УДК 004.94

ПОИСК И ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИИ АППРОКСИМАЦИИ ПРИ АНАЛИЗЕ ДАННЫХ ИСПЫТАНИЙ УЗЛОВ ГТД

© 2019 А.Н. Даниленко, Д.А. Попова-Коварцева

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва

Статья поступила в редакцию 12.12.2018

В данной работе проводится построение модели поведения коэффициента потерь в турбинных решётках газотурбинного двигателя (ГТД) в зависимости от её параметров. Рассматриваются факторы, влияющие на работу газотурбинных двигателей, и методы обработки данных испытаний узлов ГТД. Был разработан алгоритм и реализовано соответствующее ему программное обеспечение для анализа данных стендовых испытаний газотурбинного двигателя. Программа позволяет получить математическую модель, описывающую поведение коэффициента потерь ступени турбины в зависимости от её параметров. Программа предоставляет возможность настройки процесса поиска коэффициентов регрессионной модели и процесса оптимизации полученной модели. Возможно сохранение результатов обработки в текстовый файл.
Ключевые слова: Регрессионный анализ; газотурбинный двигатель; деформируемый многогранник Нелдера-Мида, коэффициент потерь, оптимизация функции

ВВЕДЕНИЕ

Проектирование и производство авиационных газотурбинных двигателей (ГТД) было и остается одной из сложнейших научных и технических задач нашего времени. Современные методы численного моделирования позволяют использовать методы оптимизации для создания и доводки современных газотурбинных двигателей (ГТД), учитывая их противоречивые требования надёжности и газодинамической эффективности.

Высокие нагрузки во время работы, сложность и стоимость двигателя, а также сильное влияние пусков и остановок на его ресурс, делает стендовые испытания не только сложной, но и очень дорогой задачей, что определяет необходимость математического описания поведения двигателя, основывая на уже полученных данных с предыдущих испытаний. Это приведёт к существенному снижению стоимости нахождения функций, описывающих важные характеристики газотурбинного двигателя.

При отсутствии достаточного объема информации о моделируемом объекте уравнения математического описания могут представлять собой систему эмпирических зависимостей, полученных в результате обработки массива статистических данных. Для построения таких зависимостей и определения их параметров в данной работе будут использоваться методы регрессионного анализа.

Даниленко Александра Николаевна, кандидат технических наук, доцент кафедры программных систем.
E-mail: danilenko.al@gmail.com
Попова-Коварцева Дарья Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры программных систем.
E-mail: dakkovr@mail.ru

ОПИСАНИЕ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ

Ступень турбины состоит из: входной системы, рабочего колеса и выходного диффузора. Улитка радиальной турбины, предназначенная для равномерного подвода рабочего тела к сопловому аппарату по окружности от подводящего коллектора. Течение в улитке турбины сопровождается ускорением потока и расширением газа. Щелевой канал и сопловой аппарат предназначены для ускорения потока. Щелевой канал представляет собой радиальную или наклонную щель, в которой газ течёт от периферии к центру турбомашины. СА выполняет те же функции, но в нём расширение происходит в неподвижном венце с каналами сужающейся формы. СА часто устанавливается после сборной улитки для выравнивания потока на входе РК. Выходной диффузор (расширяющийся канал) предназначен для снижения статического давления на выходе из РК турбины. Это увеличивает перепад давления на ней, что в свою очередь повышает работу [1].

Ступень осевой турбины – это совокупность неподвижного соплового аппарата и подвижного рабочего колеса. Течение реального рабочего тела в лопаточном венце турбомашины имеет сложный пространственный и нестационарный характер. Так совместно с основным течением рабочего тела существуют паразитные течения, на существование которых тратиться энергия. Она в свою очередь не идёт на выполнение основной функций турбомашины и является потерей. В межлопаточном канале турбомашины различают несколько видов потерь. Их классификация приведена на рис. 2.

