

УДК 533.5 : 533.72

## МОДИФИКАЦИЯ TVD СХЕМЫ ДЛЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

© 2018 В.В. Никонов

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва

Статья поступила в редакцию 16.05.2018

В статье решается задача прямого численного моделирования движения одномерной ударной волны с помощью TVD схемы решения уравнений Эйлера. Показано, что в случае отрицательной скорости движения ударной волны схема имеет большую численную диффузию. Схема была модифицирована путем введения зеркального отражения потока относительно ее центрального узла для передачи данных в подпрограмму расчета и повторного отражения при получении результатов. Результаты моделирования сравниваются с точным решением Годунова задачи о распаде разрыва. Результаты, полученные с помощью модифицированной TVD схемы для отрицательной скорости движения ударной волны, практически совпадают по точности с результатами исходной TVD схемы для положительной скорости движения ударной волны. Таким образом, точность схемы сохраняется.

*Ключевые слова:* газ, ударная волна, прямое моделирование, численное моделирование, схема TVD, одномерное течение.

### ВВЕДЕНИЕ

Актуальной проблемой при численном моделировании сверхзвуковых течений газа является корректное воспроизведение движения ударных волн. В настоящее время для расчета таких течений широко используются методы, построенные на так называемых TVD схемах [1, 2] решения уравнений Эйлера для сжимаемого невязкого газа. Одним из недостатков данных методов является наличие численной вязкости, приводящей к размазыванию фронтов ударных волн. В работах [1, 2] предлагаются схемы TVD второго порядка точности, имеющие существенно меньшую численную вязкость по сравнению со схемами первого порядка точности. Однако предложенные схемы не сохраняют точность при смене направления движения ударной волны. В данной работе рассматривается модификация TVD схемы, предложенной в работе [2], как имеющей немного меньшую численную вязкость на ударной волне, хотя с помощью данного подхода можно модифицировать и схему из работы [1].

### 1. ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА МЕТОДА

Запишем уравнения Эйлера движения сжимаемого вязкого газа в потоковой форме [1]

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

*Никонов Валерий Владимирович, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры конструкции и проектирования летательных аппаратов.  
E-mail: v\_nikonov@mail.ru*

Здесь

$$w = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ E \end{pmatrix}, \quad f(w) = uw + \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ pu \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $u$  – скорость,  $\rho$  – плотность,  $m = \rho u$  – импульс,  $E$  – полная удельная энергия,  $p$  – давление,  $x$  – координата,  $t$  – время.

Система уравнений (1) замыкается с помощью уравнения состояния для идеального газа

$$p = (\kappa - 1)\rho(E - \frac{1}{2}\rho u^2), \quad (3)$$

где  $\kappa$  – показатель адиабаты, для воздуха  $\kappa = 1.4$ .

Собственные значения матрицы Якобиана

$$A(w) = \frac{\partial f(w)}{\partial w} \quad (4)$$

определяются, как

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c, \quad (5)$$

где  $c$  – скорость звука:

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} \quad (6)$$

Соответствующие правые собственные векторы находятся следующим образом

$$R_1(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \\ H - uc \end{pmatrix}, \quad R_2(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$R_3(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \\ H + uc \end{pmatrix},$$

где  $H$  – полная энтальпия:

$$H = (E + p) / \rho = c^2 / (\kappa - 1) + \frac{1}{2} u^2.$$

Введем следующие обозначения для конечных разностей

$$[b] = b_{j+1} - b_j, \quad (8)$$

и средних величин

$$\langle b \rangle = \frac{1}{2} (b_j + b_{j+1}). \quad (9)$$

Тогда мы можем записать левые собственные векторы-строки  $L^i$ , умноженные на вектор столбец конечных разностей переменных (2), в следующем виде

$$\begin{aligned} \alpha^1_{j+\frac{1}{2}} &= L^1_{\Delta} w_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (C_1 - C_2), \\ \alpha^2_{j+\frac{1}{2}} &= L^2_{\Delta} w_{j+\frac{1}{2}} = [\rho] - C_1, \\ \alpha^3_{j+\frac{1}{2}} &= L^3_{\Delta} w_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (C_1 + C_2), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= (\kappa - 1) \left( [E] + \frac{1}{2} u^* [\rho] - u^* [m] \right) / c^{*2}, \\ C_2 &= ([m] - u^* [\rho]) / c^*. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь используется осреднение по Roe [1, 3]:

$$u^*_{j+\frac{1}{2}} = \langle \sqrt{\rho} u \rangle / \langle \sqrt{\rho} \rangle, \quad (12)$$

$$H^*_{j+\frac{1}{2}} = \langle \sqrt{\rho} H \rangle / \langle \sqrt{\rho} \rangle, \quad (13)$$

$$c^*_{j+\frac{1}{2}} = \sqrt{(\kappa - 1) (H^*_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} u^*_{j+\frac{1}{2}}{}^2)}. \quad (14)$$

