

УДК 629.7.018.4

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ НА ОСНОВЕ МОНОФАЗНЫХ КОЛЕБАНИЙ

© 2018 В.А. Бернс<sup>1,2</sup>, Е.П. Жуков<sup>1</sup>, Д.А. Маринин<sup>2</sup>, В.В. Маленкова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С.А. Чаплыгина, г. Новосибирск

<sup>2</sup> Новосибирский государственный технический университет

Статья поступила в редакцию 26.04.2018

Модальные испытания летательных аппаратов (ЛА) проводятся с целью определения собственных частот, форм, обобщенных масс и характеристик демпфирования собственных тонов колебаний. Эти модальные параметры используются в оценках эксплуатационной нагруженности, обеспечении прочности, управляемости и аэроупругой устойчивости ЛА. Предлагаемый способ испытаний относится к классическому экспериментальному модальному анализу динамических систем. Для его реализации выделяются собственные тона колебаний конструкции в заданном частотном диапазоне методом фазового резонанса путем использования многоканальной системы возбуждения и измерения колебаний. Определяются собственные частоты тонов по фазовым резонансам. По соотношениям между вынужденными монофазными и собственными колебаниями выявляются диссипативные свойства динамической системы. Так, если монофазные колебания при монофазном возбуждении совпадают с собственными на частотах, отличающихся от собственных частот, то колебания конструкции по каждому собственному тону описываются уравнением движения линейного осциллятора. Параметрами осциллятора являются обобщенная масса, обобщенное демпфирование и обобщенная жесткость соответствующего тона. Определение параметров осциллятора производится по амплитудно-частотной характеристике конструкции в окрестности частоты фазового резонанса из условия минимума различия обобщенных сил, реализующих одинаковые амплитуды колебаний конструкции и осциллятора. Если же монофазные колебания при монофазном возбуждении не существуют или не совпадают с собственными колебаниями, то для определения модальных параметров используется немонофазное возбуждение. Достоинствами такого способа идентификации модальных характеристик конструкций является обобщенность принимаемой модели демпфирования, низкая чувствительность к погрешностям измерений колебаний в процессе испытаний и к взаимному влиянию тонов с близкими собственными частотами, а также возможность оценки достоверности определения обобщенных масс и жесткостей через частоты фазовых резонансов. Достоверность определяемых предложенным способом обобщенных характеристик собственных тонов колебаний подтверждена результатами модальных испытаний динамически подобной модели самолета Ту-334 и натурных изделий Су-30, Як-152 и агрегата космического аппарата.

*Ключевые слова:* летательный аппарат, экспериментальный модальный анализ, фазовый резонанс, собственные колебания, монофазные колебания, собственная частота, обобщенная масса, обобщенное демпфирование.

### ВВЕДЕНИЕ

Параметры собственных тонов колебаний – собственные частоты, формы, обобщенные массы и характеристики демпфирования – являются исходными данными в оценках эксплуатационной нагруженности, обеспече-

нии прочности, управляемости и аэроупругой устойчивости летательных аппаратов (ЛА). Невозможность в полной мере учесть в расчетах особенности реальной конструкции приводит к необходимости экспериментального определения этих параметров в модальных испытаниях.

Основным методом наземных модальных испытаний ЛА является классический модальный анализ при многоточечном возбуждении и измерении колебаний ([1]). Теоретическое обоснование методов многоточечного возбуждения и способы подбора сил изложены в работах [2–7]. Монография [6] содержит также обзор современных подходов к модальным испытаниям, примеры реализации которых изложены в [8–12]. Оценки погрешностей определения па-

*Бернс Владимир Андреевич, доктор технических наук, доцент, начальник отдела динамических испытаний, профессор кафедры прочности летательных аппаратов НГТУ. E-mail: v.berns@yandex.ru*

*Жуков Егор Павлович, инженер. E-mail: zh-ep@yandex.ru*

*Маринин Дмитрий Александрович, аспирант.*

*E-mail: marinin@iss-reshetnev.ru*

*Маленкова Валерия Васильевна, инженер.*

*E-mail: malenkova\_vv@mail.ru*

раметров собственных тонов колебаний приведены в работах [5, 13–15]. Отмечается, что наиболее чувствительными к случайным ошибкам в экспериментальных данных являются способы определения обобщенных масс. В [16] методом статистического моделирования сделаны оценки точности определения собственных частот, обобщенных масс и обобщенных коэффициентов демпфирования при наличии случайных ошибок в измерениях колебаний. Так же, как и в работах других авторов, отмечается, что повышенной чувствительностью к погрешностям эксперимента обладают способы определения обобщенных масс. Показано, в частности, что при использовании метода введения квадратурной составляющей возбуждения математическое ожидание случайных величин обобщенной массы является смещенной оценкой. В работе [17] изучено взаимное влияние тонов с близкими собственными частотами, а в [18] представлены результаты исследований влияния системы упругого вывешивания ЛА на точность определения модальных параметров.

Важным практическим приложением результатов модальных испытаний является использование их для коррекции расчетных математических моделей конструкций. Одной из первых работ, в которой изложен современный подход к решению этой задачи, является статья [19], а более обширная библиография представлена в [6]. Пример применения модальных испытаний для верификации конечно-элементных моделей конструкций описан в [20].

В основу методов многоточечного возбуждения колебаний положено понятие о фазовом резонансе. Поскольку число сил возбуждения всегда меньше числа степеней свободы конструкции ЛА, то режим фазового резонанса в модальных испытаниях реализуется приближенно. Существующие алгоритмы подбора сил базируются, как правило, на математическом описании объекта исследований с точностью до постоянных параметров. При этом одновременно используются описания инерционных, упругих и диссипативных свойств конструкций, хотя универсальной модели демпфирования в настоящее время не существует. Обычным является, например, принятие гипотезы Базиля о том, что матрицы инерции, жесткости и демпфирования приводятся к диагональному виду одним преобразованием координат. Такой подход к модальным испытаниям может привести к искажению характеристик реальной динамической системы и придать неприсущие ей свойства. Кроме того, расчетная модель ЛА может строиться по результатам испытаний его динамически подобной модели, в которой демпфирование, как правило, не моделируется, а результаты расчетов распространяются на натурную конструкцию.

Целью работы является разработка способа определения модальных параметров ЛА, позволяющего выявлять диссипативные свойства динамических систем и обладающего низкой чувствительностью к случайным погрешностям измерения колебаний и взаимному влиянию тонов с близкими собственными частотами.

