УДК 629.195.1

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОРБИТАЛЬНОГО ТРЕХГРАННИКА

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва

Статья поступила в редакцию 22.02.2018

Выводятся соотношения для расчета кинематических характеристик орбитального трехгранника, моделирующего орбитальную систему координат космического аппарата. В их число включаются соотношения для компонент вектора углового ускорения, расчет которых встречает определенные затруднения из-за необходимости явного учета влияния на орбитальное движение космического аппарата возмущающих ускорений, обусловленных нецентральностью поля тяготения планеты и иными силами негравитационной природы.

Ключевые слова: орбитальная система координат, кинематические характеристики, орбитальный трехгранник

ВВЕДЕНИЕ

В практике навигационно-баллистического обеспечения полета космических аппаратов (КА) важную роль играют используемые системы координат. При решении отдельных задач необходимо знание кинематических характеристик для подвижных систем координат, к числу которых относится орбитальная система координат (ОСК) [1 – 4]. При движении КА в окрестности планеты знание кинематических характеристик вращательного движения его ОСК, например, по отношению к планетоцентрической системе координат в ряде случаев также имеет существенное значение. В случае орбитального движения вокруг Земли такой системой координат, как правило, является инерциальная (или абсолютная) геоцентрическая прямоугольная система координат [1] (далее – ИСК). Из задач, решение которых требует знания кинематических характеристик ОСК, отметим следующие: во-первых, это задачи сближения КА на орбите (с целью стыковки, инспекции или перехвата) [4]; во-вторых, задачи расчета кинематических характеристик линии визирования КА – объект исследования (другой КА, какой-либо объект на поверхности планеты, звезда и т.п.) либо в ОСК, либо в связанной с КА системой координат (при наведении подвижных антенных устройств или аппаратуры дистанционного зондирования КА) [5], и, наконец, это задачи, связанные с восстановлением (по измерениям бортовых акслерометров) поля бортовых квазистатических микроускорений [6].

Цель статьи – общее решение задачи расчета кинематических характеристик – компонент текущих угловых скоростей и ускорений – для ОСК.

Горелов Юрий Николаевич, доктор технических наук, профессор, директор института проблем моделирования и управления (НИИ-310). E-mail: yungor07@mail.ru

1. ОРБИТАЛЬНЫЙ ТРЕХГРАННИК

Как известно [1, 2], для построения ОСК необходимы параметры орбитального движения КА, а именно: $\boldsymbol{r}$ – текущий радиус-вектор центра масс КА в ИСК и $\boldsymbol{v}$ – его абсолютная скорость. В поле ньютонианского тяготения планеты движение центра масс КА описывается следующим векторным дифференциальным уравнением [1, 2]:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{\mu \boldsymbol{r}}{r^3} + \Delta \boldsymbol{w}, \qquad (1)$$

где $r = |\boldsymbol{r}|$ – расстояние между центрами масс КА и планеты, μ – гравитационный параметр планеты, а $\Delta\boldsymbol{w}$ – возмущающее ускорение, обусловленное нецентральностью поля тяготения планеты и иными силами негравитационной природы (сопротивление верхних слоев атмосферы планеты, тяга реактивных двигателей системы управления КА, давление солнечного света и т.п. [1]). Поэтому решение уравнения (1) – для заданных начальных условий: $\boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{v}(t_0) = \boldsymbol{v}_0$, где $d\boldsymbol{r}/dt = \boldsymbol{v}$, – в виде $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ доставляет для всех $t \ge t_0$ необходимые данные для построения ОСК.

Орбитальную систему координат – $\mathrm{O}\,x_0 y_0 z_0$, например, можно ввести следующим образом [2]: ОСК – прямоугольная система с началом в центре масс КА и с осью $\mathrm{O}\,x_0$, направленной по его радиус-вектору $\boldsymbol{r}$, ось $\mathrm{O}\,z_0$ направляется по вектору кинетического момента в абсолютном движении КА (пропорционального произведению $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$), то есть по нормали к мгновенной плоскости орбиты КА, а ось $\mathrm{O}\,y_0$ дополняет систему до правой и, стало быть, лежит в мгновенной плоскости орбиты КА и направлена в сторону его полета (случай $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=0$ не представляет практического интереса).

