УДК 621.391(075)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

© 2018 В.Р. Крашенинников

Ульяновский государственный технический университет

Статья поступила в редакцию 01.11.2018

Динамика объектов во многих практических ситуациях имеет квазипериодический характер – наличие заметной периодичности со случайными вариациями квазипериодов. Например, шум и вибрация авиационного двигателя, гидроагрегата, сезонные и суточные колебания температуры атмосферы и т.д. Возникающие задачи мониторинга (оценивания состояния объекта и его прогноз) требуют задания модели такого процесса и ее идентификации для конкретного объекта по результатам его наблюдений. В данной работе для представления квазипериодического процесса применяется авторегрессионная модель в виде развертки цилиндрического изображения по спирали. Выбирая значения небольшого количества параметров этой модели, можно описывать и имитировать широкий класс квазипериодических процессов. Рассматривается задача идентификации модели, то есть определения значений ее параметров, при которых она в определенном смысле наилучшим образом соответствует реально наблюдаемому процессу. Эта задача решается с помощью псевдоградиентной адаптивной процедуры, преимуществом которой является ее функционирование в реальном времени с небольшими вычислительными затратами. Кроме того, эта процедура дает возможность идентификации модели при обработке нестационарных процессов, то есть оценивать изменяющиеся параметры модели.

Ключевые слова: Технический объект, квазипериодический случайный процесс, модель, авторегрессия, цилиндрическое изображение, идентификация модели.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть имеется объект, работа которого описывается множеством параметров. Эти параметры регистрируются датчиками через определенные моменты времени, что образует систему временных рядов. Исследования по теории временных рядов или случайных процессов имеют давнюю историю, например, классические монографии [1, 2]. Фиксируемые временные ряды могут быть использованы для описания и прогнозирования динамики объекта с целью принятия оперативных решений по его управлению. При обнаружении выхода контролируемых параметров за предельные значения принимается соответствующее решение, связанное со снижением нагрузки на объект или его аварийной остановкой [3-6]. Для прогнозирования значений этих параметров требуется математическая модель их динамики. Нестабильность поведения объектов обуславливает широкое применение описания динамики в виде случайного процесса.

Часто в динамике контролируемых показателей объекта наблюдается нерегулярная периодичность – квазипериодичность. Квазипериодическое поведение есть повторения с компонентом непредсказуемости, не поддающемуся точному прогнозу. Например, вибрация различных двигателей, турбин и тому подобное. В данной работе для описания динамики квазипериодических процессов предлагается использование авторегрессионных моделей на цилиндре [7-8]. Эта модель при подходящем выборе ее параметров дает возможность описывать и имитировать широкий класс квазипериодических процессов, в том числе нестационарных.

Для адекватного описания конкретного наблюдаемого процесса, предположительно описываемого некоторой моделью, возникает задача идентификации этой модели, то есть нахождения значений ее параметров, при которых модель реализует процесс, максимально приближенный по своим свойствам к наблюдаемому процессу.

АВТОРЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ НА ЦИЛИНДРЕ

Для описания квазипериодических процессов используются различные способы, например, введение гармонических составляющих в явном виде или применение авторегрессионных моделей с комплексными корнями характеристического уравнения. В данной работе будет применено представление таких процессов с помощью изображений. Характерной особенностью квазипериодического процесса (сигнала) является его двойная коррелированность: имеется высокая корреляция как между сосед-

Крашенинников Виктор Ростиславович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика».
E-mail: kvrulstu@mail.ru

ними отсчётами, так и между отсчётами, отстоящими на несколько периодов. Такое свойство имеют различные изображения, описываемые плоскими случайными полями: отсчёты коррелированы и вдоль строк, и вдоль столбцов. Поэтому можно было бы представить квазипериодический сигнал в виде построчной развёртки изображения. Однако при этом конечная точка строки будет приставлена к начальной точке следующей строки. Но на исходном изображении эти точки находятся на большом расстоянии друг от друга, поэтому на этих стыках развёрнутый сигнал будет иметь очень малую корреляцию, несвойственную реальным квазипериодическим процессам.

Коррелированность сигнала на стыках соседних периодов можно получить следующим образом. Рассмотрим цилиндрическое изображение, например, изображение вала вращения. Если его разрезать вдоль и развернуть в плоскость, то оно превращается в прямоугольное изображение. На исходном цилиндрическом изображении точки вдоль линии разреза были рядом, поэтому отсчёты в них сильно коррелированы и сигнал в виде последовательности строк этого разрезанного изображения будет иметь характерные свойства квазипериодического изображения.

