

## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

© 2018 Н.И. Дедов, В.Н. Исуткина

Самарский государственный технический университет

Статья поступила в редакцию 25.06.2018

В статье в геометрически и физически нелинейной постановке решается задача о напряженно-деформированном состоянии пластин и пологих оболочек на прямоугольном плане при нагружении давлением. Разрешающие уравнения теории пологих оболочек получены на основе деформационной теории пластичности Генки-Ильющина и уравнений геометрически нелинейной теории оболочек, которые содержат квадратичные члены относительно углов поворота нормалей к срединной поверхности. Геометрические параметры срединной поверхности принимаются в исходном недеформированном состоянии. Уравнения записаны в форме, позволяющей проводить численные расчеты задач с учетом геометрической и физической нелинейности или только с геометрической нелинейностью, учитывать разгрузку, сжимаемость материала и вторичные пластические деформации.

*Ключевые слова:* геометрическая нелинейность, упругопластическое деформирование, закритические деформации, разгрузка, вторичные пластические деформации, пластина, пологая оболочка.

В настоящей работе рассматривается упругопластический изгиб гибких пластин и устойчивость пологих оболочек с учетом разгрузки. При упругопластическом изгибе пластин и закритических деформациях оболочек, при потере устойчивости, распределение напряжений по толщине тонкостенных конструкций становится нелинейным, область разгрузки возрастает от нуля непрерывно и траектория деформирования изменяется без излома. Жесткость оболочки на изгиб в зонах разгрузки возрастает по сравнению с жесткостью докритического состояния. Закритическое деформирование происходит с непрерывным увеличением перемещений до момента достижения предельного состояния.

В работе [1] проведено численное исследование выпучивания и закритических деформаций упругопластических осесимметричных оболочек вращения с учетом разгрузки и вторичных пластических деформаций. Решение получено с использованием теории упругопластического течения. Нелинейная задача решается методом квазилинеаризации исходных нелинейных уравнений путем дифференцирования по параметру.

Анализ напряженно-деформированного упругопластического состояния прямоугольных пластин при различных механических свойствах материала проведен в работе [2] при однократном и повторном приложении нагрузок. Получена зависимость прогиба характерных точек пластины от величины приложенных нагрузок.

*Дедов Николай Иванович, кандидат технических наук, профессор кафедры механики. E-mail: nikolai\_dedov@mail.ru*  
*Исуткина Вера Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и прикладной информатики. E-mail: vera\_isutkina@mail.ru*

Для численной реализации нелинейных задач, представляющих существенные трудности, в [3] рассматривается инкрементальный подход, когда на основе нелинейных уравнений получают линейные уравнения, содержащие в качестве неизвестных приращения искомых функций, методы решения которых хорошо разработаны.

Поэтому важным является разработка методов исследования нелинейного изгиба и закритических упругопластических деформаций тонкостенных конструкций, при которых возникают и развиваются области разгрузки.

Исследования упругопластического напряженно-деформированного состояния зон разгрузки при изгибе и после потери устойчивости рассмотрим в случае нагружения наружным давлением пластин и пологих оболочек, закрепленных на прямоугольном плане. Математическая модель задачи изгиба оболочек из упругопластического материала предусматривает учет геометрической и физической нелинейности, разгрузки, вторичных пластических деформаций и сжимаемости материала.

При исследовании поведения оболочки из упругопластического материала в процессе активной деформации при простом нагружении или близким к нему используется зависимость компонентов девиатора напряжений от компонентов девиатора деформаций в виде [4, 5]

$$\sigma = 3K\varepsilon_0 + \frac{2}{3}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_0\delta_{ij}), \quad i, j=1,2,3,$$

где  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  – модуль объемного сжатия,

$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3}$  – средняя деформация.

Зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций принимается в виде

$$\sigma_i = 3G(1 - \omega_i) e_i,$$

где  $\omega_i = f(e_i)$  – функция А.А. Ильюшина. Это некоторая аналитическая функция интенсивности деформации, отличная от нуля только за пределом упругости. В качестве условия наступления пластичности принимается условие Мизеса по интенсивности напряжений или деформаций [6]

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)} = \sigma_T,$$

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)} = e_{iT}.$$

Зависимость интенсивности напряжений  $\sigma_i$  от интенсивности деформаций  $e_i$  может быть установлена из опытов на растяжение. При этом кривая  $\sigma_i(e_i)$  может быть получена из диаграммы растяжения путем уменьшения значений вдоль оси абсцисс в  $3/2(1-\nu)$  раз.

