_4$; это отвечает точкам на отрезке $AP_1\subset AB$ (см. рис. 1). Переход на отрезок P_1Q, соответственно, означает, что в общем случае здесь $(\psi_2,\psi_4)\in\boldsymbol{\varnothing}_2^{(\pm)}$. Из (2.14) тогда получим $\rho=0$, а также $\bar{u}_2=m_2\operatorname{sign}\psi_4$ и $\bar{\xi}=\eta_2 m_2/M_0<1$. С учетом $|\psi_2|>\alpha_1$ остаток ресурса управления $M_0-\eta_2 m_2>0$ может быть использован для создания управляющего воздействия $\bar{u}_1=\mu_1\operatorname{sign}\psi_2$, где $\mu_1=(M_0-\eta_2 m_2)/\eta_1$. Поэтому, если $(\psi_2,\psi_4)\in\boldsymbol{\varnothing}_2^{(\pm)}$, то оптимальные значения управляющих параметров тогда определяются так: $\tilde{u}_1=\mu_1\operatorname{sign}\psi_2$; $\tilde{u}_2=m_2\operatorname{sign}\psi_4$. Таким образом, в случае $(\psi_2,\psi_4)\in\hat{\boldsymbol{\varnothing}}_{24}$ оптимальное управление отличается полным использованием располагаемого ресурса управления, а значения управляющих параметров находятся в точках конкатенации фрагментов границы множества $\boldsymbol{U}^*$.

3. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ В ЗАДАЧАХ НА БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАТОРОВ

3.1. Рассмотрим задачи на быстродействие для двухточечной граничной задачи (2.1) – (2.3) с учетом ограниченности энергетического или материального ресурса управления для системы из двух независимых объектов управления – двойных интеграторов.

Во-первых, это задача оптимального управления для (2.1) – (2.3), в которой требуется минимизировать длительность интервала управления T или, что то же самое, функционал

$$J=\int_0^T 1\,dt \qquad (3.1)$$

при наличии ограничения на скорость расходования энергетического ресурса, а именно [2]:

$$\eta_1 u_1^2(t)+\eta_2 u_2^2(t)\le 2E_0,\ \forall t\in[0,T], \qquad (3.2)$$

где E_0 – мгновенная максимальная мощность источника ресурса управления, а $\eta_1\ge 1$, $\eta_2\ge 1$ – коэффициенты, учитывающие непроизводительные затраты при формировании управляющих воздействий.

Во-вторых, это задача оптимального управления для (2.1) – (2.3), в которой требуется минимизировать (3.1) при наличии ограничения на скорость расходования материального ресурса (2.5):

$$\eta_1|u_1(t)|+\eta_2|u_2(t)|\le M_0,\ \forall t\in[0,T]. \qquad (3.3)$$

Как в [2] и выше ограничения (2.3) на управляющие параметры здесь представляются следующими множествами допустимых значений:

$$\boldsymbol{U}_1=\{u_1\in\mathbb{R}:|u_1|\le m_1\};$$

$$\boldsymbol{U}_2=\{u_2\in\mathbb{R}:|u_2|\le m_2\},$$

а также $\boldsymbol{U}_{12}=\boldsymbol{U}_1\bigcap\boldsymbol{U}_2$. Соответственно, ограничение (3.2) будет представлено множеством [2]

$$\boldsymbol{U}_E=\{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2:\ \eta_1 u_1^2+\eta_2 u_2^2\le 2E_0\},$$

а ограничение (3.3) – множеством (см. (2.5))

$$\boldsymbol{U}_M=\{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2:\ \eta_1|u_1|+\eta_2|u_2|\le M_0\}.$$

Кроме того, множества допустимых значений управляющих параметров в (2.1) и с учетом (3.2), (3.3) далее будут также рассматриваться в виде следующих пересечений: $\boldsymbol{U}_E^*=\boldsymbol{U}_{12}\bigcap\boldsymbol{U}_E$ и $\boldsymbol{U}_M^*=\boldsymbol{U}_{12}\bigcap\boldsymbol{U}_M$.

В связи с общей постановкой задачи распределения ресурса управления – энергетического или материального («топлива») – в [2] отметим, что сформулированные здесь задачи на быстродействие в определенной степени могут рассматриваться как задачи оптимального управления, в которых дополнительно требуется минимизировать расход ресурса управления еще одного вида, а именно, временного ресурса.