## МЕТОДИКА МОДАЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Уравнения вынужденных колебаний ЛА в процессе испытаний запишем в виде

$$A\ddot{Y}(N) + R + CY = Q \quad (1)$$

Здесь  $A(N \times N)$  и  $C(N \times N)$  – симметричные, положительно определенные матрицы инерции и жесткости;  $Y(N)$  и  $\dot{Y}(N)$  – векторы перемещений и ускорений точек конструкции;  $R(N)$  – вектор сил демпфирования;  $Q(N)$  – вектор сил возбуждения;  $N$  – число степеней свободы расчетной модели ЛА. К силам демпфирования отнесем все силы, независимо от их природы, изменяющиеся в фазе со скоростью перемещений конструкции. Будем полагать, что работа сил демпфирования положительна, то есть в системе нет внутренних источников энергии, идущей на поддержание колебаний. Математическое выражение сил демпфирования через параметры движения считается неизвестным.

Уравнениям (1) для гармонического возбуждения колебаний  $Q = E \sin \omega t + F \cos \omega t$  с частотой  $\omega$  и, следовательно, гармонического решения  $Y = U \sin \omega t - V \cos \omega t$  соответствует система алгебраических уравнений

$$-\omega^2 AU + HV + CU = E \quad (2)$$

$$-\omega^2 AV + HU + CV = F \quad (3)$$

где  $H(N \times N)$  – положительно определенная матрица демпфирования;  $E(N)$  и  $F(N)$  – векторы синфазной и квадратурной составляющих сил;  $U(N)$  и  $V(N)$  – векторы действительной и мнимой составляющих перемещений (при комплексном представлении колебаний).

Допустим, что подбором сил возбуждения удастся реализовать режим вынужденных колебаний, при котором

$$U = \lambda V \quad (4)$$

где  $\lambda$  – действительное число, равное котангенсу фазового сдвига между откликом системы и синфазной составляющей возбуждения. Такие колебания называются монофазными, а совокупность сил возбуждения, фазы которых отличаются на 0 или  $\pi$ , называется монофазным возбуждением ([4, 21]).

Отметим некоторые свойства монофазных колебаний, более полно описанные в [21].

При монофазном возбуждении ( $f_i = 0, i = 1, 2, \dots, N$ ) параметр  $\lambda$  определяется из решения задачи о собственных значениях:

$$\left[ (\omega^2 A - C) + \lambda H \right] V = 0. \quad (5)$$

Если матрицы  $A$ ,  $C$ ,  $H$  симметричные и положительно определенные, то все собственные значения вещественные. Это означает, что на частоте  $\omega$  можно реализовать  $N$  монофазных колебаний, обладающих свойством ортогональности:

$$V_i^T (\omega^2 A - C) V_j = V_i^T H V_j = 0 \quad \text{для } i \neq j, \quad (6)$$

$$V_i^T (\omega^2 A - C) V_j = \omega^2 a_j - c_i, \quad V_i^T H V_j = h_i \quad \text{для } i = j, \quad (7)$$

где  $a_i$ ,  $c_i$ ,  $h_i$  – положительные числа.

Если на некоторых частотах вынужденных колебаний подбором монофазного возбуждения удастся сделать нулевым вектор действительных составляющих перемещений  $U$ , то есть  $\lambda = 0$  (режим фазового резонанса), то из (5) следует, что этими частотами являются собственные частоты системы без демпфирования, а монофазные колебания совпадают с собственными. Таким образом, в системе с  $N$  степенями свободы с помощью монофазного возбуждения можно реализовать, по крайней мере,  $N$  монофазных колебаний, совпадающих с собственными колебаниями системы без демпфирования. На этом основании собственные колебания можно считать частным случаем вынужденных монофазных колебаний.

Обозначим собственный вектор  $i$ -го тона как  $W_i$ . Из условий ортогональности этих векторов  $W_i^T A W_j = 0$ ,  $W_i^T C W_j = 0$  – для  $i \neq j$ ,  $W_i^T A W_i = a_i$ ,  $W_i^T C W_i = c_i$  – для  $i = j$  следует, что при совпадении монофазных колебаний с собственными в (6) и (7)  $a_i$  – обобщенная масса,  $c_i = p_i^2 a_i$  – обобщенная жесткость,  $p_i$  – собственная частота,  $h_i$  – обобщенный коэффициент демпфирования  $i$ -го тона.

При немонофазном возбуждении колебаний векторы  $E$  и  $F$  внешних сил определяются из (2) и (3) с учетом (4):

$$E = \left[ \lambda (-\omega^2 A + C) + H \right] V, \quad (8)$$

$$F = (\omega^2 A - C + \lambda H) V. \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует, что при немонофазном возбуждении можно реализовать монофазный отклик любой конфигурации, а параметр  $\lambda$  определяет серию векторов действительных и мнимых составляющих возбуждения, которые реализуют на частоте  $\omega$  монофазные колебания одной конфигурации. В частности, используя немонофазное возбуждение можно на любой частоте вызвать монофазные колебания, совпадающие по форме с собственными колебаниями системы без демпфирования. Это свойство легло в основу известного метода определения обобщенных масс собственных тонов колебаний введением мнимой (квадратурной) составляющей возбуждения.

Для монофазных колебаний уравнения (2) и (3) имеют вид:

$$(1 + \lambda^2)(C - \omega^2 A)V = \lambda E - F, \quad (10)$$

$$(1 + \lambda^2)HV = E + \lambda F, \quad (11)$$

где уравнения (10) уже не содержат матрицы демпфирования и могут использоваться для определения упруго-массовых характеристик механической системы, а уравнения (11) – для определения характеристик демпфирования.

Для нахождения распределения сил по конструкции, обуславливающего на частоте  $\omega$  монофазную реакцию линейной системы на монофазное возбуждение, используем алгоритм, аналогичный изложенной в работе [22] процедуре настройки силовых возбудителей для осуществления фазового резонанса.

На частоте  $\omega$  проведем серию из  $N$  предварительных испытаний, причем векторы сил  $E_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , в этих испытаниях линейно независимы. В каждом испытании измеряются действительные  $U_i$  и мнимые  $V_i$  составляющие вынужденных колебаний. Подбор сил основывается на следующем рассуждении: если монофазный отклик существует, то он будет линейной комбинацией векторов  $U_i$  и  $V_i$ , то есть

$$U + iV = (\tilde{U} + i\tilde{V})\xi, \quad (12)$$

где  $\tilde{U}(N \times N)$ ,  $\tilde{V}(N \times N)$  – матрицы, столбцами которых являются, соответственно, векторы  $U_i$  и  $V_i$ ;  $\xi(N)$  – вектор, подлежащий определению.