Коэффициент поперечного сжатия в упругой области постоянен, а за пределом упругости он возрастает, приближаясь к  $\nu=0,5$ . Величину  $\nu$  при различном уровне деформаций можно определить непосредственно из опытов на растяжение

$$\nu = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \text{ либо воспользоваться зависимостью}$$

$$\nu = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{E_c}{E} (1 - 2\nu_0) \right],$$

где  $\nu_0$  – коэффициент поперечного сжатия в упругой области.

При разгрузке, когда интенсивность напряжений убывает, при условии отсутствия вторичных пластических деформаций, зависимость компонентов девиатора напряжений от компонентов девиатора деформаций подчиняется закону Гука. Согласно теореме А.А. Ильюшина об упругой разгрузке имеем

$$\sigma'_{ij} - \sigma_{ij} = 3K(\varepsilon'_{ij} - \varepsilon_{ij})\delta_{ij} + 2G[(\varepsilon'_{ij} - \varepsilon_{ij}) - (\varepsilon'_0 - \varepsilon_0)\delta_{ij}],$$

$i, j=1,2,3.$

Здесь штрихом обозначены напряжения и деформации в соответствующей точке в конце активного процесса деформации.

Согласно принципа Мазинга при первом нагружении наступление текучести на плоскости с координатами  $\sigma_i - \varepsilon_i$  определяется величинами  $\sigma_T$ , а при разгрузке наступление текучести на плоскости с координатами  $\overline{\sigma}_i - \overline{\varepsilon}_i$  определяется величинами  $2\sigma_T$ . Начало координат  $\overline{\sigma}_i, \overline{\varepsilon}_i$  принимается в точке, соответствующей концу активного нагружения. Зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций при упругих и вторичных пластических деформациях приведена на рис. 1.

Если при активном нагружении в теле сохранились области упругих деформаций, то принцип Мазинга не может быть распространен на эти области. Пластические деформации в этих областях появятся при напряжениях  $\sigma_T$ , а не  $2\sigma_T$ , как это следует из принципа Мазинга.

В трудах В.В.Москвитина [7, 8] дано обобщение теории А.А.Ильюшина о разгрузке в упругой области на случай возникновения в процессе разгрузки пластических деформаций (область вторичных пластических деформаций) – участок диаграммы *NPR* на рис.1

$$\overline{\sigma}_i = 3K\overline{\varepsilon}_o + \frac{2\overline{\sigma}_i}{3\varepsilon_i}(\overline{\varepsilon}_{ij} - \overline{\varepsilon}_o\delta_{ij}), \quad i, j=1,2,3,$$

$$\overline{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma_{ij}, \quad \overline{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon'_{ij} - \varepsilon_{ij},$$

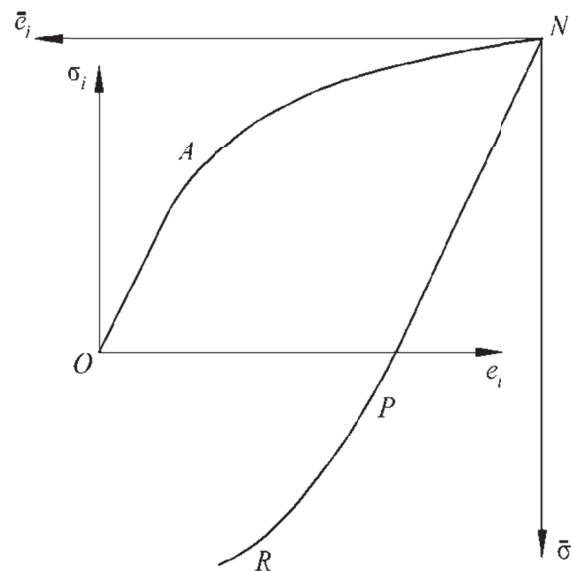


Рис. 1. Зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций при активном нагружении (участок OAN) и при упругой разгрузке и вторичных пластических деформациях (участок NPR)

Если при активном нагружении в теле сохранились области упругих деформаций, то принцип Мазинга не может быть распространен на эти области. Пластические деформации в этих областях появятся при напряжениях  $\sigma_T$ , а не  $2\sigma_T$ , как это следует из принципа Мазинга.