3.2. Решим задачу (2.1) – (2.3), (3.1), (3.2), предполагая вначале, что ограничения (2.3) не эффективны или, что то же самое, $\boldsymbol{U}_E\subseteq\boldsymbol{U}_{12}$. Применяя принцип максимума [3, 4], запишем гамильтониан задачи

$$H=-1+\psi_1 x_2+\psi_2 u_1+\psi_3 y_2+\psi_4 u_2, \qquad (3.4)$$

где сопряженные переменные ψ_k, $k=1,2,3,4$, удовлетворяющие системе уравнений (2.7).

С помощью метода множителей Лагранжа [6] найдем стационарную точку, в которой достигается максимум H (3.4) с учетом (3.2), для чего введем вспомогательную функцию

$$F=-1+\psi_1 x_2+\psi_2 u_1+\psi_3 y_2+$$
$$+\psi_4 u_2+\lambda(\eta_1 u_1^2+\eta_2 u_2^2-2E_0),$$

где λ – множитель Лагранжа. Исходя из необходимых условий максимума F по u_1 и u_2:

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}=\psi_2+2\lambda\eta_1 u_1=0;$$
$$\frac{\partial F}{\partial u_2}=\psi_4+2\lambda\eta_2 u_2=0,$$

то есть получим

$$\bar{u}_1=-\frac{\psi_2}{2\lambda\eta_1};\quad \bar{u}_2=-\frac{\psi_4}{2\lambda\eta_2}. \tag{3.5}$$

С учетом (3.5) далее получим

$$F(\lambda)=-1+\psi_1 x_2-\frac{\psi_2^2}{4\eta_1\lambda}+\psi_3 y_2-\frac{\psi_4^2}{4\eta_2\lambda}-2\lambda E_0,$$

а отсюда найдем

$$\lambda=-\frac{\sqrt{\psi_2^2/\eta_1+\psi_4^2/\eta_2}}{2\sqrt{2E_0}}<0,$$

где знак выбран так, чтобы выполнялись и достаточные условия максимума F по u_1 и u_2. Тогда из (3.5) получим следующие выражения для оптимальных значений управляющих параметров:

$$\tilde{u}_1=\sqrt{\frac{2E_0}{\eta_1}}\frac{\psi_2/\sqrt{\eta_1}}{\sqrt{\psi_2^2/\eta_1+\psi_4^2/\eta_2}};$$
$$\tilde{u}_2=\sqrt{\frac{2E_0}{\eta_2}}\frac{\psi_4/\sqrt{\eta_2}}{\sqrt{\psi_2^2/\eta_1+\psi_4^2/\eta_2}}. \tag{3.6}$$

Отсюда видно, что $\eta_1\tilde{u}_1^2+\eta_2\tilde{u}_2^2=2E_0$, то есть располагаемый ресурс управления расходуется в каждый момент времени в полном объеме. Кроме того, энергетический ресурс управления распределяется между подсистемами (2.1) во вполне определенной пропорции, а именно: $\frac{\tilde{u}_1}{\tilde{u}_2}=\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}}\frac{\psi_2}{\psi_4}$. Это отношение с учетом (2.8) есть дробно-линейная функция от t, которая определяется получаемыми начальными условиями для системы (2.7). В свою очередь, для найденных при решении соответствующих краевых задач [4] функций (2.8) – $\psi_2(t)$ и $\psi_4(t)$ из (3.6) получим программы оптимального управления $\tilde{u}_1(t)$ и $\tilde{u}_2(t)$, которые при учете ограничений (2.3) суть опорные программы управления [2].

Отметим еще, что для рассматриваемой задачи в силу условий принципа максимума для гамильтониана задачи (3.4) выполняется условие: $H(t)=0$, $\forall t\in[0,T]$ [3, 4], то есть здесь $H=-1+\psi_1 x_2+\psi_3 y_2+\sqrt{2E_0(\psi_2^2/\eta_1+\psi_4^2/\eta_2)}=0$ – доставляет дополнительные условия (при $t=0$ и $t=T$) при определении ψ_{10}, ψ_{20}, ψ_{30}, ψ_{40} и $T=T_{\min}$ для граничных условий (2.2).

Если же $\boldsymbol{U}_{12}\subseteq\boldsymbol{U}_E$, то не эффективны тогда ограничения (3.2) и, стало быть, реализуется независимое управление для подсистем в (2.1). При этом $T_{\min}=\max\{T_{\min}^{(1)},T_{\min}^{(2)}\}$, где $T_{\min}^{(1)}$ и $T_{\min}^{(2)}$ – «сепаратные» быстродействия для соответствующих парциальных задач управления (2.1), (2.2). Пусть $T_{\min}=T_{\min}^{(1)}>T_{\min}^{(2)}$. Тогда решение задачи для первой подсистемы в (2.1) сводится к задаче на быстродействие (см. п. 2.1 в [2]), а для второй подсистемы – к двухточечной граничной задаче с $T=T_{\min}^{(1)}$, в которой дополнительно можно потребовать, например, чтобы минимизировался суммарный расход энергии, то есть функционал (1.8*) (см. п. 2.2 [2]).