Используемые в практике навигационно-баллистического обеспечения полета КА ОСК иногда вводят и иным способом, учитывая те или иные особенности решаемых задач [3, 4]. Отличия обычно состоят только в том, что оси ОСК переименовываются и, быть может, для некоторых из них могут выбираться направления, противоположные указанным выше. Поэтому в общем случае в задаче определения кинематических характеристик ОСК удобно рассматривать движение так называемого орбитального трехгранника, формируемого в пространстве с помощью тройки ортов – $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\tau$ и $\boldsymbol{e}_n$, которые задаются следующим образом:

$$\boldsymbol{e}_r=\frac{\boldsymbol{r}}{r};\quad \boldsymbol{e}_n=\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|};\quad \boldsymbol{e}_\tau=\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{e}_r. \tag{2}$$

С помощью ортов (2) можно построить матрицу перехода (для векторов) от ОСК к ИСК – $\boldsymbol{P}^{\text{ИСК}}_{\text{ОСК}}$ и, наоборот, – от ИСК к ОСК, поскольку $\boldsymbol{P}^{\text{ОСК}}_{\text{ИСК}}=(\boldsymbol{P}^{\text{ИСК}}_{\text{ОСК}})^{-1}=(\boldsymbol{P}^{\text{ИСК}}_{\text{ОСК}})^{\text{T}}$ [7]; они имеют (с учетом принятого выше определения ОСК) следующий вид:

$$\boldsymbol{P}^{\text{ИСК}}_{\text{ОСК}}=\left[\,\boldsymbol{e}_r\,|\,\boldsymbol{e}_\tau\,|\,\boldsymbol{e}_n\right];\quad \boldsymbol{P}^{\text{ОСК}}_{\text{ИСК}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_r^{\text{T}}\\ \boldsymbol{e}_\tau^{\text{T}}\\ \boldsymbol{e}_n^{\text{T}}\end{bmatrix}; \tag{3}$$

Кинематические характеристики вращательного движения орбитального трехгранника суть параметры его текущей ориентации в ИСК, задаваемые в виде матриц перехода (3), а также параметры, связанные как с быстротой изменения ориентации этого трехгранника в пространстве: его мгновенной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{\text{ОСК}}(t)$, так и с быстротой изменения $\boldsymbol{\omega}_{\text{ОСК}}(t)$ – мгновенным угловым ускорением $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ОСК}}(t)$, которое определяется так [2]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ОСК}}(t)=\frac{d\boldsymbol{\omega}_{\text{ОСК}}(t)}{dt}. \tag{4}$$

Построение матриц (3) задает первую группу кинематических характеристик ОСК (в виде направляющих косинусов). Поэтому далее будут рассматриваться только задачи определения компонент вектора $\boldsymbol{\omega}_{\text{ОСК}}(t)$, что не представляет, вообще говоря, практических затруднений, и определения компонент вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ОСК}}(t)$. Следует отметить, что решение последней задачи оказывается нетривиальным, так как требует учета не только кинематических характеристик орбитального движения КА в виде $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$, но и структуры действующих на него возмущающих ускорений, поэтому основной целью настоящей статьи является получение соотношений для расчета компонент вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ОСК}}(t)$.

2. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ ОРБИТАЛЬНОГО ТРЕХГРАННИКА

Как известно [2], при задании в какой-либо подвижной системе координат некоторого постоянного вектора $\tilde{\boldsymbol{a}}$ (например, ортов орбитального трехгранника $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\tau$ или $\boldsymbol{e}_n$ в ОСК), для того же вектора в неподвижной системе координат (здесь в ИСК) имеет место: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{P}^{\text{ИСК}}_{\text{ОСК}}\tilde{\boldsymbol{a}}$; и, наоборот, $\tilde{\boldsymbol{a}}=(\boldsymbol{P}^{\text{ИСК}}_{\text{ОСК}})^{-1}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{P}^{\text{ОСК}}_{\text{ИСК}}\boldsymbol{a}$. Поэтому, находя абсолютную производную вектора $\boldsymbol{a}$, получим [2, 7]

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\dot{\boldsymbol{P}}^{\text{ИСК}}_{\text{ОСК}}(\boldsymbol{P}^{\text{ИСК}}_{\text{ОСК}})^{-1}\boldsymbol{a}. \tag{5}$$

где $\dot{\boldsymbol{P}}^{\text{ИСК}}_{\text{ОСК}}$ – производная по t от матрицы $\boldsymbol{P}^{\text{ИСК}}_{\text{ОСК}}$. С другой стороны, по формуле Эйлера [2] эта производная будет равна $\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\boldsymbol{\omega}_{\text{ОСК}}\times\boldsymbol{a}$ и, стало быть, из (5) следует, что имеет место:

$$\dot{\boldsymbol{P}}^{\text{ИСК}}_{\text{ОСК}}(\boldsymbol{P}^{\text{ИСК}}_{\text{ОСК}})^{-1}=\begin{bmatrix}0&-\omega_z&\omega_y\\ \omega_z&0&-\omega_x\\ -\omega_y&\omega_x&0\end{bmatrix}, \tag{6}$$

где ω_x, ω_y, ω_z – проекции вектора $\boldsymbol{\omega}_{\text{ОСК}}$ на оси ИСК. Соответственно, при проектировании $\boldsymbol{\omega}_{\text{ОСК}}$ на соответствующие оси орбитального трехгранника его компоненты будут обозначаться так: ω_r, ω_τ, ω_n. Так как согласно (3) $(\boldsymbol{P}^{\text{ИСК}}_{\text{ОСК}})^{-1}=\boldsymbol{P}^{\text{ОСК}}_{\text{ИСК}}$, то для определения компонент $\boldsymbol{\omega}_{\text{ОСК}}$ (в ИСК) достаточно вычислить матрицу $\dot{\boldsymbol{P}}^{\text{ИСК}}_{\text{ОСК}}=\left[\,\dot{\boldsymbol{e}}_r\,|\,\dot{\boldsymbol{e}}_\tau\,|\,\dot{\boldsymbol{e}}_n\right]$ или, что то же самое, абсолютные производные ортов орбитального трехгранника.

Поскольку $\boldsymbol{v}=v_r\boldsymbol{e}_r+v_\tau\boldsymbol{e}_\tau$, где $v_r=\dot{r}=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{r}$ – радиальная скорость, а $v_\tau=\left|\,\boldsymbol{e}_r\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{e}_r)\,\right|$ – трансверсальная скорость КА, то с учетом (2) получим

$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}\,r-\boldsymbol{r}\,\dot{r}}{r^2}=\frac{1}{r}\left[\,\boldsymbol{v}-\boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{v})\right]=\frac{v_\tau}{r}\,\boldsymbol{e}_\tau.$$

Учитывая далее, что $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ – вектор кинетического момента орбитального движения КА и $|\,\boldsymbol{c}\,|=c=r\,v_\tau$, из (2) получим $\boldsymbol{e}_n=\frac{\boldsymbol{c}}{c}$ и, стало быть, тогда $\frac{d\boldsymbol{e}_n}{dt}=\frac{\dot{\boldsymbol{c}}c-\boldsymbol{c}\dot{c}}{c^2}$, где $\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{w}$, а $\dfrac{dc}{dt}=\dfrac{\boldsymbol{c}}{c}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{c}}{dt}=\boldsymbol{e}_n\cdot\dfrac{d\boldsymbol{c}}{dt}$, то есть отсюда следует

$$\frac{d\boldsymbol{e}_n}{dt}=\frac{1}{c}\left\{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{w}-\boldsymbol{e}_n\left[\boldsymbol{e}_n\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{w})\right]\right\}.$$