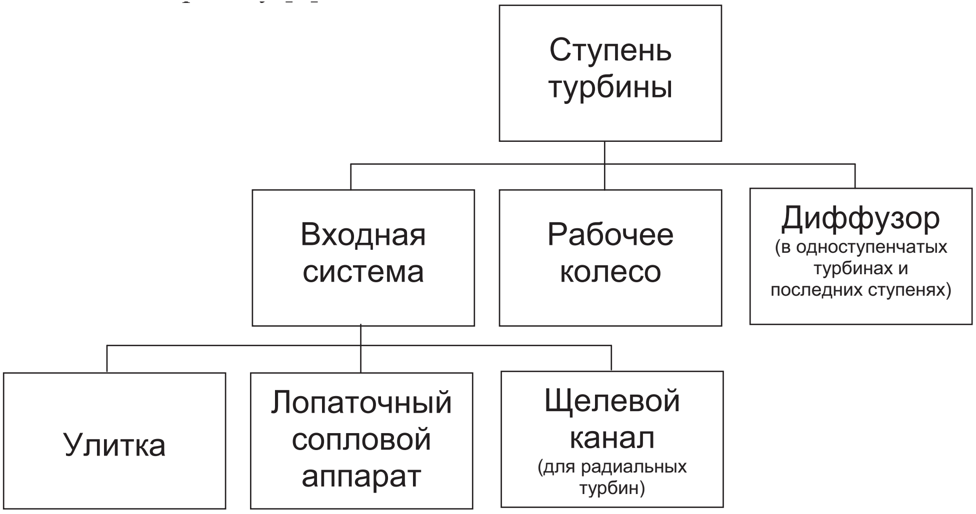

Рис. 1. Обобщенный состав ступени турбины

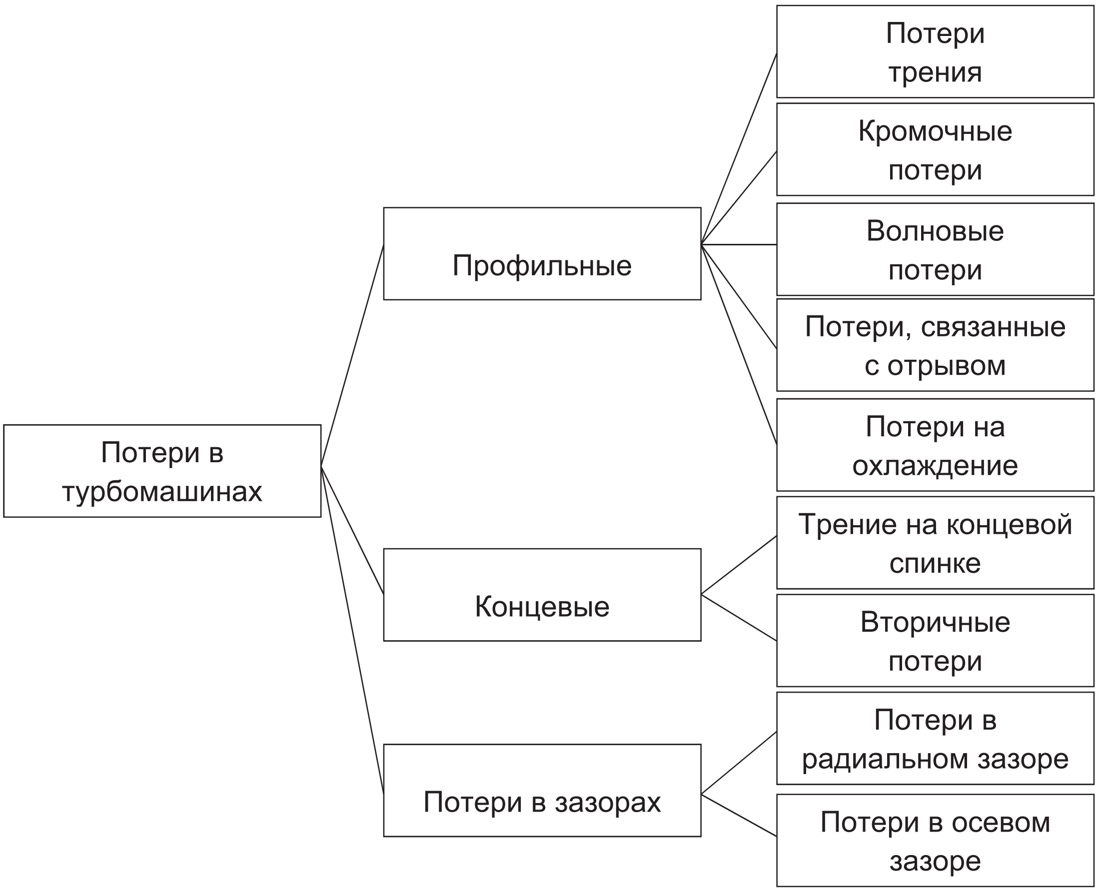

Рис. 2. Классификация потерь энергии в лопаточных машинах

Каждый вид потерь характеризуется соответствующим коэффициентом потерь, который представляет собой отношение абсолютной величины конкретного вида потерь энергии к теоретической работе газа в решетке.

От построения модели поведения коэффициента потерь в турбинных решётках газотурбинного двигателя зависит эффективность всего двигателя [1].

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ ДВИГАТЕЛЯ

Регрессионным анализом называется метод исследования влияния одной или нескольких независимых переменных на одну зависимую. Его целью является предсказание значение зависимой переменной с помощью независимых и определение вклада отдельных независимых переменных в вариацию зависимой.

Существует множество видов регрессий, однако наиболее часто используются линейная и полиномиальная. Линейной регрессией называют модель, в которой зависимая переменная описывается полиномом первой степени и в общем виде описывается формулой 1:

$$f(x,b) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_kx_k\,, \quad (1)$$

где bj – коэффициенты регрессии, xj – регрессоры или параметры модели, k – количество параметров модели.