Пусть оба ограничения (2.3), (3.2) являются эффективными, тогда множество допустимых значений для управляющих параметров $\boldsymbol{U}_E^*=\boldsymbol{U}_{12}\cap\boldsymbol{U}_E$ и $(\boldsymbol{U}_{12}\cup\boldsymbol{U}_E)\setminus\boldsymbol{U}_E^*\neq\varnothing$. Если для текущих значений ψ_2 и ψ_4 в (3.6) выполняются условия: $|\tilde{u}_1|\le m_1$; $|\tilde{u}_2|\le m_2$, то значения (3.6) суть оптимальные управляющие параметры, то есть здесь $(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)\in\partial\boldsymbol{U}_E^*$. В том случае, когда в (3.6) имеет место, например: $|\tilde{u}_1|>m_1$; $|\tilde{u}_2|\le m_2$, то с учетом условия максимума H (3.4) по u_1 и u_2, а также ограничения (3.2), тогда получим:

$$\tilde{u}_1=m_1\operatorname{sign}\psi_2;$$
$$\tilde{u}_2=\sqrt{(2E_0-\eta_1 m_1^2)/\eta_2}\ \operatorname{sign}\psi_4, \tag{3.6а}$$

и, соответственно, в том случае, когда в (3.6) $|\tilde{u}_1|\le m_1$ и $|\tilde{u}_2|>m_2$:

$$\tilde{u}_1=\sqrt{(2E_0-\eta_2 m_2^2)/\eta_1}\ \operatorname{sign}\psi_2;$$
$$\tilde{u}_2=m_2\operatorname{sign}\psi_4, \tag{3.6б}$$

что отвечает полному использованию ресурса управления.

Таким образом, из полученного решения задачи (2.1) – (2.3), (3.1), (3.2) следует: во-первых, располагаемый ресурс управления в виде мгновенной мощности, расходуемой на создание управляющих воздействий в системе двойных интеграторов (2.1), используется в полном объеме; во-вторых, процесс оптимального управления с учетом (3.6) и (2.8) характеризуется согласованным распределением энергетического ресурса между независимыми объектами управления в системе (2.1) при решении соответствующих парциальных задач управления.

3.3. Рассмотрим теперь задачу на быстродействие (2.1) – (2.3), (3.1), (3.3), также вначале предполагая, что ограничения (2.3) не эффективны, а именно: $\boldsymbol{U}_M \subseteq \boldsymbol{U}_{12}$. Здесь, как и в п. 3.2, гамильтониан имеет вид (3.4), а сопряженные переменные – ψ_k, $k = 1, 2, 3, 4$, удовлетворяют системе уравнений (2.7).

Итак, воспользовавшись для решения задачи (2.1), (2.2), (3.1), (3.3) соотношениями (2.10), перепишем (3.4) здесь в следующем виде:

$$H = -1 + \psi_1 x_2 + \psi_3 y_2 + \xi M_0[\rho\,|\,\psi_2\,|\,/\eta_1 + \\ + (1-\rho)\,|\,\psi_4\,|\,/\eta_2], \qquad (3.7)$$

где в квадратных скобках записана функция $K = K_0$ (2.12) при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Таким образом, чтобы максимизировать функцию (3.7) по $0 \le \xi \le 1$ и $0 \le \rho \le 1$ требуется: во-первых, принять $\xi = 1$, то есть, чтобы располагаемый ресурс использовался полностью; во-вторых, выбирать ρ так:

$$\rho = \begin{cases} 1, & |\,\psi_2\,|\,/\eta_1 > |\,\psi_4\,|\,/\eta_2; \\ 0, & |\,\psi_2\,|\,/\eta_1 < |\,\psi_4\,|\,/\eta_2. \end{cases}$$

Для управляющих параметров, доставляющих максимум H (3.4), с учетом (2.10) получим

$$(\bar{u}_1; \bar{u}_2) = \begin{cases} \left((M_0/\eta_1)\operatorname{sign}\psi_2;\ 0\right), & |\,\psi_2\,|\,/\eta_1 > |\,\psi_4\,|\,/\eta_2; \\ \left(0;\ (M_0/\eta_2)\operatorname{sign}\psi_4\right), & |\,\psi_2\,|\,/\eta_1 < |\,\psi_4\,|\,/\eta_2. \end{cases} \qquad (3.8)$$