Так как $\boldsymbol{w}=w_r\boldsymbol{e}_r+w_\tau\boldsymbol{e}_\tau+w_n\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{w}=w_\tau\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\tau+w_n\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_n=w_\tau\boldsymbol{e}_n-w_n\boldsymbol{e}_\tau$, то имеет место:

$$\frac{d\boldsymbol{e}_n}{dt}=-\frac{rw_n}{c}\boldsymbol{e}_\tau=-\frac{w_n}{v_\tau}\boldsymbol{e}_\tau.$$

Наконец, вычислим

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\tau}{dt}=\frac{d(\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{e}_r)}{dt}=\frac{d\boldsymbol{e}_n}{dt}\times\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{e}_n\times\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}.$$

Отсюда, учитывая полученные выше выражения для производных ортов $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_n$, имеем

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\tau}{dt}=-\frac{w_n}{v_\tau}\boldsymbol{e}_\tau\times\boldsymbol{e}_r+\frac{v_\tau}{r}\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{e}_\tau=\frac{w_n}{v_\tau}\boldsymbol{e}_n-\frac{v_\tau}{r}\boldsymbol{e}_r.$$

Таким образом, получены следующие выражения для производных ортов орбитального трехгранника:

$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}=\frac{v_\tau}{r}\boldsymbol{e}_\tau;\quad \frac{d\boldsymbol{e}_\tau}{dt}=\frac{w_n}{v_\tau}\boldsymbol{e}_n-\frac{v_\tau}{r}\boldsymbol{e}_r;$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_n}{dt}=-\frac{w_n}{v_\tau}\boldsymbol{e}_\tau. \qquad (7)$$

С учетом (7) матрицу (6) теперь можно записать в явном виде:

$$\dot{\boldsymbol{P}}_{\text{ОСК}}^{\text{ИСК}}(\boldsymbol{P}_{\text{ОСК}}^{\text{ИСК}})^{-1}=\left[\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}\;\middle|\;\frac{d\boldsymbol{e}_\tau}{dt}\;\middle|\;\frac{d\boldsymbol{e}_n}{dt}\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_r^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{v_\tau}{r}(\boldsymbol{e}_\tau\boldsymbol{e}_r^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}})+\frac{w_n}{v_\tau}(\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_\tau\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}).$$

С учетом (5), (6) и формулы Эйлера для некоторого постоянного в ОСК вектора $\boldsymbol{a}$ отсюда непосредственно следует $\boldsymbol{\omega}_{\text{ОСК}}\times\boldsymbol{a}=\left[\dfrac{v_\tau}{r}(\boldsymbol{e}_\tau\boldsymbol{e}_r^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}})+\dfrac{w_n}{v_\tau}(\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_\tau\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}})\right]\boldsymbol{a}$.

Учитывая, что $\boldsymbol{e}_r=\begin{bmatrix}e_{rx}\\ e_{ry}\\ e_{rz}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_\tau=\begin{bmatrix}e_{\tau x}\\ e_{\tau y}\\ e_{\tau z}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_n=\begin{bmatrix}e_{nx}\\ e_{ny}\\ e_{nz}\end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\tau=\begin{bmatrix}e_{ry}e_{\tau z}-e_{rz}e_{\tau y}\\ e_{rz}e_{\tau x}-e_{rx}e_{\tau z}\\ e_{rx}e_{\tau y}-e_{ry}e_{\tau x}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_\tau\times\boldsymbol{e}_n=\begin{bmatrix}e_{\tau y}e_{nz}-e_{\tau z}e_{ny}\\ e_{\tau z}e_{nx}-e_{\tau x}e_{nz}\\ e_{\tau x}e_{ny}-e_{\tau y}e_{nx}\end{bmatrix},$$