TVD схема согласно [2] описывается следующими формулами:

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (f^*_{j+\frac{1}{2}} - f^*_{j-\frac{1}{2}}), \quad (15)$$

$$f^*_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f(w_j) + f(w_{j+1}) - d_{j+\frac{1}{2}}), \quad (16)$$

$$d_{j+\frac{1}{2}} = \frac{2 \Delta x}{\Delta t} \sum_{k=1}^3 \beta_{j+\frac{1}{2}}^k R_{j+\frac{1}{2}}^k, \quad (17)$$

$$\beta_{j+\frac{1}{2}}^k = Q(v_{j+\frac{1}{2}}^k + \gamma_{j+\frac{1}{2}}^k) \alpha_{j+\frac{1}{2}}^k - (g_j^k + g_{j+1}^k), \quad (18)$$

$$v_{j+\frac{1}{2}}^k = \frac{\Delta t}{2 \Delta x} \lambda_k(w_{j+\frac{1}{2}}), \quad (19)$$

с ограничителем значения функции:

$$g_j^k = s_{j+\frac{1}{2}}^k \max[0, \min(|\alpha_{j+\frac{1}{2}}^k|, \alpha_{j-\frac{1}{2}}^k s_{j+\frac{1}{2}}^k)] / 8, \quad (20)$$

где

$$s_{j+\frac{1}{2}}^k = \text{sign}(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^k), \quad (21)$$

$$\gamma_{j+\frac{1}{2}}^k = \begin{cases} (g_{j+\frac{1}{2}}^k - g_j^k) / \alpha_{j+\frac{1}{2}}^k, & \alpha_{j+\frac{1}{2}}^k \neq 0 \\ 0, & \alpha_{j+\frac{1}{2}}^k = 0 \end{cases} \quad (22)$$

$$Q(z) = z^2 + \frac{1}{4} \quad (23)$$

Модификация схемы заключается в зеркальном отражении относительно узла  $j$  данных  $w^*$ , передаваемых в подпрограмму для вычисления членов  $d_{j+\frac{1}{2}}$ , выражения (17), и  $d_{j-\frac{1}{2}}$  искусственной вязкости, если  $m_j < 0$ :

$$\begin{pmatrix} \rho_j^* = \rho_j \\ m_j^* = -m_j \\ E_j^* = E_j \\ p_j^* = p_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_{j-1}^* = \rho_{j+1} \\ m_{j-1}^* = -m_{j+1} \\ E_{j-1}^* = E_{j+1} \\ p_{j-1}^* = p_{j+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_{j+1}^* = \rho_{j-1} \\ m_{j+1}^* = -m_{j-1} \\ E_{j+1}^* = E_{j-1} \\ p_{j+1}^* = p_{j-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_{j-2}^* = \rho_{j+2} \\ m_{j-2}^* = -m_{j+2} \\ E_{j-2}^* = E_{j+2} \\ p_{j-2}^* = p_{j+2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_{j+2}^* = \rho_{j-2} \\ m_{j+2}^* = -m_{j-2} \\ E_{j+2}^* = E_{j-2} \\ p_{j+2}^* = p_{j-2} \end{pmatrix} \quad (24)$$

После вычисления членов  $d_{j+\frac{1}{2}}$ ,  $d_{j-\frac{1}{2}}$  для обращенной задачи необходимо поменять знаки у тех из них, которые отвечают за изменение количества движения в уравнении (16), так как знак у скорости ранее был изменен на обратный.