При $|\,\psi_2\,|\,/\eta_1 = |\,\psi_4\,|\,/\eta_2$ выбор значений управляющих параметров (3.8) произволен, что уже отмечалось в п. 2.2 в связи с возможностью возникновения особых оптимальных управлений [5]. В плоскости $\mathrm{O}\psi_2\psi_4$ проходящие через ее начало прямые $|\,\psi_2\,| = |\,\psi_4\,|\,\eta_1/\eta_2$ суть прямые, пересечение которых отрезком *AB* (см. также п. 2.1 и рис. 1) возможно не более двух раз, а их пересечение соответствующим (2.8) отрезком *AB* означает перемену в использовании ресурса для объектов управления (2.1), то есть в общем случае ресурс будет расходоваться объектами управления попеременно и в полном объеме.

Если $\boldsymbol{U}_{12} \subseteq \boldsymbol{U}_M$, то ограничения (3.3) не эффективны. В этом случае, как и в п. 3.2, будет реализовываться независимое управление подсистемами (2.1) и для $T_{\min} = T_{\min}^{(1)} > T_{\min}^{(2)}$ решение задачи сводится для первой подсистемы в (2.1) к задаче на быстродействие, а для второй – к двухточечной граничной задаче с $T = T_{\min}^{(1)}$, которую можно решать, например, на минимум суммарного расхода «топлива» для функционала (1.1) (см. п. 1.2).

Если ограничения (2.3), (3.2) эффективны, то есть допустимые значения управляющих параметров принадлежат множеству $\boldsymbol{U}_M^* = \boldsymbol{U}_{12} \cap \boldsymbol{U}_M$, для которого выполняется условие $(\boldsymbol{U}_{12} \cup \boldsymbol{U}_M) \setminus \boldsymbol{U}_M^* \ne \varnothing$. Стало быть, тогда выполняются условия (2.15), в том числе, хотя бы одно из ограничений (2.3) является эффективным, например, пусть далее $m_1 < M_0/\eta_1$.

Очевидно, что при $\psi_2^2 + \psi_4^2 > 0$ для всех $0 \le \rho \le 1$ имеет место: $K_0 > 0$, то есть в (3.7) тогда должно быть $\xi = 1$ или, что то же самое, ресурс управления должен быть использован полностью. Пусть $|\,\psi_2\,|\,/\eta_1 > |\,\psi_4\,|\,/\eta_2$, тогда в (3.7) должно быть $\rho = 1$, но $m_1 < M_0/\eta_1$, то есть для формирования $\bar{u}_1 = m_1 \operatorname{sign}\psi_2$ может быть использована только часть ресурса M_0, а его оставшаяся часть – с учетом условия максимума (3.4) по u_2 – для $\bar{u}_2 = \mu_2 \operatorname{sign}\psi_4$, где $\mu_2 = (M_0 - \eta_1 m_1)/\eta_2$. Таким образом, оптимальные значения управляющих параметров в рассмотренном случае будут равны:

$$\tilde{u}_1 = m_1 \operatorname{sign}\psi_2;\ \tilde{u}_2 = \mu_2 \operatorname{sign}\psi_4. \qquad (3.8а)$$

Так же находятся и оптимальные значения $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$, если эффективным является второе ограничение в (2.3), а именно:

$$\tilde{u}_1 = \mu_1 \operatorname{sign}\psi_2;\ \tilde{u}_2 = m_2 \operatorname{sign}\psi_4, \qquad (3.8б)$$

где $\mu_1 = (M_0 - \eta_2 m_2)/\eta_1$.

В конечном счете, по результатам решения задачи (2.1) – (2.3), (3.1), (3.3) следует: во-первых, располагаемый ресурс управления в виде скорости расходования «топлива» при создании управляющих воздействий в системе двойных интеграторов (2.1), используется в полном объеме; во-вторых, процесс оптимального управления с учетом (3.8) характеризуется согласованным распределением материального ресурса между независимыми объектами управления в системе (2.1) при решении соответствующих парциальных задач управления.