и раскрывая в этом выражении диадные произведения ортов, получим [7]

$$\boldsymbol{e}_\tau\boldsymbol{e}_r^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & -(\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\tau)_z & (\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\tau)_y\\ (\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\tau)_z & 0 & -(\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\tau)_x\\ -(\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\tau)_y & (\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\tau)_x & 0\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_\tau^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_\tau\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & -(\boldsymbol{e}_\tau\times\boldsymbol{e}_n)_z & (\boldsymbol{e}_\tau\times\boldsymbol{e}_n)_y\\ (\boldsymbol{e}_\tau\times\boldsymbol{e}_n)_z & 0 & -(\boldsymbol{e}_\tau\times\boldsymbol{e}_n)_x\\ -(\boldsymbol{e}_\tau\times\boldsymbol{e}_n)_y & (\boldsymbol{e}_\tau\times\boldsymbol{e}_n)_x & 0\end{bmatrix}.$$

Поскольку отсюда найдем $\boldsymbol{\omega}_{\text{ОСК}}=\dfrac{v_\tau}{r}\,\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\tau+\dfrac{w_n}{v_\tau}\,\boldsymbol{e}_\tau\times\boldsymbol{e}_n$, постольку вектор угловой скорости ОСК будет определяться так:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{ОСК}}=\frac{v_\tau}{r}\,\boldsymbol{e}_n+\frac{w_n}{v_\tau}\,\boldsymbol{e}_r. \qquad (8)$$

а его проекции на оси ИСК, соответственно, вычисляются по формулам:

$$\omega_x=\frac{v_\tau}{r}e_{nx}+\frac{w_n}{v_\tau}e_{rx};\ \omega_y=\frac{v_\tau}{r}e_{ny}+\frac{w_n}{v_\tau}e_{ry};$$

$$\omega_z=\frac{v_\tau}{r}e_{nz}+\frac{w_n}{v_\tau}e_{rz}. \qquad (9)$$

Проектируя вектор $\boldsymbol{\omega}_{\text{ОСК}}$ (8) на оси орбитального трехгранника, также получим

$$\omega_r^{\text{ОСК}}=\frac{w_n}{v_\tau};\ \omega_\tau^{\text{ОСК}}=0;\ \omega_n^{\text{ОСК}}=\frac{v_\tau}{r}. \qquad (10)$$

Отметим, что в (8) – (10) $w_n=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{w}$, где $\boldsymbol{w}=-\dfrac{\mu\boldsymbol{r}}{r^3}+\Delta\boldsymbol{w}$. Следовательно, $w_n=\boldsymbol{e}_n\cdot\Delta\boldsymbol{w}$, где $\Delta\boldsymbol{w}$ – вектор возмущающих ускорений в уравнении движения КА (1), то есть на угловую скорость вращения ОСК вокруг радиус-вектора КА $\boldsymbol{r}$ оказывают влияние возмущающие ускорения, возникающие из-за нецентральности поля тяготения планеты, а также ускорения, связанные с наличием сил негравитационной природы, включая тягу реактивных двигателей системы управления КА [1, 4].

3. УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ ОРБИТАЛЬНОГО ТРЕХГРАННИКА

По определению (4) угловое ускорение орбитального трехгранника равно

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ОСК}}(t)=\frac{d\boldsymbol{\omega}_{\text{ОСК}}(t)}{dt}.$$

Поэтому для вычисления $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ОСК}}(t)$ продифференцируем выражение для $\boldsymbol{\omega}_{\text{ОСК}}$ (8), а именно:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_{\text{ОСК}}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{v_\tau}{r}\right)\boldsymbol{e}_n+\frac{v_\tau}{r}\frac{d\boldsymbol{e}_n}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{w_n}{v_\tau}\right)\boldsymbol{e}_r+\frac{w_n}{v_\tau}\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}.$$