Для построения модели цилиндрического изображения рассмотрим спиралевидную сетку на цилиндре, показанную на рис. 1. Строки этой сетки представляют собой витки спирали (винтовой линии). Тогда изображение может рассматриваться как одна последовательность отсчётов вдоль этой спирали, что очень удобно для авторегрессионного представления. Рассмотрим, например, аналог авторегрессионной модели Хабиби [9]:

$$x_{k,l} = s\, x_{k,l-1} + r\, x_{k-1,l} - s\, r\, x_{k-1,l-1} + q\, \xi_{k,l}, \quad (1)$$

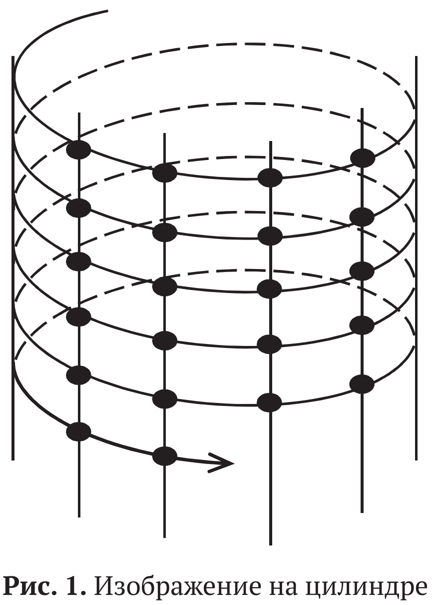

Рис. 1. Изображение на цилиндре

где k – номер витка спирали; l – номер узла в витке; s и r – параметры модели; $\xi_{k,l}$ – независимые стандартные случайные величины; при этом $l = \overline{0, T-1}$; $x_{k,l} = x_{k+1,l-T}$ при $l \geq T$; T – период, то есть количество точек в одном витке. Для использования (1) значения на первом витке должны быть заданы отдельно. Отметим, что в модели (1) сетка может рассматриваться и как обычная цилиндрическая, то есть как последовательность окружностей.

Полученная модель цилиндрического изображения может быть представлена в эквивалентном виде как модель случайного процесса, представляющего собой развёртку изображения вдоль спирали:

$$x_n = s\, x_{n-1} + r\, x_{n-T} - s\, r\, x_{n-T-1} + q\, \xi_n, \quad (2)$$

где $n=kT+l$. Параметр s влияет на коррелированность вдоль строк, то есть на гладкость процесса. Параметр r влияет на коррелированность отсчётов на расстоянии периода. Очевидно, при значениях r, близких к единице, соседние строки изображения (витки спирали) будут сильно коррелированы, поэтому эту модель можно использовать для описания и имитации квазипериодических сигналов.

Ковариационная функция $V(n) = Cov\,(x_k, x_{k+n})$ модели (2) имеет вид

$$V(n) = q^2 \left(\frac{1}{(1-r^2)T} \sum_{k=0}^{T-1} \frac{z_k}{(1-s\,z_k)(z_k - s)} z_k^n + \frac{u}{(1-s^2)(1-ru)(u-r)} s^n \right), \quad (3)$$

где $z_k = \sqrt[T]{r} \exp(i2k\pi / T)$ и $u = s^T$.

В частности, при $n=kT$ получаем ковариации между витками

$$V(kT) = \frac{q^2}{(1-s^2)(1-r^2)(1-ur)(r-u)} \times \\ \times \left((1-u^2) r^{k+1} - (1-r^2) u^{k+1} \right). \quad (4)$$

Из (4) при $k=0$ находим дисперсию процесса

$$\sigma^2 = \frac{q^2 (1+ru)}{(1-s^2)(1-r^2)(1-ru)}. \quad (5)$$

Из этих выражений следует, что ковариационная функция модели (2) является затухающе-периодической (на рис. 2 показан график коэффициента корреляции). Значения этой функции постепенно убывают с увеличением номера периода, то есть с увеличением расстояния значения процесса становятся менее коррелированными, но на расстояниях, кратных периоду, корреляция большая.