В целом для полученных решений задач на быстродействие следует отметить, что они характеризуются максимально возможным использованием ресурса управления независимо от его вида, но при этом сохраняется различие в использовании энергетического и материального ресурсов, а именно: в первом случае – согласованное и в определенной пропорции между объектами управления; во втором случае – попеременное и максимально возможное для одного из объектов управления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Следуя концепции физической теории управления А.А. Красовского [1], в [2] дана общая постановка задачи оптимального распределения единого физического ресурса управления между независимыми объектами управления. В качестве ресурсов управления, необходимых для создания управляющих воздействий, рассматриваются энергетический и материальный ресурсы управления в виде ограниченных скоростей их расходования, а именно: мгновенной мощности и максимальной скорости расхода «топлива». Рассмотрены задачи оптимального управления двойными интеграторами, для которых одновременно решаются двухточечные граничные задачи (с произвольными граничными условиями) или парциальные задачи управления с учетом имеющихся ограничений как на управляющие воздействия, так и на расходуемый на их создание единый ресурс управления. Последнее приводит к образованию системы из независимых объектов управления в силу необходимости распределения ресурса управления между ними при решении парциальных задач управления. Кроме того, для такой системы также приведено решение задач на быстродействие, которые можно рассматривать как пример оптимального распределения временного ресурса управления.

По результатам решения указанных задач здесь и в [2] выявлены следующие особенности оптимального распределения единого физического ресурса управления между независимыми объектами и соответствующими парциальными задачами управления. Во-первых, в задачах оптимального управления на минимум «энергии управления» в каждый момент времени расходуемый ресурс распределяется в определенной пропорции между парой двойных интеграторов, в том числе при эффективности ограничений на управляющие воздействия. Во-вторых, в задачах оптимального управления на минимум расхода материального ресурса – «топлива», скорость его расхода характекризуется попеременным использованием ресурса объектами управления в системе (2.1) при решении соответствующих парциальных задач управления. Соответственно, задачи управления на быстродействие при ограничениях на ресурсы управления любого вида характеризуются максимально возможным использованием ресурсов в системе для согласованного решения парциальных задач управления. Таким образом, наличие дополнительного ограничения на управляющие параметры независимых объектов управления в виде ограничений на расходуемый физический ресурс управления существенно влияет на его оптимальное распределение в зависимости от вида ресурса.

В заключение необходимо дополнительно отметить, что рассмотренные в статье задачи относятся не только к соответствующему классу задач физической теории управления как задачи оптимального распределения ресурса между независимыми процессами, но также к классу так называемых смешанных задач управления [7], где прямо отмечено, что при рассмотрении двух независимых задач: задачи программирования оптимальных траекторий и задачи синтеза (аналитического конструирования) законов обратной связи предполагается строгое разделение ресурсов управления на две части для решения этих независимых задач, но это деление носит волевой характер и не отвечает духу обеих вариационных задач оптимального управления (см. С.193-194 [7]). Отказ от такого волевого деления приводит к постановке смешанных задач, содержание и смысл которых, например, демонстрируется задачей о прилунении космического аппарата [7, 8]. Но то же самое в виде оптимизации распределения ресурса управления реализуется в рассмотренных здесь задачах оптимального управления, которые тем самым можно отнести также к классу смешанных задач управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский А.А.* Проблемы физической теории управления // Автоматика и телемеханика. 1990. № 11. С. 8-28.
2. *Горелов Ю.Н.* К задаче оптимального распределения ресурса в системе независимых объектов управления. I // Известия СамНЦ РАН. 2017. Т. 19. № 6. С. 156-167.
3. Математическая теория оптимальных процессов / *Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко*. М.: Наука, 1976. 392 с.
4. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука,1975. 528 с.
5. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.
6. *Бертсекас Д.* Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987. 400 с.
7. *Летов А.М.* Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981. 256 с.
8. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 360 с.

TO THE PROBLEM OF OPTIMAL RESOURCE ALLOCATION IN THE SYSTEM OF INDEPENDENT CONTROL OBJECTS. II

© 2017 Yu. N. Gorelov

Samara National Research University named after Academician S.P. Korolyov

We consider problems of optimal resource allocation for the system of two double integrators. For this system problem of optimal control with constraints on the rate of consumption of a material resource such as fuel was solved. In addition, problems of response time minimization for such system in the case of limiting the energy and material resources of management needed for create control actions was solved. The results of solving these problems identifies the main features of optimal resource allocation control depending on its type. It is noted, that the considered control problem can also be attributed to the class of the A. M. Letov mixed problems.
Keywords: control resource, optimal resource allocation, a system of independent control objects, double integrator, energy and material resource control, optimal control, performance

Yury Gorelov, Doctor of Technics, Director of Institute for Modeling and Control Sciences. E-mail: yungor07@mail.ru