Однако, с учетом (7) нетрудно установить, что здесь второй и четвертый члены в правой части сокращаются. Поэтому далее необходимо вычислить только следующие производные:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v_\tau}{r}\right)=\frac{\dot{v}_\tau r-v_\tau\dot{r}}{r^2}\,;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{w_n}{v_\tau}\right)=\frac{\dot{w}_n v_\tau-w_n\dot{v}_\tau}{v_\tau^2}.$$

Поскольку здесь $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ОСК}}=\varepsilon_n^{\text{ОСК}}\boldsymbol{e}_n+\varepsilon_r^{\text{ОСК}}\boldsymbol{e}_r$ и $\varepsilon_\tau^{\text{ОСК}}=0$, то с учетом приведенных выражений для производных получим

$$\varepsilon_r^{\text{ОСК}}=\frac{\dot{w}_n v_\tau-w_n\dot{v}_\tau}{v_\tau^2},\quad \varepsilon_n^{\text{ОСК}}=\frac{\dot{v}_\tau r-v_\tau\dot{r}}{r^2}. \quad (11)$$

Отсюда видно, что для вычисления тождественно ненулевых компонент $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ОСК}}$ (11) также необходимо указать выражения и для производных $\dot{v}_\tau$ и $\dot{w}_n$. В связи с этим вначале найдем производные $\dot{v}_r$, $\dot{v}_\tau$, вычисляя $\boldsymbol{w}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d(v_r\boldsymbol{e}_r+v_\tau\boldsymbol{e}_\tau)}{dt}$. С учетом (7) получим

$$\boldsymbol{w}=\dot{v}_r\boldsymbol{e}_r+v_r\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}+\dot{v}_\tau\boldsymbol{e}_\tau+v_\tau\frac{d\boldsymbol{e}_\tau}{dt}=$$

$$=\dot{v}_r\boldsymbol{e}_r+\dot{v}_\tau\boldsymbol{e}_\tau+\frac{v_r v_\tau}{r}\boldsymbol{e}_\tau+w_n\boldsymbol{e}_n-\frac{v_\tau^2}{r}\boldsymbol{e}_r.$$

Сгруппировав здесь соответствующим образом члены, определим $w_r=\dot{v}_r-\frac{v_\tau^2}{r}$, $w_\tau=\dot{v}_\tau+\frac{v_r v_\tau}{r}$, то есть отсюда следует

$$\dot{v}_r=w_r+\frac{v_\tau^2}{r}\,;\quad \dot{v}_\tau=w_\tau-\frac{v_r v_\tau}{r}. \quad (12)$$

Далее, чтобы найти выражение для вычисления $\dot{w}_n$, продифференцируем $\boldsymbol{w}=w_r\boldsymbol{e}_r+w_\tau\boldsymbol{e}_\tau+w_n\boldsymbol{e}_n$, а именно:

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}=\boldsymbol{q}=\dot{w}_r\boldsymbol{e}_r+\dot{w}_\tau\boldsymbol{e}_\tau+\dot{w}_n\boldsymbol{e}_n+$$

$$+w_r\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}+w_\tau\frac{d\boldsymbol{e}_\tau}{dt}+w_n\frac{d\boldsymbol{e}_n}{dt}.$$