В трудах В.В.Москвитина [7, 8] дано обобщение теории А.А.Ильюшина о разгрузке в упругой области на случай возникновения в процессе разгрузки пластических деформаций (область вторичных пластических деформаций) – участок диаграммы *NPR* на рис. 1

$$\overline{\sigma}_i = 3K\overline{\varepsilon}_o + \frac{2\overline{\sigma}_i}{3\varepsilon_i}(\overline{\varepsilon}_{ij} - \overline{\varepsilon}_o\delta_{ij}), \quad i, j=1,2,3,$$

$$\overline{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma_{ij}, \quad \overline{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon'_{ij} - \varepsilon_{ij},$$

где  $\sigma'_{ij}, \varepsilon'_{ij}$  – компоненты тензора упругопла-

стических напряжений и деформаций в конце активного участка нагружения,  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора упругопластических напряжений и деформаций при разгрузке и вторичных пластических деформациях,

$$\bar{\varepsilon}_o = \frac{\bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\varepsilon}_{22} + \bar{\varepsilon}_{33}}{3} \text{ – средняя деформация,}$$

$$\bar{\sigma}_o = \frac{\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33}}{3} \text{ – среднее напряжение,}$$

$\bar{\omega}_i = f(\bar{\varepsilon}_i)$  – функция Ильюшина,

$\bar{\sigma}_o = 3K\bar{\varepsilon}_o$  – связь между шаровым тензором напряжений и деформаций.

Условие наступления текучести при разгрузке и вторичных пластических деформациях запишем в виде

$$\bar{\sigma}_t = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22})^2 + (\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{33})^2 + (\bar{\sigma}_{33} - \bar{\sigma}_{11})^2 + 6(\bar{\sigma}_{12}^2 + \bar{\sigma}_{23}^2 + \bar{\sigma}_{31}^2)} = 2\sigma_T;$$

$$\bar{\varepsilon}_t = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\bar{\varepsilon}_{11} - \bar{\varepsilon}_{22})^2 + (\bar{\varepsilon}_{22} - \bar{\varepsilon}_{33})^2 + (\bar{\varepsilon}_{33} - \bar{\varepsilon}_{11})^2 + 6(\bar{\varepsilon}_{12}^2 + \bar{\varepsilon}_{23}^2 + \bar{\varepsilon}_{31}^2)} = 2\varepsilon_T.$$

Рассмотренные соотношения деформационной теории пластичности широко применяются при решении прикладных задач теории пластичности. Более общими являются соотношения теории течения, которые связывают приращение компонент тензора деформации с напряжениями и с приращениями напряжений, что позволяет описывать сложное нагружение, в то время как деформационная теория строго применима лишь в случае простого нагружения. Однако, деформационная теория обладает сравнительной простотой исходных соотношений и дает результаты, удовлетворительно согласующиеся с экспериментом и при нагружениях отличных от простого. В задачах устойчивости соотношения деформационной теории приводят к меньшим значениям критических нагрузок, причем последние лучше согласуются с экспериментом, чем критические нагрузки, определенные по теории течения.

Как известно, при построении упругопластических сред недостаточно использовать только тензор полных деформаций. В большинстве современных работ, изучающих упругопластическое деформирование, вводятся меры деформации, связанные отдельно с упругим и отдельно с пластическим деформированием.

При активном нагружении тонкостенных конструкций из упругопластического материала напряжения представим в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^y + \Delta\sigma_{ij}, i, j=1,2,3$$

где  $\sigma_{ij}^y$  – напряжения, возникающие в оболочке, если бы материал оболочки подчинялся закону Гука при истинных деформациях,  $\Delta\sigma_{ij}$  – величина, учитывающая отклонение диаграммы материала оболочки от закона Гука.

При разгрузке материала оболочки и в области вторичных пластических деформаций напряжения запишем, используя теорему В.В.Москвитина, в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^y - \bar{\sigma}_{ij}, i, j = 1, 2, 3$$

или, выделяя упругую часть напряжений, в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^y + \Delta\sigma_{ij}, i, j = 1, 2, 3$$

где  $\Delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij}' - \bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}^y$  дополнительные напряжения, учитывающие отклонения материала от закона Гука, наличие разгрузки и вторичных пластических деформаций.