2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ

Пусть имеется временной ряд $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ некоторого параметра объекта. Предположим, что этот ряд (хотя бы приближенно) может быть представлен моделью (2), параметры которой неизвестны. Требуется идентифицировать эту модель, то есть подобрать параметры авторе-

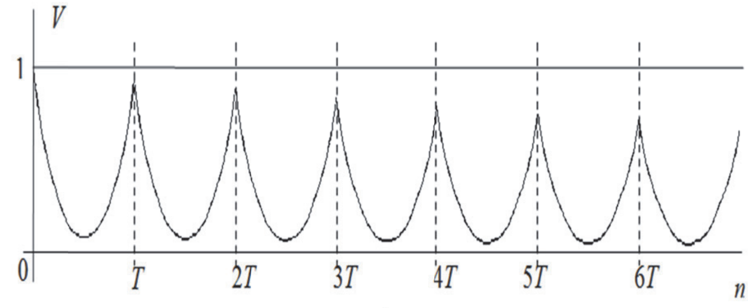

Рис. 2. График корреляционной функции

грессии так, чтобы эта модель наилучшим образом соответствовала ряду *X*. Для определенности будем понимать «наилучшим образом» в смысле минимума среднего квадрата ошибки предсказания ряда на один шаг вперед. В этом случае функционал качества, который следует минимизировать, имеет вид:

$$J(\overline{\alpha}) = J(s,r) = M[(\hat{x}_n - x_n)^2], \qquad (6)$$

где $\hat{x}_n$ - прогноз значения x_n по предшествующим значениям. Учитывая вид модели (2), этот прогноз следует взять в виде:

$$\hat{x}_n = s\, x_{n-1} + r\, x_{n-T} - s\, r\, x_{n-T-1}, \qquad (7)$$

где параметры *s* и *r* подлежат определению в смысле минимума критерия (6).

Возможным подходом к решению данной задачи является нахождение этих параметров по смыслу модели (1) в виде оценок коэффициентов корреляции по отрезку ряда *X* между соседними элементами витка и между соседними витками спирали. Данный подход является по сути идентификационным подходом к адаптации, когда неизвестные параметры заменяются их оценками. Однако недостатком такого построения является дополнительное оценивание межстрочных и внутристрочных коэффициентов корреляции, что ведет к временной задержке. Кроме того, использование оценок этих коэффициентов в качестве параметров модели может не гарантировать наилучшего результата в смысле точности интерполяции или экстраполяции процесса.

Поэтому применим другой подход к идентификации модели – безыдентификационный по параметрам. При этом подходе параметры модели выбираются так, чтобы наилучшим образом обеспечивалось требуемое качество модели, в рассматриваемом случае – оптимальное предсказание процесса.

Пусть задача адаптации формулируется в виде минимизации функции $J(\overline{\alpha}) = J(\overline{\alpha}, Z)$ для конкретной реализации *Z* по параметрам $\overline{\alpha}$, то есть оптимизации параметров выбранной процедуры обработки. Применим для решения этой задачи псевдоградиентную процедуру [8]:

$$\overline{\alpha}_n = \overline{\alpha}_{n-1} - \mu_n \nabla Q(\overline{\alpha}_{n-1}), \qquad (8)$$

где $\overline{\alpha}_n$ – следующее за $\overline{\alpha}_{n-1}$ приближение к точке минимума функции $J(\overline{\alpha})$; μ_n – положительная числовая последовательность, определяющая длину шагов; $\nabla Q(\overline{\alpha}_{n-1}) = \nabla J(\overline{\alpha}_{n-1}, Z_n)$ – усечение градиента критерия $J(\overline{\alpha})$ на небольшую область Z_n наблюдений *Z*. При решении нашей задачи идентификации в качестве $J(\overline{\alpha})$ берется (6). Тогда $Q(\overline{\alpha}_{n-1}) = J(\overline{\alpha}_{n-1}, Z_n)$ – ошибка прогноза наблюдения, то есть

$$Q(\overline{\alpha}_n) = (s\, x_{n-1} + r\, x_{n-T} - s\, r\, x_{n-T-1} - x_n)^2. \qquad (9)$$

Градиент функции (9), состоящий из ее частных производных по *s* и r, легко вычисляется, поэтому реализация процедуры (8) не вызывает затруднений.

Для точной оценки параметров следует выбирать последовательность μ_n убывающей. Однако, если свойства временного ряда изменяются со временем, то и оптимальные значения параметров модели становятся переменными. Поэтому для их отслеживания следует эту последовательность ограничивать снизу, например, взять постоянной. Конкретные значения зависят от индивидуальных свойств поступающих данных и подбираются опытным путем.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В экспериментах определялось СКО ошибки прогноза на один шаг. Проведенные эксперименты на реальных и имитированных процессах позволили сделать следующие выводы.