Так как рассматривается линейная система, то отклик (12) вызывается силами  $E = \tilde{E}\xi$ . Здесь  $\tilde{E}(N \times N)$  – матрица, столбцами которой являются векторы  $E_i$ . Выполняя условия (4) придем к следующему соотношению для определения параметра  $\lambda$  и вектора  $\xi$ :

$$(\tilde{U} - \lambda\tilde{V})\xi = 0. \quad (13)$$

Таким образом, с помощью монофазного возбуждения можно на частоте  $\omega$  осуществить режим вынужденных монофазных колебаний, если существуют действительные решения задачи о собственных значениях (13). При этом векторы сил, обуславливающих монофазные отклики, определяются как  $E_j = \tilde{E}\xi_j$ , а составляющими монофазных колебаний будут  $U_j = \tilde{U}\xi_j$ ,  $V_j = \tilde{V}\xi_j$ ,  $U_j = \lambda_j V_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, S$ . Здесь  $S \leq N$  – число действительных собственных значений  $\lambda_j$ , то есть число монофазных колебаний различной конфигурации, реализуемых на частоте  $\omega$ . Случай  $\lambda_j = 0$ , как отмечалось выше, означает, что  $V_j$  совпадает с собственным вектором системы без демпфирования.

Если монофазные колебания при монофазном возбуждении не существуют, или существуют, но не совпадают с собственными, то необходимо использовать немонофазное внешнее воздействие.

Рассмотрим условия, которым должны удовлетворять векторы синфазной  $\xi$  и квадратурной  $\eta$  составляющих сил внешнего воздействия,



к диагональным одним преобразованием координат. Представим вектор мнимых составляющих монофазных колебаний в виде разложения по собственным векторам и умножим уравнение (5) слева на  $W^T$ :  $W^T(\omega^2 A - C + H)Wg = 0$ . Или, с учетом ортогональности собственных векторов,  $(\omega^2[a] - [p^2 a] + \lambda[h])g = 0$ . Здесь  $[h]$  – согласно допущению – диагональная матрица;  $g$  – вектор обобщенных перемещений. Но тогда собственное значение  $\lambda_j$  определяется только обобщенными динамическими характеристиками (массой, собственной частотой, коэффициентом демпфирования)  $i$ -го тона, а вектор  $g_j$  разложения  $V_j$  по собственным векторам имеет только  $i$ -й ненулевой элемент, то есть монофазные колебания совпадают с собственными, что противоречит принятому предположению.

При использовании немонофазного возбуждения вынужденные монофазные колебания, совпадающие с собственными, реализуются на любой частоте колебаний. Обобщенные массы собственных тонов колебаний определяются (аналогично (20)) по формуле:

$$a_i = \frac{V_i^T (\lambda_i E_i - F_i)}{(1 + \lambda_i^2)(p_i^2 - \omega^2)V_i^{*2}}, \quad i = L + 1, L + 2, \dots, N, \quad (23)$$

а для  $\lambda_i = 0$  (этот параметр остается произвольным при немонофазном возбуждении) приходим к известной формуле определения обобщенных масс введением квадратурной составляющей возбуждения [5]:

$$a_i = \frac{V_i^T F_i}{(\omega^2 - p_i^2)V_i^{*2}}.$$

Элементы матрицы демпфирования определяются из (11):

$$HV_j = \frac{E_j + \lambda_j F_j}{1 + \lambda_j^2}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

а если исследуемый тон не связан с другими тонами, то обобщенный коэффициент демпфирования можно вычислить по формуле

$$HV_j = \frac{E_j + \lambda_j F_j}{1 + \lambda_j^2}.$$

Таким образом, используя монофазное возбуждение, можно определить собственные частоты и формы механической системы, выявить наличие связей между тонами из-за демпфирования, выяснить свойства матрицы демпфирования. Для тонов, не имеющих связей, вычисляют обобщенные массы и обобщенные коэффициенты демпфирования.

При немонофазном возбуждении на любой частоте вынужденных колебаний можно реализовать монофазные колебания, совпадающие с собственными, то есть определить обобщенные массы изолированных тонов. Но выяснение

диссипативных свойств, основанное на анализе отклика системы, в данном случае невозможно.

Ограниченность возможностей экспериментального оборудования и доступа к ряду мест конструкции ЛА для установки возбудителей вынужденных колебаний приводят к тому, что практически всегда число точек, в которых регистрируется отклик конструкции, превышает число сил возбуждения. В этом случае во всех точках измерения не удается точно выполнить условие равенства нулю действительной составляющей вынужденных колебаний для определения собственных частот и векторов системы, а также точно создать режим вынужденных монофазных колебаний. Поэтому для оценки отклика системы вводятся некоторые критерии, и подбор возбуждения производится по этим критериям.

Допустим, что в модальных испытаниях измеряются перемещения в  $N$  точках конструкции при возбуждении колебаний в  $L$  из  $N$  этих точек, причем  $L < N$ . Будем считать, что возбуждением в  $L$  точках реализуется режим вынужденных монофазных колебаний в  $N$  точках системы, если в этом режиме достигается минимум величины

$$R = \frac{\Gamma^T \Gamma}{V^T V}, \quad (24)$$

где

$$\Gamma = U - \lambda V. \quad (25)$$

Здесь  $\Gamma(N)$  – вектор, характеризующий отклонение вынужденных колебаний от монофазных;  $U(N)$ ,  $V(N)$  – векторы, компонентами которых являются, соответственно, величины действительных и мнимых составляющих перемещений в точках регистрации;  $\lambda_i$  – параметр монофазных колебаний.

В соответствии с алгоритмом испытаний, изложенным выше, сначала используется монофазное возбуждение. Подбор возбуждения на частоте  $\omega$  производится по результатам  $L$  испытаний на этой частоте. Векторы сил в испытаниях линейно независимы. Здесь также вводятся матрицы  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{U}$  и  $\tilde{V}$ , столбцами которых являются, соответственно, векторы сил, действительных и мнимых составляющих перемещений конструкции в каждом испытании, но эти матрицы имеют размерности  $(N \times L)$ , а в каждом столбце матрицы  $\tilde{E}$  по крайней мере  $N - L$  элементов равны нулю.

Для линейной системы отклик конструкции на возбуждение

$$E = \tilde{E} \tilde{\xi} \quad (26)$$

можно определить как

$$U = \tilde{U} \tilde{\xi}, \quad V = \tilde{V} \tilde{\xi}. \quad (27)$$

Вектор  $\tilde{\xi}$ , а также параметр  $\lambda_i$  при монофазном возбуждении находят из условия минимума величины  $R$ . Преобразуем (24) с учетом (25) – (27):

$$R(\xi, \lambda) = \frac{\xi^T (\tilde{U}^T - \lambda \tilde{V}^T) (\tilde{U} - \lambda \tilde{V}) \xi}{\xi^T \tilde{V}^T \tilde{V} \xi}.$$

Определим  $\xi$  и  $\lambda$ , доставляющие экстремум  $R(\xi, \lambda)$ , из условий

$$\frac{\partial R}{\partial \xi} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda} = 0. \quad (29)$$

Экстремальные значения  $R$  обозначим величинами  $\alpha$ . Тогда условие (28) приводит к задаче о собственных значениях:

$$(D - \alpha B)\xi = 0, \quad (30)$$

а искомым вектором  $\xi$  является собственный вектор, соответствующий наименьшему собственному значению  $\alpha$ . Условие (29) определяет величину  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\xi^T \tilde{V}^T \tilde{U}^T \xi}{\xi^T \tilde{V}^T \tilde{V} \xi}. \quad (31)$$