## 2. НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Модифицированная TVD схема тестировалась на широко известной задаче [1, 3] со следующими начальными условиями (НУ).

$$\begin{aligned} \rho_j^0 &= 1, \quad u_j^0 = 0, \quad \rho_j^0 = 1, \quad \text{если } x_j < 0 \\ \rho_j^0 &= 0.1, \quad u_j^0 = 0, \quad \rho_j^0 = 0.125, \quad \text{если } x_j \geq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Область моделирования принималась равной  $x \in [-4.5, 5.5]$ , сетка содержала 100 ячеек, шаг сетки составлял  $h = 0.1$ . Эти данные аналогичны параметрам моделирования задачи в работе [1].

Шаг по времени выбирался согласно критерию Куранта-Фридриха-Леви

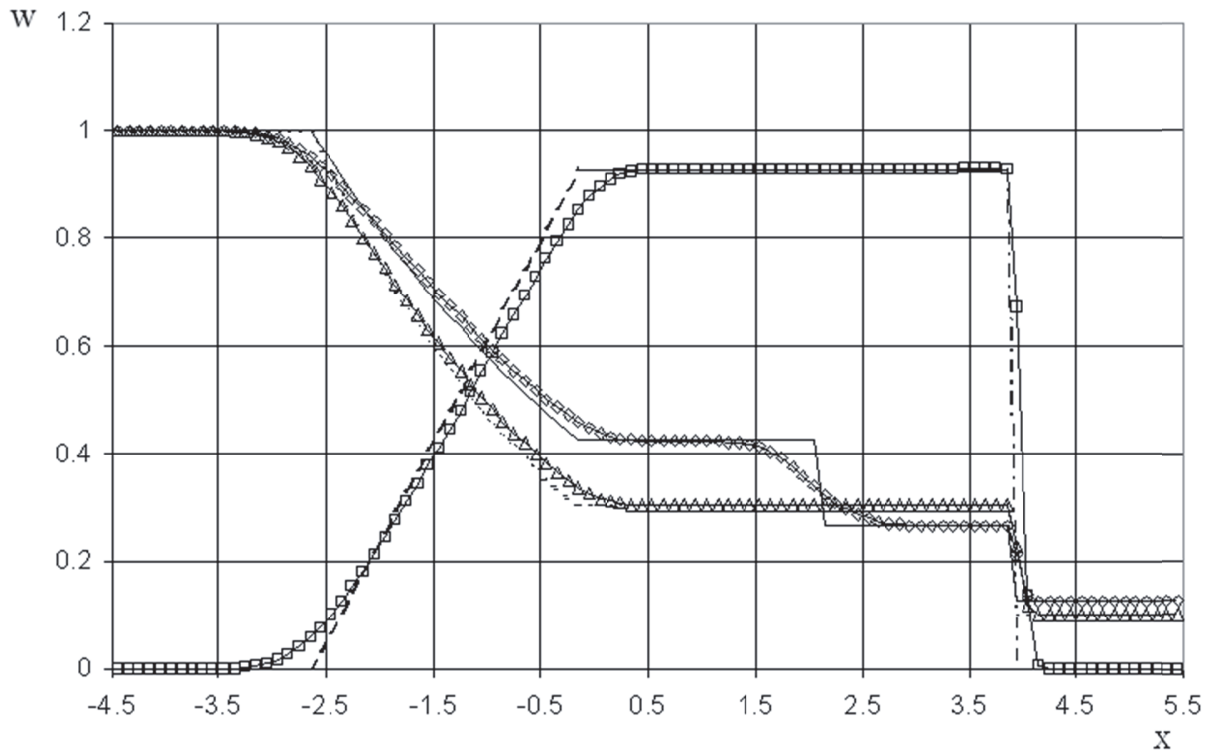
$$\Delta t_c = k_c \frac{h}{c}, \quad (27)$$

где  $k_c$  – коэффициент пропорциональности ( $k_c = 0.4863$ ).