Если временной ряд точно описывается моделью (1), то идентификации по оценкам корреляции и псевдоградиентная давали практически одинаковые результаты. Псевдоградиентная идентификация была точнее на несколько процентов при зашумлении наблюдений некоррелированными нормальными помехами с отношением сигнал/шум порядка 0db. Аналогичные результаты получались при нестационарных временных рядах. При очень сильных шумах оба метода давали близкие результаты. Псевдоградиентный метод существенно выигрывал (на десятки процентов) при даже незначительных отклонениях временного ряда от модели (2), когда, например, в этой модели коэффициент при x_{n-T-1} изменен на 1-2% при неизменных значениях других параметров. Следует отметить, что для обоих методов большое значение имеет правильное определение продолжительности T квазипериода. Однако для процессов рассматриваемого класса T легко определяется, например, по пику коэффициента корреляции [10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложено при моделировании квазипериодической динамики технических объектов в виде отсчётов по спирали на цилиндрическом изображении использовать псевдоградиентную процедуру подбора параметров этой модели по заданному критерию, например, по оптимизации прогноза процесса. Эта процедура позволяет производить индентификацию модели в реальном времени для стационарных и нестационарных процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М.: Мир, 1974. 242 с.
2. *Андерсон Т.* Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976. 756 с.
3. *Кувайскова Ю.Е.* Методика структурно-параметрической идентификации системы временных рядов // Известия Самарского научного центра РАН. 2013. Т. 15. № 4(4). С. 914-918.
4. *Клячкин В.Н., Кувайскова Ю.Е., Алёшина А.А.* Моделирование вибраций гидроагрегата на основе адаптивных динамических регрессий // Автоматизация. Современные технологии. 2014. № 1. С. 30-34.
5. *Кувайскова Ю.Е.* Моделирование состояния объекта на основе адаптивных динамических регрессий // Известия Самарского научного центра РАН. 2014. Т. 16. № 6(2). С. 479-482.
6. Информационно-математическая система раннего предупреждения об аварийной ситуации / *Клячкин В.Н., Кувайскова Ю.Е., Алёшина А.А., Кравцов Ю.А.* // Известия Самарского научного центра РАН. 2013. №4(4). С. 919-923.
7. *Krasheninnikov V.R., Kalinov D.V., Pankratov Yu.G.* Spiral Autoregressive Model of a Quasiperiodic Signal // Pattern Recognition and Image Analysis. Vol. 11. No. 1. 2001. P. 211–213.
8. *Krasheninnikov V.R., Vasil'ev K.K.* Multidimensional Image models and processing // Intelligent Systems Reference Library. Vol. 135. 2017. P. 11-64.
9. *Хабиби А.* Двумерная байесовская оценка изображений // ТИИЭР. 1972. Т. 60. №7. С. 153-159.
10. *Серебренников М.Г., Первозванский А.А.* Выявление скрытых периодичностей. М.: Наука, 1965. 244 с.

IDENTIFICATION OF THE CYLINDRICAL MODEL OF THE QUASI-PERIODIC PROCESS

Ulyanovsk State Technical University

The dynamics of objects in many practical situations has a quasi-periodic character – the presence of noticeable periodicity with random variations of quasi-periods. For example, the noise and vibration of an aircraft engine, hydraulic unit, seasonal and daily variations in atmospheric temperature, etc. The arising tasks of monitoring (assessing the state of an object and its forecast) require the specification of a model of such a process and its identification for a specific object based on the results of its observations. In this paper, an auto-regression model is used to represent a quasi-periodic process in the form of a spiral scan of a cylindrical image. The choice of the values of a small number of parameters of this model makes it possible to describe and simulate a wide class of quasi-periodic processes. The problem of identifying a model, that is, determining the values of its parameters, for which it corresponds to a real, best observed process in a certain sense, is considered. This problem is solved using a pseudogradient adaptive procedure, the advantage of which is its operation in real time with low computational costs. In addition, this procedure makes it possible to identify the model when processing non-stationary processes, that is, to estimate the changing parameters of the model.

Keywords: Technical object, quasi-periodic random process, model, autoregression, cylindrical image, model identification.

Victor Krasheninnikov, Doctor of Technics, Professor, Head of the Department «Applied Mathematics and Computer Science». E-mail: kvrulstu@mail.ru