Здесь

$$D(L \times L) = \tilde{U}^T \tilde{U} - 2\lambda \tilde{V}^T \tilde{U} + \lambda^2 \tilde{V}^T \tilde{V}, \quad (32)$$

$$B(L \times L) = \tilde{V}^T \tilde{V}. \quad (33)$$

Следует учесть, что в выражение (31) входит вектор  $\xi$ , соответствующий наименьшему значению  $\lambda$ , которое, в свою очередь, зависит от величины  $\lambda$ . Поэтому  $\lambda$  определим также из (31) как величину, при которой достигается минимум наименьшего собственного значения. Для этого используем итерационный процесс. В качестве начального приближения  $\lambda$  на частоте  $\omega$  примем величину  $\lambda_0$  – наименьшее собственное значение матрицы  $\tilde{V}_L^{-1} \tilde{U}_L$ . Элементами матриц  $\tilde{U}_L$  и  $\tilde{V}_L$  являются, соответственно, действительные и мнимые составляющие перемещений точек приложения сил возбуждения на частоте  $\omega$ . Очевидно, что при  $L = N$  начальное приближение  $\lambda_0$  совпадает с точным значением  $\lambda$ .

Установим смысл параметра  $\lambda$ , определяемого формулой (30), для чего перепишем его с учетом (27) и получим:

$$\lambda = \frac{V^T U}{V^T V} = \frac{\sum_{i=1}^N v_i^2 \text{ctg} \varphi_i}{\sum_{i=1}^N v_i^2}, \quad (34)$$

где  $\varphi_i$  – сдвиг фазы колебаний в  $i$ -й точке конструкции.

Таким образом, параметр  $\lambda$ , определяемый из условия (29), представляет собой взвешенное усредненное значение котангенсов фазовых сдвигов вынужденных колебаний в  $N$  точках, причем вес каждой точки определяется квадратом мнимой составляющей перемещения этой

точки. Отметим, что в ряде работ (см., например, [21, 22]) вводится параметр  $\lambda$  в виде (34) в качестве интегральной характеристики сдвигов фазы колебаний в точках конструкции. Здесь же выражение (34) получено как необходимое условие минимума отклонений вынужденных колебаний от монофазных.

Собственные частоты конструкции будем определять (как и при возбуждении колебаний во всех  $N$  точках) по переходу параметра  $\lambda$  через нуль. При  $L = N$ , а значит  $\alpha = 0$ , из (30) для  $\lambda = 0$  следует условие

$$\det D = 0. \quad (35)$$

Из (32) и (33) следует  $D = \tilde{V}^T (-\omega^2 A + C) H^{-1} H^{-1} (-\omega^2 A + C) \tilde{V}$ , а при независимых столбцах  $\tilde{V}$  и неособенной матрице демпфирования  $\det \tilde{V} \neq 0$ ,  $\det H \neq 0$  условие (35) определяет собственные частоты динамической системы  $\det (-\omega^2 A + C) = 0$  независимо от свойств матрицы демпфирования.

После подбора сил возбуждения и нахождения собственной частоты обобщенная масса и обобщенный коэффициент демпфирования тона рассчитываются по тем же формулам, что и в случае  $L = N$ .

Для определения векторов сил  $E(L)$  и  $F(L)$  немонафазного возбуждения необходимо выполнить два условия: вынужденные колебания должны быть монофазными и вектор мнимых составляющих монофазных колебаний  $V$  должен совпадать с собственным вектором системы на любой частоте. При возбуждении и регистрации колебаний в одних и тех же точках эти условия приводят к уравнениям (16) и (17). Если же  $L < N$ , то приближенное выполнение каждого из условий (минимизация отличия вынужденных колебаний от монофазных и от собственных) дает по  $2L$  уравнений для нахождения компонентов векторов  $E$  и  $F$ , то есть всего  $4L$  уравнений относительно  $2L$  неизвестных. Для приведения в соответствие числа уравнений числу неизвестных используем допущение о том, что для возбуждения колебаний на частоте  $\omega$  можно использовать вектор действительных составляющих возбуждения  $E$ , реализующий режим фазового резонанса [22].

Вектор мнимых составляющих возбуждения  $F$  найдем из условия минимума отличия вектора  $V$  от собственного вектора системы (от вектора  $V$  на собственной частоте), то есть из условия

$$\min G(\eta) = \frac{(V - V^*)^T (V - V^*)}{V^{*T} V^*}.$$

Здесь звездочкой отмечены параметры, соответствующие фазовому резонансу. Представим  $F$  в виде  $F = \tilde{E}\eta$  и преобразуем выражение для  $G(\eta)$ :

$$\min G(\eta) = \frac{(\tilde{U}\eta - \tilde{V}\xi^* - V^*)^T (\tilde{U}\eta - \tilde{V}\xi^* - V^*)}{V^{*T} V^*}. \quad (36)$$

Условие (36) приводит к системе  $L$  уравнений относительно  $L$  компонентов вектора  $\eta$ :

$$\tilde{U}^T \tilde{U} \eta - \tilde{U}^T \tilde{V} \xi^* - \tilde{U}^T V^* = 0.$$

Таким образом, используя свойства вынужденных монофазных колебаний при монофазном и немонофазном возбуждении, можно определить собственные частоты, формы колебаний и обобщенные массы собственных тонов конструкций, установить их диссипативные свойства и вычислить характеристики сил демпфирования.

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДИКИ МОДАЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Объектами испытаний, на которых была опробована предлагаемая методика испытаний, являлись динамически подобная модель (ДПМ) самолета Ту-334, выполненная в масштабе 1:10, самолеты Су-30 и Як-152, электронасосный агрегат (ЭНА) космического аппарата. В испытаниях производились настройки режимов фазовых резонансов для каждого исследуемого тона колебаний модели при монофазном возбуждении, определялись собственные частоты  $p$  и формы колебаний  $W$ . Затем при шаговом изменении частоты в окрестностях фазовых резонансов реализовывались режимы монофазных колебаний и контролировались соотношения между монофазными и собственными колебаниями объектов. Границы этих окрестностей соответствовали двукратному падению амплитуд мнимых составляющих ускорений относительно их резонансных величин.

На рис. 1 представлены частотные зависимости параметра  $\lambda$  монофазных колебаний в контрольных точках ДПМ для нескольких собственных тонов изгиба и кручения крыла. Здесь и далее на рисунках  $\bar{\omega}$  – отношение частоты вынужденных колебаний к частоте фазового резонанса соответствующего тона. Результаты экспериментальных исследований показали, что колебания контрольных точек конструкции в окрестностях частот фазовых резонансов являются монофазными, формы монофазных колебаний сохраняются и совпадают с собственными формами колебаний. Это означает, что исследуемые тона не связаны между собой посредством демпфирования, и матрица демпфирования в нормальной системе координат диагональная.