На основании соотношений для напряжений можно представить усилия и моменты в сечении оболочки

$$T_{ij} = \int_{-0.5h}^{0.5h} \sigma_{ij} dz = T_{ij}^y + \Delta T_{ij},$$

$$M_{ij} = \int_{-0.5h}^{0.5h} \sigma_{ij} z dz = M_{ij}^y + \Delta M_{ij}$$

$$N_i = N_i^y + \Delta N_i, i, j = 1, 2$$

где  $T_{ij}$  – усилия, действующие в срединной поверхности оболочки,  $M_{ij}$  – изгибающие моменты,  $N_i$  – поперечные силы.

Решаются задачи о напряженно-деформированном состоянии прямоугольных в плане пластин и пологих оболочек, изготовленных из упругопластического материала, нагруженных нормальным давлением.

При отсутствии внешних нагрузок, приложенных в плоскости оболочки (вдоль осей x,y, совпадающих с главными линиями кривизны), основная система дифференциальных уравнений теории тонких упругопластических оболочек с учетом разгрузки, вторичных пластических деформаций и сжимаемости материала примет вид

$$D\nabla^2 \nabla^2 w + \bar{F}(\phi) = L(w, \phi) + G(\Delta M_{ij}) + p,$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \phi + \bar{N}(w) = K(w) + H(\Delta T_{ij}).$$

Для представления разрешающей системы дифференциальных уравнений в безразмерном виде использовались безразмерные геометрические и физические параметры

$$\lambda = \frac{a}{b}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h},$$

$$K_1 = \frac{4a^2}{R_1 h}, \quad K_2 = \frac{4b^2}{R_2 h},$$

$$\bar{\phi} = \frac{\phi}{Eh^3}, \quad \bar{p} = \frac{16pb^4}{Eh^4}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} \frac{b^2}{Eh^2}.$$

Система дифференциальных уравнений построена в форме, удобной для решения гео-

метрически и физически нелинейных задач в упругой, нелинейно упругой или упругопластической области.

В данной работе решение нелинейных уравнений проводится методом общей итерации [9-11]. Значение корней системы алгебраических уравнений в процессе итераций образуем по формуле

$$\bar{x}_i^n = x_i^{n-1} + \alpha_{cx} (x_i^n - x_i^{n-1}),$$

где  $\alpha_{cx}$  – численные коэффициенты, которые должны быть определены так, чтобы процесс итераций сходился как можно быстрее. При  $\alpha_{cx} = 1$  имеем обычный метод итерации, который для рассматриваемых здесь систем нелинейных уравнений начинает расходиться уже при малых значениях параметра нагрузки  $\bar{p}$ . В отличие от простого метода итераций, общий метод итераций с  $\alpha_{cx} \neq 1$  позволяет при надлежащем выборе корректирующего коэффициента  $\alpha_{cx}$  достичь быстрой сходимости итерационного процесса при больших параметрах нагрузки  $\bar{p}$ . В процессе счета корректирующий коэффициент  $\alpha_{cx}$  определяется автоматически по заранее заданной процедуре.

Статические граничные условия могут выражаться соотношениями, содержащими перемещения, углы поворота, усилия и моменты. На каждом краю оболочки число граничных условий равно четырем.

Для решения конкретной задачи система нелинейных дифференциальных уравнений должна быть проинтегрирована с учетом соответствующих граничных условий на контуре пластины, оболочки.

Рассмотрим прямоугольную в плане пластину со сторонами  $2a, 2b$  постоянной толщины  $h$ . Начало координат примем в центре плана пластины, координаты  $x, y$  направлены по осям симметрии, а координату  $z$  по нормали к срединной поверхности.

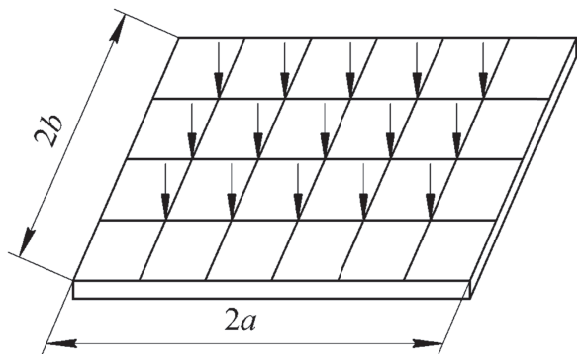


Рис. 2. Пластина на прямоугольном плане

Проведены вычисления для жестко заделанной квадратной пластины с  $h/b = 0,1$  из материала с механическими характеристиками  $G=0,75$

$10^6 \text{ кг/см}^2, G^I = 0,148 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \nu = 0,3, e_T = 4,28 \cdot 10^{-3}$ , нагруженной равномерно распределенным давлением по все поверхности. Края пластины жестко защемлены.