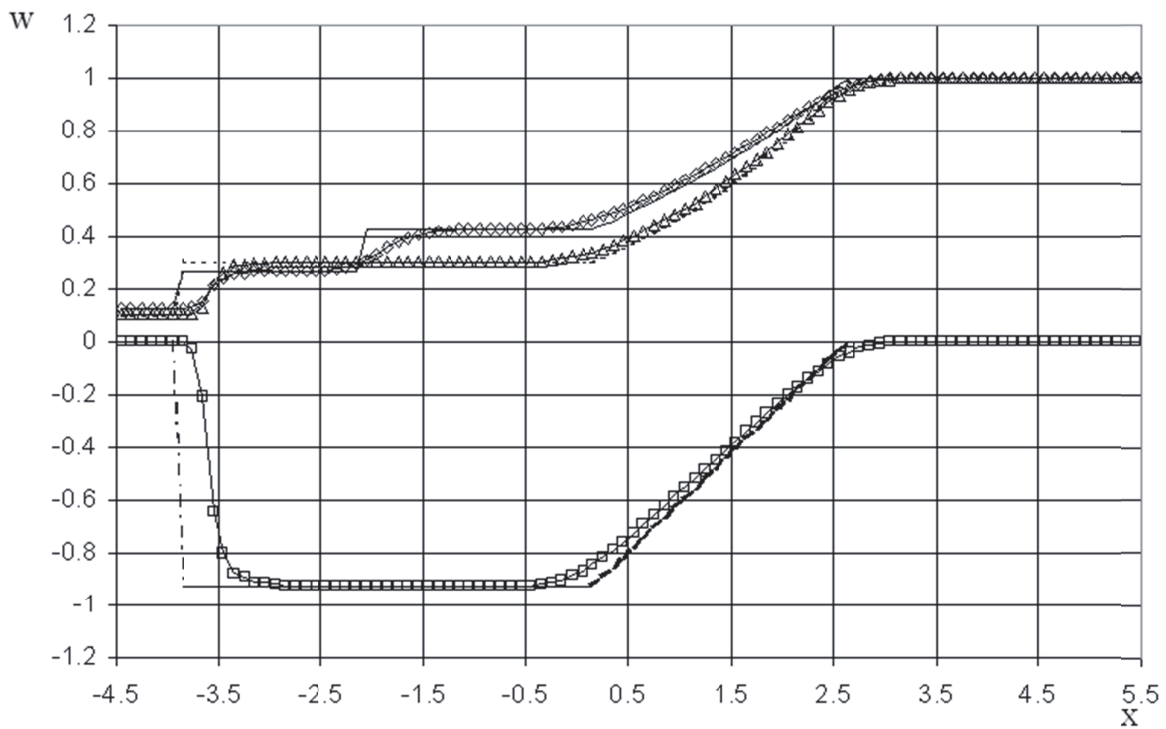
Для заданных параметров моделирования шаг по времени составлял  $\Delta t_c = 0.0411$ .

Результаты расчетов для момента времени  $t = 2.22583$  показаны на рис. 1-3 в сравнении с точным решением Годунова [4].

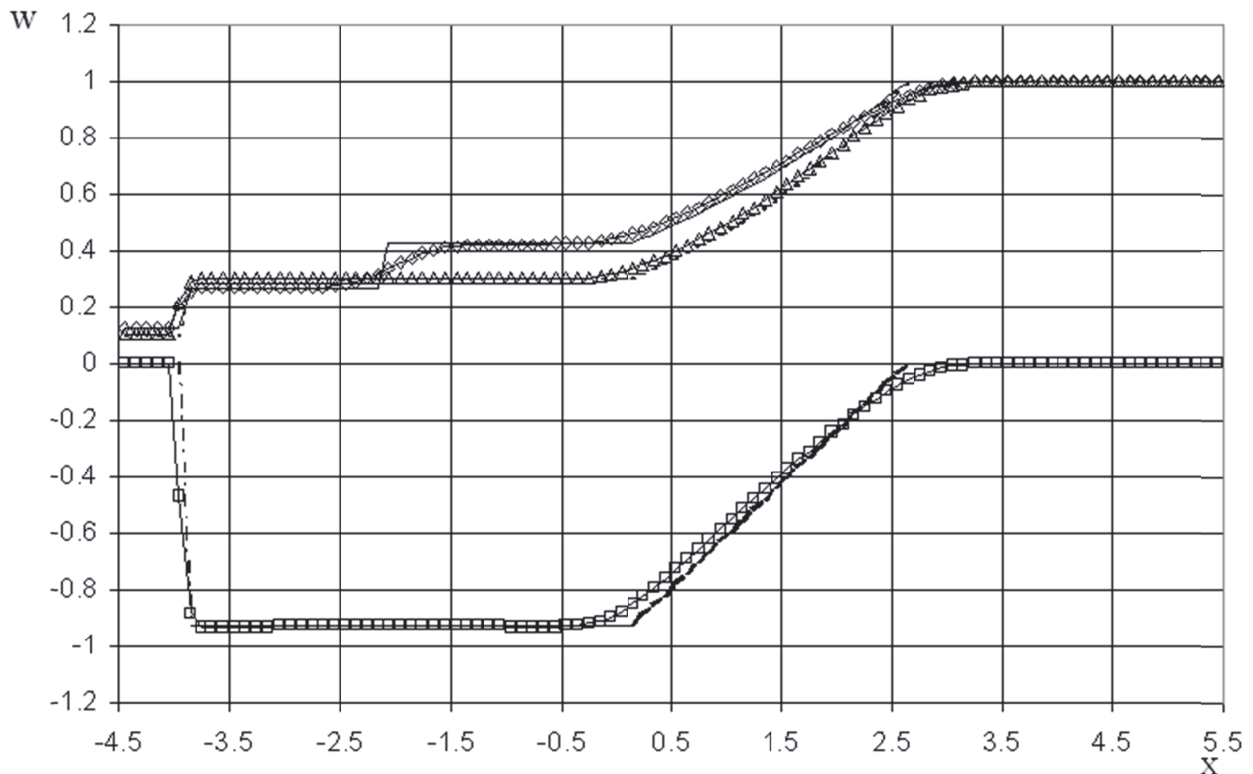
Из сравнения рис. 2 и 3 следует, что модифицированная TVD схема в отличие от исходной