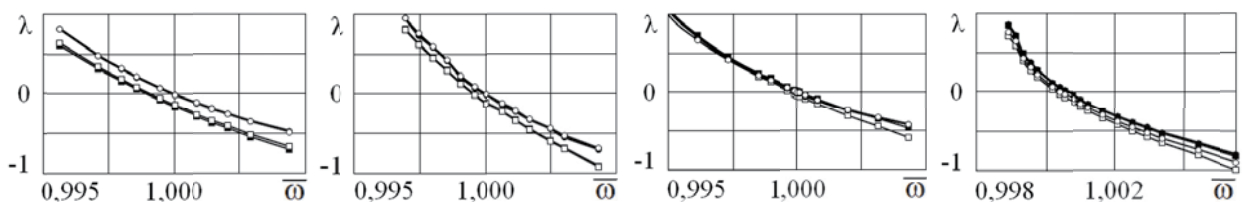


Рис. 1. Частотные зависимости параметра  $\lambda$

По результатам испытаний была построена математическая модель ДПМ, для чего определены обобщенные массы по формуле (20) и обобщенные коэффициенты демпфирования по (21). По модальным параметрам вычислены матрицы инерции, жесткости и демпфирования в нормальной и физической системах координат. Для проверки адекватности модели реальной динамической системе сравнивались расчетные и экспериментальные амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) ДПМ. Результаты представлены на рис. 2, из которого следует, что расчетные и экспериментальные АЧХ достаточно близки между собой.

На основании представленных результатов можно сделать ложный вывод о том, что эти результаты, в части обоснования диагональности матрицы демпфирования в нормальных координатах, приемлемы только для простых конструкций. Конструкция ДПМ самолета действительно является достаточно «простой» с точки зрения отсутствия в ней большого числа различного вида соединений, в которых происходит рассеяние энергии при колебаниях. Ниже, на рис. 3, приведены частотные зависимости параметра  $\lambda$  для низших тонов упругих колебаний самолета Су-30. По этим зависимостям относительно свойств матрицы демпфирования можно сделать те же выводы, что и для матрицы демпфирования ДПМ самолета.

В результатах модальных испытаний – параметрах собственных тонов колебаний – присутствуют, как правило, некоторые погрешности. Причин возникновения этих погрешностей может быть достаточно много, но мы остановимся на нескольких основных. К ним относится взаимное влияние собственных тонов колебаний конструкций, влияния системы упругого вывешивания ЛА в наземных испытаниях на его динамические характеристики в полете, случайные погрешности измерения колебаний в эксперименте.

Следствием взаимного влияния тонов, которое не удастся устранить с помощью многоканальной системы возбуждения, является появление вклада близкого по частоте тона в колебания ЛА по исследуемому тону. Это приводит к смещению частоты фазового резонанса исследуемого тона и к ошибкам в оценках его обобщенных характеристик. Степень взаимного влияния тонов определяется параметрами ([17]):



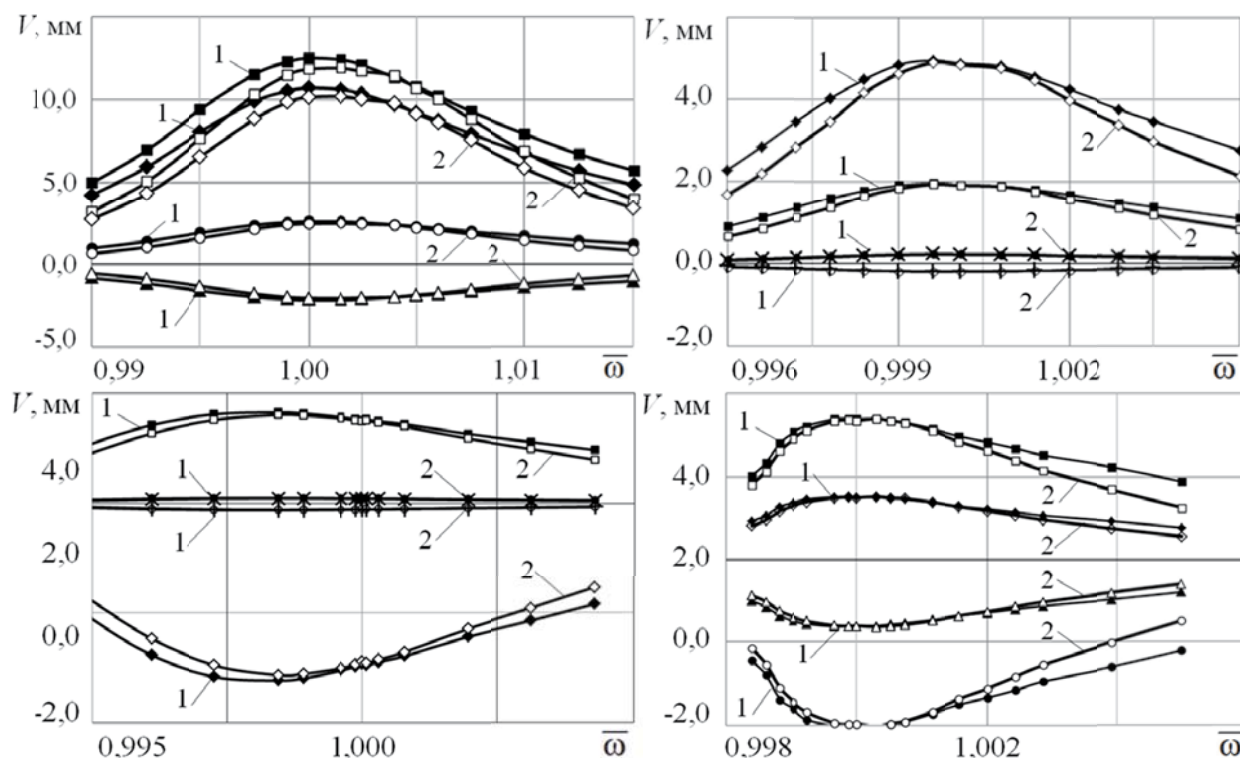


Рис. 2. Сравнение экспериментальных и расчетных АЧХ  
1 – экспериментальные; 2 – расчетные