При проведении вычислений использовались безразмерные параметры прогиба пластины.

На рис. 3 представлена зависимость распределенной нагрузки и коэффициента сжимаемости от величины прогиба пластины в центре при пластических деформациях с учетом разгрузки и геометрической нелинейности. Здесь же показана зависимость нагрузки от прогиба при учете только геометрической нелинейности. При одном и том же параметре нагрузки  $\bar{p}$  прогиб в центре пластины с учетом только геометрической нелинейности равен  $\bar{w}_0 = 1$ , а с учетом геометрической нелинейности и пластических деформаций  $\bar{w}_0 = 1,6$ . С увеличением нагрузки различие прогибов возрастает. Для развитых пластических деформаций при параметре прогиба в центре  $\bar{w}_0 \geq 1$  коэффициент сжимаемости изменяется незначительно, приближаясь к  $\nu = 0,5$ .

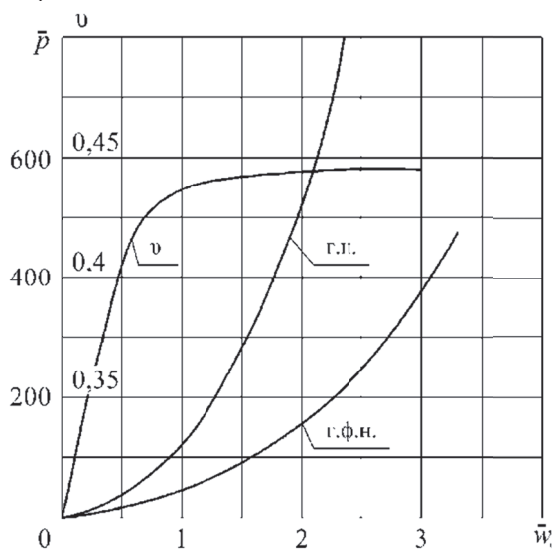
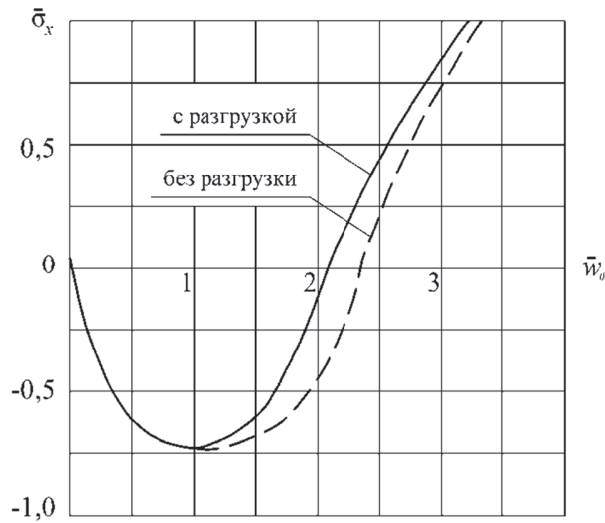


Рис. 3. Зависимость нагрузки и коэффициента сжимаемости от прогиба в центре пластины

На рис. 4 приведена зависимость напряжений для центрального узла на верхней поверхности квадратной пластины при упругопластических деформациях без разгрузки и с учетом разгрузки. На начальном этапе нагружения, в центральном узле на верхней поверхности пластины, преобладают изгибные напряжения по сравнению с мембранными и интенсивность деформаций до прогиба  $\bar{w}_0 = 1$  растет. При прогибах в центре пластины  $\bar{w}_0 \geq 1$  сказывается более быстрый рост мембранных напряжений, интенсивность деформаций убывает и происходит разгрузка. С учетом разгрузки смена зна-

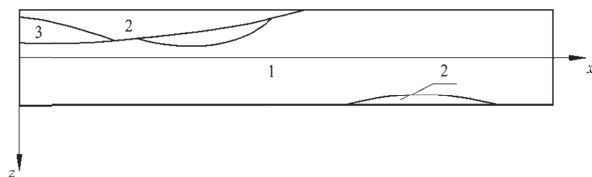


ка напряжений в центральном узле происходит при меньших прогибах в центре, чем без учета разгрузки. С увеличением прогиба в центре различия в напряжениях с учетом разгрузки и без ее учета уменьшаются.