**Рис. 1.** Распределение величин в задаче о распаде разрыва (положительное направление ударной волны):  
 TVD схема [2] и модифицированная схема:  $\diamond$  -  $\rho$ ,  $\square$  -  $u$ ,  $\triangle$  -  $p$ ;  
 точное решение Годунова [4]:  $\text{—}$  -  $\rho$ ,  $\text{- - -}$  -  $u$ ,  $\text{.....}$  -  $p$ .



**Рис. 2.** Распределение величин в задаче о распаде разрыва (отрицательное направление ударной волны):  
 TVD схема [2]:  $\diamond$  -  $\rho$ ,  $\square$  -  $u$ ,  $\triangle$  -  $p$ ;  
 точное решение Годунова [4]:  $\text{—}$  -  $\rho$ ,  $\text{- - -}$  -  $u$ ,  $\text{.....}$  -  $p$ .



**Рис. 3.** Распределение величин в задаче о распаде разрыва (отрицательное направление ударной волны):  
 модифицированная TVD схема:  $\diamond$  -  $\rho$ ,  $\square$  -  $u$ ,  $\triangle$  -  $p$ ;  
 точное решение Годунова [4]: — -  $\rho$ , - - - -  $u$ , .....  $p$

схемы значительно повышает точность вычислений при отрицательном направлении движения ударной волны.

### ВЫВОД

По численным результатам моделирования задачи о распаде разрыва можно сделать вывод, что модифицированная TVD схема по сравнению с исходной схемой значительно повышает точность вычислений при отрицательном направлении движения ударной волны.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Harten, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. of Comp. Phys. v. 49. 1983. P. 357-393.
2. Carofano, G.C. Blast computation using Harten's total variation diminishing scheme / Garry C. Carofano. Technical report ARLCB-TR-84029. US Army Armament Research and Development Center. 1984.
3. Roe, P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. of Comp. Phys. v. 135. 1997. P. 250-258.
4. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов. М.: Наука, 1976. 400 с.

## TVD SCHEME MODIFICATION FOR NEGATIVE VELOCITY OF A ONE-DIMENSIONAL SHOCK WAVE

© 2018 V.V. Nikonov

Samara National Research University named after Academician S.P. Korolyov

The problem of direct numerical simulation of a one-dimensional shock wave by TVD scheme for Euler's equations is solved. It is shown, that for negative velocity of the shock wave the TVD scheme has large numerical viscosity. The scheme has been modified by introducing a specular reflection of a flow relative to its central node for a data transfer to a calculation subroutine and its re-reflection for a result obtaining. The simulation results are compared with the exact Godunov's solution of a discontinuities decay problem. The results accuracy of the modified TVD scheme for negative velocity are almost coincide with ones of the original TVD scheme for positive velocity of the shock wave. Thus, the accuracy of the scheme is preserved.

*Keywords:* gas, shock wave, direct simulation, numerical simulation, TVD scheme, one-dimensional flow.

Valeriy Nikonov, Candidate of Technics, Senior Lecturer at the Aircraft Construction and Design Department.  
 E-mail: v\_nikonov@mail.ru