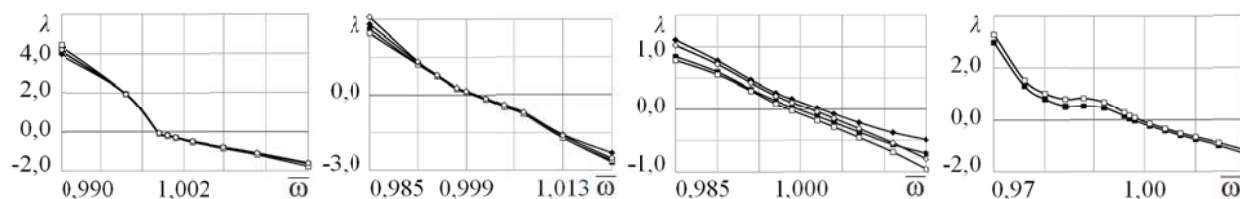


Рис. 3. Частотные зависимости параметра  $\lambda$  для самолета Су-30

$$\zeta = \frac{\beta_{ij}^2 a_i}{a_j}, \quad \gamma = \frac{p_j}{p_i}$$

и зависит от уровня демпфирования колебаний конструкции ЛА. Здесь  $i, j$  – номера тонов с собственными частотами  $p_i, p_j$  и обобщенными массами  $a_i, a_j$ ;  $\beta_{ij}$  – вклад  $j$ -го тона при колебаниях конструкции по  $i$ -му тону. Управлять величиной  $\beta_{ij}$  можно варьированием расстояния точки приложения сил возбуждения от узловой линии тона  $j$ . Для случаев, когда  $\zeta \leq 1$  и декременты колебаний тонов  $\delta_i = \delta_j \leq 0,1$ , взаимное влияние тонов характеризуется, например, следующими цифрами: погрешности оценок собственных частот не превышают  $\approx 1\%$ ; для определения обобщенных характеристик с точностью в 5% независимо от величины  $\gamma$  необходимо, чтобы величина  $\xi$  не превышала 0,05; если различия собственных частот составляют  $\pm 10\%$ , то погрешности обобщенных характеристик не превысят 5%, если  $\zeta \leq 0,4$ .

Влияние системы упругого вывешивания на динамические характеристики ЛА происходит

как за счет добавочных масс и жесткостей системы (можно учесть в расчетах), так и из-за появления тонов колебаний ЛА как жесткого тела на упругих связях ([18]). Особенности этих тонов, оказывающих влияние на упругие колебания ЛА, является высокая обобщенная масса и отсутствие узлов на формах колебаний. Поэтому к системам вывешивания предъявляется требование: частота колебаний ЛА как жесткого тела должна быть не менее чем в 2 раза меньше нижней собственной частоты упругих колебаний ЛА ([1]).

По сделанным в работе [16] оценкам, случайные погрешности измерения колебаний в модальных испытаниях приводят к ошибкам в собственных частотах, на порядок меньших погрешностей измерения колебаний. Погрешности определения обобщенных коэффициентов демпфирования сопоставимы с погрешностями измерения колебаний. Наименьшие погрешности определения обобщенных масс сопоставимы с погрешностями измерения колебаний, но область частот, где реализуется такая точность, зависит от величины ошибок измерений, чис-



ла сил возбуждения, уровня демпфирования в системе и не может быть указано заранее. Погрешности в обобщенных массах резко возрастают при определении их по отклику ЛА вблизи фазовых резонансов.

Рост погрешностей определения обобщенной массы вблизи собственной частоты является следствием уменьшения точности измерений действительной составляющей колебаний в этой области частот, а также смещением частоты фазового резонанса из-за взаимного влияния тонов с близкими собственными частотами. Поэтому целесообразно построить алгоритм расчета обобщенной массы так, чтобы ошибки измерения действительной составляющей не оказывали прямого влияния на точность определения массы. Ниже изложен такой алгоритм.

Примем в качестве обобщенной координаты перемещение точки нормирования формы колебаний тона и запишем выражение для амплитуды этой точки:

$$y = \frac{Q}{\sqrt{(a\omega^2 - c)^2 + h^2}},$$

где  $y$  – амплитуда колебаний точки нормирования тона;  $Q$  – обобщенная сила возбуждения колебаний;  $a$ ,  $c$ ,  $h$  – обобщенная масса, жесткость и демпфирование, являющиеся параметрами осциллятора, описывающего колебания ЛА по исследуемому тону. Определим величины  $a$ ,  $c$ ,  $h$  из условия минимума отличия обобщенных сил  $Q_\kappa$ , реализуемых в эксперименте, от сил  $Q_\kappa^*$ , определяющих амплитуды колебаний осциллятора, равные экспериментальным:

$$\min \sum_{k=1}^M (Q_k^2 - Q_k^{*2})^2, \quad (37)$$

Здесь  $\kappa=1, 2, \dots, M$ ,  $M \geq 3$  – число измерений АЧХ в окрестности частоты фазового резонанса. Условие (37) приводит к следующей системе нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} & a^3 \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^8 - 3a^2 c \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^6 + c \sum_{k=1}^M Q_k^2 y_k^2 \omega_k^2 + \\ & + a \sum_{k=1}^M [y_k^4 \omega_k^4 (3c^2 + h^2) - Q_k^2 y_k^2 \omega_k^4] - c^3 \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^2 - \\ & - ch^2 \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^2 = 0, \\ & a^3 \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^8 - 3a^2 c \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^6 + c \sum_{k=1}^M Q_k^2 y_k^2 + \\ & + a \sum_{k=1}^M [y_k^4 \omega_k^4 (3c^2 + h^2) - Q_k^2 y_k^2 \omega_k^4] - c^3 \sum_{k=1}^M y_k^4 - \end{aligned} \quad (38)$$

$$- ch^2 \sum_{k=1}^M y_k^4 = 0,$$

$$\begin{aligned} & ah^2 \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^4 - 2ach \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^2 - h \sum_{k=1}^M Q_k^2 y_k^2 + \\ & + c^2 h \sum_{k=1}^M y_k^4 + h^3 \sum_{k=1}^M y_k^4 = 0. \end{aligned}$$

Единственное действительное решение системы (38) имеет вид:

$$a = \sqrt{b}, \quad (39)$$

$$c = -(bd_1 + d_3) / d_2 a, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} h = & \left[ \left( \sum_{k=1}^M Q_k^2 y_k^2 - c^2 \sum_{k=1}^M y_k^4 - a^2 \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^4 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2ac \sum_{k=1}^M y_k^4 \omega_k^2 \right) / \sum_{k=1}^M y_k^4 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь

$$f_1 = \sum_{i,j=1}^M y_i^4 y_j^4 \omega_j^4 (\omega_j^4 - \omega_i^4),$$

$$d_1 = \sum_{i,j=1}^M y_i^4 y_j^4 \omega_i^4 (\omega_i^4 - \omega_j^4),$$

$$f_2 = \sum_{i,j=1}^M y_i^4 y_j^4 \omega_j^4 (\omega_j^2 - \omega_i^2),$$

$$d_2 = 2 \sum_{i,j=1}^M y_i^4 y_j^4 \omega_i^2 (\omega_j^2 - \omega_i^2),$$

$$f_3 = \sum_{i,j=1}^M y_i^2 y_j^2 \omega_i^4 (y_i^2 Q_j^2 - y_j^2 Q_i^2),$$

$$d_3 = \sum_{i,j=1}^M y_i^2 y_j^2 \omega_i^2 (y_i^2 Q_j^2 - y_j^2 Q_i^2),$$

$$b = (f_2 d_3 - f_3 d_2) / (f_1 d_2 - f_2 d_1).$$

Формулы (39) – (41) отвечают поставленному условию определения обобщенных характеристик тонов с исключением прямого влияния ошибок измерений действительной составляющей перемещений ЛА. Кроме того, используя решения (39) и (40) можно вычислить собственную частоту тона, которая уже была определена по частоте фазового резонанса. Это позволяет контролировать погрешности оценок обобщенных масс и жесткостей. Важно отметить также, что с переходом от частотно-независимого демпфирования к модели вязкого трения Фойгта с решение системы уравнений (38) для обобщенной массы не меняется.