Умножая скалярно полученное выражение на $\boldsymbol{e}_n$ с учетом (7), получим $q_n=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{q}=\dot{w}_n+\frac{w_\tau w_n}{v_\tau}$, то есть отсюда получим искомое выражение для $\dot{w}_n$:

$$\dot{w}_n=q_n-\frac{w_\tau w_n}{v_\tau}. \quad (13)$$

Итак, подставив (12), (13) в (11), получим следующие выражения для проекций вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ОСК}}$:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_r^{\text{ОСК}}=\frac{1}{v_\tau}\left(q_n-\frac{2w_\tau w_n}{v_\tau}+\frac{v_r w_n}{r}\right);\\ &\varepsilon_\tau^{\text{ОСК}}=0\,;\quad \varepsilon_n^{\text{ОСК}}=\frac{1}{r}\left(w_\tau-\frac{2v_r v_\tau}{r}\right).\end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, получены все кинематические характеристики ОСК. Соотношения для компонент угловых ускорений ОСК (14) характеризуются влиянием на их значения перечислявшихся выше возмущающих сил. Особенностью соотношений (14) является то, что помимо влияния возмущающих ускорений, обусловленного компонентами $w_\tau=\boldsymbol{e}_\tau\cdot\Delta\boldsymbol{w}$ и $w_n=\boldsymbol{e}_n\cdot\Delta\boldsymbol{w}$, на величину $\varepsilon_r^{\text{ОСК}}$ также влияет компонента $q_n=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{q}=\boldsymbol{e}_n\cdot\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}$, что связано со скоростью изменения ускорения начала орбитального трехгранника, помещаемого в центр масс КА. Учет влияния q_n может быть существенным при решении задач о сближении КА [4].

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОРБИТАЛЬНОГО ТРЕХГРАННИКА

При вычислении компонент углового ускорения орбитального трехгранника $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ОСК}}$ (14), как это было отмечено выше, необходимо знание производной вектора абсолютного ускорения $\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}=\boldsymbol{q}$ (в ИСК). Очевидно, что ее можно определить, если задать ускорение центра масс КА, исходя из уравнений его орбитального движения (1).

Итак, перепишем уравнение (1) в виде

$$\boldsymbol{w}=-\frac{\mu}{r^2}\boldsymbol{e}_r+\Delta\boldsymbol{w},$$

где $\Delta\boldsymbol{w}$ – возмущающее ускорение, задаваемое в соответствии с принятой математической моделью орбитального движения КА. Поскольку в общем случае в составе $\Delta\boldsymbol{w}$ возможно наличие управляющих ускорений, постольку далее примем

$$\Delta\boldsymbol{w}=\Delta\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})+\boldsymbol{p}(t), \quad (15)$$

где $\boldsymbol{p}(t)$ – вектор управляющих ускорений, а $\Delta\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$ – вектор остальных возмущающих ускорений, учитываемых в модели орбитального движения КА. Выбор последней зависит от класса орбиты КА и требуемой точности моделирования движения его центра масс [1]. Следует отметить, что в общем случае $\Delta\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$ может зависеть и от текущей ориентации КА и, стало быть, от текущего времени t при задании некоторой программы углового движения КА. Последнее при исключении из рассмотрения аэродинамических сил (например, в силу их малости на высоких орбитах), как правило, не будет иметь заметного влияния на решение рассматриваемых здесь задач. Поэтому с учетом (15) абсолютное ускорение центра масс КА далее запишем в следующем виде:

$$\boldsymbol{w} = -\frac{\mu}{r^2}\boldsymbol{e}_r + \Delta\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{p}(t), \qquad (16)$$

и, дифференцируя затем (16), получим

$$\boldsymbol{q} = \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = -\mu\frac{\dot{\boldsymbol{e}}_r r - 2\boldsymbol{e}_r\dot{r}}{r^3} +$$

$$+\frac{\partial\Delta\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})}{\partial\boldsymbol{r}}\boldsymbol{v} + \frac{\partial\Delta\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})}{\partial\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} + \frac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt}. \qquad (17)$$

Строки матриц $\boldsymbol{G}_r = \frac{\partial\Delta\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})}{\partial\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{G}_v = \frac{\partial\Delta\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})}{\partial\boldsymbol{v}}$ суть соответствующие градиенты компонент вектора $\Delta\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$. Поскольку в (17)

$$\frac{\dot{\boldsymbol{e}}_r r - 2\boldsymbol{e}_r\dot{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3}\left(v_\tau\boldsymbol{e}_\tau - 2v_r\boldsymbol{e}_r\right) = \frac{1}{r^3}\left(\boldsymbol{v} - 3v_r\boldsymbol{e}_r\right),$$