**Рис. 4.** Зависимость напряжений для центральной точки на верхней поверхности квадратной пластины

На рис. 5 показаны зоны пластических деформаций, разгрузки и вторичных пластических деформаций по толщине жестко заделанной квадратной пластины при прогибе  $w_0 = 2$ . При прогибе пластины в центре  $w_0 = 2$  почти все сечение пластины находится в пластическом состоянии. Зоны разгрузки 2 примыкают к поверхностям пластины, зона вторичных пластических деформаций 3 располагается внутри пластины. Упругая зона не обозначена цифрой.



**Рис. 5.** Зоны пластических деформаций (1), разгрузки (2) и вторичных пластических деформаций (3) по толщине жестко заделанной квадратной пластины при прогибе  $w_0 = 2$

### ВЫВОДЫ

Предложенный метод позволяет проводить исследования класса задач пластин и пологих оболочек важных в практических и теоретических приложениях при изгибе и закритических деформациях. С учетом геометрической и физической нелинейностей прослеживается развитие зон пластических деформаций, разгрузки и вторичных пластических деформаций, что является важным для оценки повреждаемости конструк-

ций. Результаты численных расчетов свидетельствуют о появлении зон вторичных пластических деформаций, реализующихся даже при однократном поперечном нагружении квадратной пластины. Поэтому использование теории геометрической нелинейности при упругопластическом деформировании пластин и оболочек является необходимым.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурого Н.Г., Кукуджанов В.Н. Численный метод решения геометрически нелинейных задач для упругопластических оболочек вращения // Строительная механика и расчет сооружений, 1976. №5. С.44-49.
2. Zin T.H., Ho E. Elasto-plastic bending of rectangular plate // Journal of Engineering Mechanics Division. Proceedings of the ASCE, vol. 94, EM 1, 1968, pp. 199-210.
3. Петров В.В. Нелинейная инкрементальная строительная механика. М.: Инфа-Инженерия, 2014. 480 с.
4. Стрельбицкая А.И. Упругопластические деформации и несущая способность пологих оболочек // Прикладная механика. 1973. Т.9. № 8. С.3-21.
5. Ильющин А.А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948.
6. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
7. Москвитин В.В. Пластичность при переменных нагружениях. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965. 263 с.
8. Москвитин В.В. Циклическое нагружение элементов конструкции. М.: Наука, 1981г. 344 с.
9. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. М.: Наука, 1964.
10. Корнишин М.С., Столяров Н.Н., Дедов Н.И. Упругопластический изгиб гибких пологих оболочек под действием поперечной нагрузки распределенной по малой центральной площадке // В кн.: Исследование по нелинейным задачам теории пластин и оболочек. Саратов, Саратовский ун-т, 1974. С.171-178.
11. Дедов Н.И., Корнишин М.С., Столяров Н.Н. Изгиб прямоугольных в плане гибких пластин и пологих оболочек из нелинейно упругого сжимаемого материала // Труды VIII Всесоюзн. конф. по теории пластин и оболочек. Ростов на Дону, 1972, АН СССР.

**ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION  
OF GEOMETRICALLY NONLINEAR PLATES AND SHALLOW SHELLS**

© 2018 N.I. Dedov, V.N. Isutkina

Samara State Technical University

In the article, in a geometrically and physically nonlinear formulation, the problem of the stress-strain state of plates and shallow shells on the rectangular plane under pressure loading is solved. The resolving equations of the theory of shallow shells are obtained on the basis of the Genki-Ilyushin deformation theory of the plasticity and the equations of the geometrically nonlinear shell theory, which contain quadratic terms with respect to the angles of rotation of the normals to the middle surface. The geometric parameters of the middle surface are taken in the original undeformed state. The equations are written in the form allowing to perform numerical calculations of problems with allowance for geometric and physical nonlinearities or only with geometric nonlinearity, allow for unloading and secondary plastic deformations.

*Keywords:* Geometric nonlinearity, elastoplastic deformation, overcritical deformations, unloading, secondary plastic deformations, plate, shallow shell.