На рис. 4 показаны результаты оценки погрешности  $\varepsilon_a$  определения обобщенной массы

по (39) при наличии случайных ошибок измерений амплитуд колебаний  $\varepsilon_y$ . Из приведенных результатов видно, что обобщенную массу можно вычислить с высокой точностью даже при высоком декременте колебаний и больших погрешностях измерения перемещений, если учесть в расчете достаточное число точек АЧХ. Так при  $\varepsilon_y = 10\%$  и  $M \geq 20$  величина  $\varepsilon_a \leq 2,5\%$ .

Расчет модальных параметров по (39) и (40) обладает низкой чувствительностью к взаимному влиянию тонов, если различия собственных частот превышают  $\pm 8\%$  (рис. 5). На рисунке  $\bar{a}_i$  и  $\bar{c}_i$  – отношения обобщенных масс и обобщенных жесткостей к соответствующим точным значениям.

Важным практическим приложением ре-

зультатов, представленных на рис. 5, является также то, что они дают основание для снижения требований к жесткости системы упругого вывешивания ЛА на время модальных испытаний.

В табл. 1 приведены погрешности оценок собственных частот колебаний (частот фазовых резонансов) через обобщенные характеристики, рассчитанные по формулам (39) и (40) для ряда изделий. Номера тонов в таблице являются условными потому, что они не совпадают с порядковыми номерами собственных тонов колебаний.

Как следует из представленных результатов, обобщенные массы и жесткости построенных линейных осцилляторов искажают соответствующие собственные частоты не более чем на 1%.

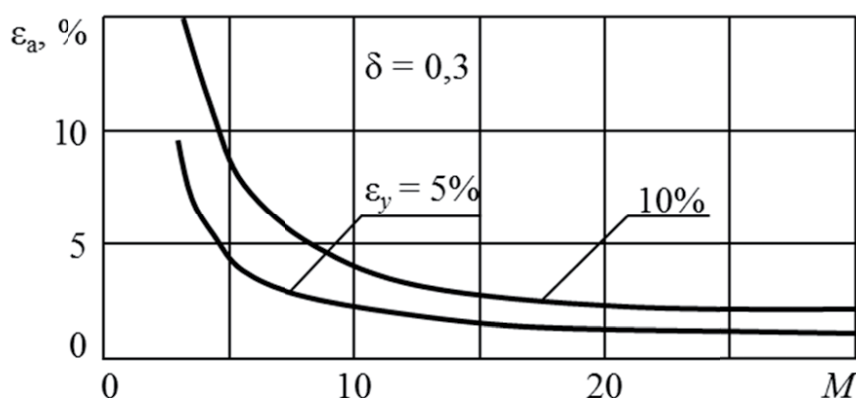


Рис. 4. Погрешности определения обобщенной массы

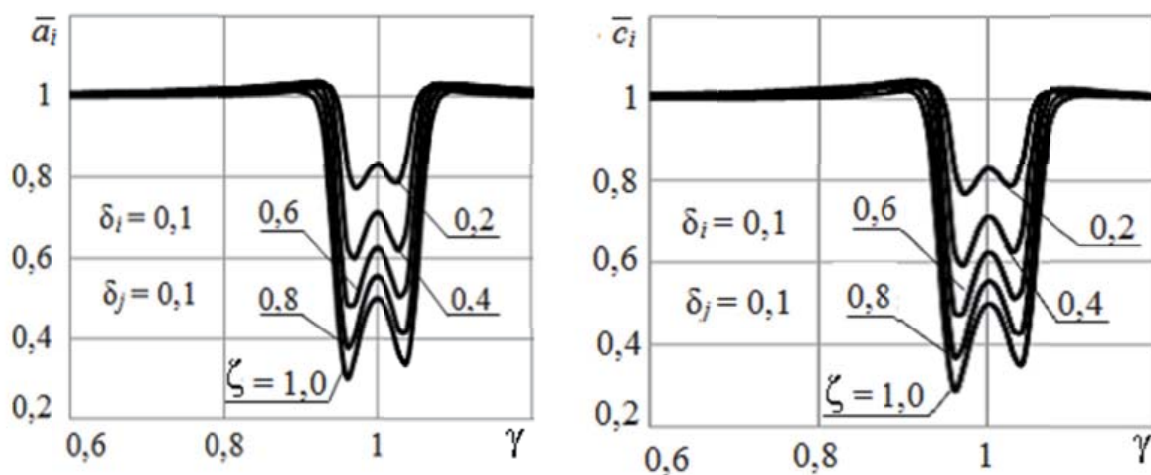


Рис. 5. Оценка обобщенных характеристик в зависимости от  $\gamma$

Таблица 1. Погрешности оценок собственных частот колебаний

Условный № тона	Погрешности частот $\Delta p, \%$			
	ДПМ	Су-30	Як-152	ЭНА
1	0,06	0,41	0,9	0,08
2	0,05	0,27	0,5	0,08
3	0,26	0,11	0,57	0,19
4	0,04	0,22	0,03	0,00
5	0,24	0,42	0,59	-
6	-	0,80	0,80	-