то первое слагаемое в правой части (17) – вектор, ортогональный орту $\boldsymbol{e}_n$. Следовательно, $q_n = \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{q}$ в (14) определяется следующим выражением:

$$q_n = \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_r\boldsymbol{v} + \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_v\boldsymbol{w} + \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{p}}(t), \qquad (18)$$

Сложность вычисления матриц $\boldsymbol{G}_r$ и $\boldsymbol{G}_v$ в (16) непосредственно связана со сложностью принятой модели орбитального движения КА и при численном моделировании параметров движения его центра масс наиболее рациональным подходом к вычислению q_n согласно (18) является вычисление матриц $\boldsymbol{G}_r(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$ и $\boldsymbol{G}_v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$ в процессе численного интегрирования уравнений движения КА (1). То же самое относится и к вычислению производной $\dot{\boldsymbol{p}}(t)$. При этом элементы матриц $\boldsymbol{G}_r(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$ и $\boldsymbol{G}_v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$ можно определять только на начало каждого шага интегрирования уравнений движения КА как соответствующие вариации компонент вектора $\Delta\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$ для специально задаваемых приращений $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье приведены соотношения для расчета кинематических характеристик моделирующего орбитальную систему координат орбитального трехгранника, к которым относятся компоненты векторов угловых скоростей и ускорений. Если при этом начало ОСК совмещается с центром масс КА, на который действуют силы, обусловленные как нецентральностью поля тяготения планеты, так и иными силами негравитационной природы, включая управляющие, то расчет кинематических характеристик ОСК имеет определенные особенности, связанные с необходимостью явного учета производных от абсолютного ускорения центра масс КА в силу принятой для него математической модели орбитального движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы теории полета космических аппаратов [под ред. Г.С. Нариманова и М.К. Тихонравова]. М.: Машиностроение, 1972. 608 с.
2. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 416 с.
3. *Разыграев А.П.* Основы управления полетом космических аппаратов и кораблей. М.: Машиностроение, 1977. 472 с.
4. *Балахонцев В.Г., Иванов В.А., Шабанов В.И.* Сближение в космосе. М.: Воениздат, 1973. 240 с.
5. *Горелов Ю.Н., Горелова О.И., Мантуров А.И.* Моделирование кинематических характеристик управляемой подвижной антенны космического аппарата // Управление движением и навигация летательных аппаратов: Сб. тр. XI Всерос. научн.-техн. семинара по управ. движением и навигации летательных аппаратов. Самара, 2003. С. 68-73.
6. *Горелов Ю.Н., Данилов С.Б.* Основные характеристики и структура поля бортовых квазистатических микроускорений космического аппарата // Вестник Самарского гос. ун-та. Естественнонаучная серия. 2003. 2-й спецвыпуск. С. 220-231.
7. *Стражева И.В., Мелкумов В.С.* Векторно-матричные методы в механике полета. М.: Машиностроение, 1973. 260 с.

KINEMATIC CHARACTERISTICS OF THE ORBITAL TRIHEDRON

Samara National Research University named after academician S.P. Korolyov

The relations for calculating the kinematic characteristics of the orbital trihedron modeling the orbital coordinate system of the spacecraft are derived. These include relations for the components of the angular acceleration vector, the calculation of which meets certain difficulties due to the need to take into account the influence of disturbing accelerations on the orbital motion of the spacecraft, caused by the non-centrality of the planet's gravity field and other forces of non-gravitational nature.

Keywords: the orbital coordinate system, kinematic characteristic, orbital trihedron.

Yury Gorelov, Doctor of Technics, Professor, Director of Institute for Modeling and Control Sciences.
E-mail: yungor07@mail.ru