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан метод экспериментального модального анализа летательных аппаратов, основанный на сравнении свойств вынужденных монофазных и собственных колебаний конструкций. Метод не требует принятия гипотез о диссипативных свойствах конструкций и обладает низкой чувствительностью к влиянию тонов с близкими собственными частотами и к погрешностям измерений в результатах испытаний. Достоверность определяемых предложенным методом обобщенных характеристик собственных тонов колебаний подтверждена результатами модальных испытаний динамически подобной модели самолета Ту-334, натурных изделий Су-30 и Як-152, а также агрегата космического аппарата.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О современных методиках наземных испытаний самолетов в аэроупругости / П.Г. Карклэ, В.А. Мамлютин, О.С. Мамедов, В.Н. Поповский, А.В. Смотров, В.И. Смыслов // Уч. записки ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, 2012, вып. 2708. 34 с.
2. Dat R. Determination des modes propres d'une structure par essai de vibration avec excitation non appropriée // Rech. Aerosp. 1973. N. 2. P. 99–108.
3. Dat R., Tretout R., Lafont M. Essais de vibration d'une structure comportant du frottement sec // Rech. Aerosp. 1975. N. 3. P. 169–174.
4. Микишев Г. Н., Рабинович Б.И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М.: Машиностроение, 1971. – 564 с.
5. Смыслов В.И. Некоторые вопросы методики многоточечного возбуждения при экспериментальном исследовании колебаний упругих конструкций // Уч. записки ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского. 1972. Т. III, № 5. С. 110–118.
6. Хейлен В., Ламменс С., Сас П. Модальный анализ: теория и испытания. М.: ООО «Новатест», 2010. – 319 с.
7. Бернс В.А. Модальная идентификация динамических систем на основе монофазных колебаний // Научный вестник НГТУ. 2010. № 3 (40). С. 99–109.
8. Solar Impulse – How to validate the numerical model of a superlight aircraft with A340 dimensions! / М. Böswald, Y. Govers, A. Vollan, M. Basien // Proceedings of ISMA2010 International Conference on Noise and Vibration Engineering including USD2010, Leuven, Belgium, 2010. P. 2451–2466.
9. Advanced GVT Testing of the Gulfstream G650 / R. Brillhart, K. Napolitano, L. Morgan, R. LeBlanc // J. Sound and Vibr. 2011. N. 8. P. 6–9.
10. Peres M.A., Bono R.W., Brown D.L. Practical Aspects of Shaker Measurements for Modal Testing // Proceedings of ISMA2010 International Conference on Noise and Vibration Engineering including USD2010, Leuven, Belgium, 2010. – P. 2539–2550.
11. Modal Parameter Estimation for Large, Complicated MIMO Tests / A. Peter, R. Singhal, B. Peeters, J. Leuridan // J. Sound and Vibr. – 2006. – N. 1. – P. 14–20.
12. Pickrel C.R. Airplane Ground Vibration Testing – Nominal Modal Model Correlation // J. Sound and Vibr. 2002. N. 11. P. 18–23.
13. Васильев К.И., Смыслов В.И., Ульянов В.И. Экспериментальное исследование упругих колебаний летательных аппаратов с помощью многоканального оборудования АВДИ-1Н // Тр. ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского. 1975. Вып. 1634. С. 1–36.
14. Жаров Е.А., Смыслов В.И. Точность определения колебательных характеристик упругой конструкции при резонансных испытаниях с многоточечным возбуждением // Уч. записки ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского. 1976. Т. 7, № 5. С. 88–97.
15. Ушкалов В.Ф. Об оценке погрешностей идентификации линейных механических систем алгебраическим способом // Прикладная механика. 1974. Т. 10. Вып. 9. С. 78–84.
16. Бернс В.А. Оценка точности определения характеристик собственных тонов при наличии случайных ошибок в экспериментальных данных // Вестник СибГАУ. 2010. № 5 (31). С. 208–212.
17. Бернс В.А. Погрешности определения характеристик собственных тонов при близких собственных частотах // Контроль, диагностика. 2011. № 3 (153). С. 12–16.
18. Влияние системы упругого вывешивания на точность результатов модальных испытаний летательных аппаратов / В.А. Бернс, А.В. Долгополов, Е.П. Жуков, Д.А. Маринин // Вестник СГАУ им. С.П. Королева, 2016. Т. 15 № 1. С. 18–27.
19. Baruch M. Optimisation procedure to correct stiffness and flexibility matrices using vibration tests // AIAA Journal, Vol. 16, No. 11, 1978, pp. 1208 – 1210.
20. Межин В.С., Обухов В.В. Практика применения модальных испытаний для целей верификации конечно-элементных моделей конструкции изделий ракетно-космической техники // Космическая техника и технологии. 2014. № 1 (4). С. 86–91.
21. Кононенко В.О., Плахтиенко Н.П. Методы идентификации механических нелинейных колебательных систем. Киев: Наукова думка, 1976. 114 с.
22. Clerc D. Methode de recherche des modes propres par calcul de l'excitation harmonique optimum d'après les résultats bruts d'essais de vibrations // Note technique : ONERA. 1967. № 119. 57 p.

## EXPERIMENTAL MODAL ANALYSIS OF AIRCRAFTS ON THE BASIS OF MONOPHASIC VIBRATIONS

© 2018 V.A. Berns<sup>1,2</sup>, E.P. Zhukov<sup>1</sup>, D.A. Marinin<sup>2</sup>, V.V. Malenkova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Siberian Aeronautical Research Institute named after S.A. Chaplygin, Novosibirsk

<sup>2</sup>Novosibirsk State Technical University

Modal tests of aircrafts are carried out in order to determine eigenfrequencies, modes, generalized masses and damping characteristics of eigentones. These modal parameters are used to estimate the operational loading, strength, controllability and aeroelastic stability of the aircraft. The proposed test method refers to the classical experimental modal analysis of dynamic systems. To realize it, we separate the eigentones of structures in a given frequency range by the phase resonance method using a multichannel system of vibration excitation and measurement. The eigenfrequencies are determined by phase resonances. By the relations between the forced monophasic vibrations and eigenvibrations, the dissipative properties of the dynamic system are revealed. Thus, if monophasic vibrations on monophasic excitation coincide with eigenvibrations at frequencies that differ from eigenfrequencies, then the vibrations of the structure for each eigentone are described by the motion equation of the linear oscillator. The generalized mass, the generalized damping and the generalized stiffness of the corresponding tone are the oscillator parameters. The oscillator parameters are determined by the amplitude-frequency response of the structure in the neighborhood of the phase resonance frequency, from the condition of minimum differences of the generalized forces that realize the same structure and oscillator vibration amplitudes. If monophasic vibrations do not exist in monophasic excitation or do not coincide with the eigenvibrations, then nonmonophasic excitation is used to determine the modal parameters. Advantages of this structural modal characteristics identification method are the reasonableness of the adopted damping model, low sensitivity to vibration measurement errors during testing and to the mutual influence of the tones with close eigenfrequencies, and the possibility to estimate reliability of the generalized masses and stiffnesses determination through the phase resonance frequencies. The reliability of the eigentones generalized characteristics determined by the proposed method is confirmed by the modal test data on the Tu-334 airplane dynamically similar model and the full-scale products Su-30, Yak-152 and the spacecraft unit.

*Keywords:* aircraft, experimental modal analysis, phase resonance, eigenvibrations, monophasic vibrations, eigenfrequency, generalized mass, generalized damping.

---

*Vladimir Berns, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Dynamic Test Department, Professor of the Aircraft Strength Department of the NSTU.*

*E-mail: v.berns@yandex.ru*

*Egor Zhukov, Engineer. E-mail: zh-ep@yandex.ru*

*Dmitry Marinin, Post-Graduate Student.*

*E-mail: marinin@iss-reshetnev.ru*

*Valeriya Malenkova, Engineer. E-mail: malenkova\_vv@mail.ru*