В полиномиальной регрессии зависимая переменная описывается полиномом r-й степени и в общем виде описывается формулой 2.

$$f(x,b) = b_0 + \sum_{j=1}^{k} b_jx_j + \sum_{j=1}^{k} b_{uj}x_jx_u + \sum_{j=1}^{k} b_{jj}x_j^2 + \cdots \quad (2)$$

Для определения коэффициентов регрессии в данной работе будет использоваться метод наименьших квадратов. Сущность которого заключается в выборе в качестве меры близости суммы квадратов разностей наблюдаемой зависимой переменной и соответствующему ей набору независимых переменных. Он основан на минимизации суммы квадратов отклонений некоторых функций от искомых переменных. Таким образом, сущность МНК может быть выражена следующей формулой:

$$\sum_i (y_i - f_i(x))^2 \to \min.$$

В случае, если система уравнений имеет решение, то минимум суммы квадратов будет равен нулю и могут быть найдены точные решения системы уравнений аналитически или, например, различными численными методами оптимизации. Если система переопределена, то есть, говоря нестрого, количество независимых уравнений больше количества искомых переменных, то система не имеет точного решения и метод наименьших квадратов позволяет найти некоторый «оптимальный» вектор x в смысле максимальной близости векторов y и f(x) или максимальной близости вектора отклонений к нулю [3].

Перейдём к матричному виду линейной модели, описанной в формуле 1:

$$Y=XB,$$

где B – вектор коэффициентов регрессии, X – матрица значений независимых переменных, Y – вектор значений зависимой переменной. Такая система уравнений, в общем случае не имеет решения. Поэтому эту систему можно «решить» только в смысле выбора такого вектора B, чтобы минимизировать «расстояние» между векторами XB и Y. Для этого можно применить критерий минимизации суммы квадратов разностей левой и правой частей уравнений системы, то есть $(XB - Y)^T(XB - Y) \to \min$. Нетрудно показать, что решение этой задачи минимизации приводит к решению следующей системы уравнений, записанных в формуле 3.

$$X^TXB = X^tY \to B = (X^TX)^{-1}X^TY \quad (3)$$

Коэффициенты линейно регрессии будут находиться по методу, описанному в формуле 3.

Адекватность математической модели оценивается с помощью нахождения среднеквадратичного отклонения.

Среднеквадратичным отклонением называется наиболее распространенный показатель рассеивания значений случайной величины относительно её математического ожидания. При ограниченных массивах выборок значений вместо математического ожидания используется среднее арифметическое совокупности выборок. Среднеквадратичное отклонение вычисляется по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

где $\bar{x}$ – среднее арифметическое совокупности выборок.

Подбор оптимальных параметров ГТД осуществляется методом многогранника Нелдера Мида [4].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Перед авторами поставлена задача – разработать алгоритм получения математической модели, описывающей зависимость коэффициента потерь ступени турбины от параметров ГТД, основываясь на массиве статистических данных, полученных на стендовых испытаниях.

Задачи:

- для произвольного массива данных вычислять влияние на коэффициент потерь параметров ГТД;
- составить регрессионную модель для оценки влияния параметров ГТД на коэффициент потерь;
- на основе полученной модели оптимально или квазиоптимально подбирать параметры ГТД для минимизации коэффициента потерь.

Алгоритм должен на основании массива данных со стендовых испытаний узлов ГТД с помощью многофакторной регрессионной модели и метода Нелдера-Мида описывать модель, обеспечивающую минимальное среднее значение коэффициент потерь ступени турбины. На значения параметров ГТД накладывается ограничение в виде множества допустимых значений для каждого параметра.

ПОЛУЧЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ РЕГРЕССИИ

Получение линейной модели регрессии осуществляется путём анализа массива входных данных и оценки параметров линейной регрессии методом наименьших квадратов. Сначала строится матрицы X которая состоит из значений параметров ГТД и имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}.$$

Матрица X имеет размерность $n \times k + 1$, где n – размер выборки, k+1 – количество независимых переменных.

Затем строится вектор Y состоящий из n значений зависимой переменной

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

После построения названных выше матриц находится вектор B путём решения системы линейных уравнений через умножение матриц:

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

В результате будут получены значения вектора B, содержащего коэффициенты регрессии для каждой независимой переменной.

ПОЛУЧЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РЕГРЕССИИ

После получения линейной модели регрессии строится новая матрица X для получения коэффициентов полиномиальной регрессии второго порядка. Она отличается от предыдущей и содержит не только непосредственные значения независимых переменных, но и их квадраты и произведения:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1k} & x_{11}^2 & x_{11}x_{12} & \cdots & x_{1k}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nk} & x_{n1}^2 & x_{n1}x_{n2} & \cdots & x_{nk}^2 \end{pmatrix}.$$

Вектор Y остается без изменений. После решения системы линейных уравнений методом из предыдущего подраздела будет получен вектор значений коэффициентов регрессии B не только для независимых переменных, но и для их квадратов и попарных произведений, что может помочь более точно описать поведение зависимой переменной.

Для получения регрессионных моделей более высокого порядка r матрица X для порядка r-1 дополняется значениями перемножений r параметров и из их значений в соответствующей степени [4].

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ ПОЛИНОМА

Очевидно, что модель тем адекватнее, чем ближе она к исходным данным. Математически эту адекватность модели можно проверить рассчитав среднеквадратическое отклонение между исходными данными и данными полученными на основе модели.

В случае, если для полиномиальной регрессии второго порядка среднеквадратичное отклонение меньше чем для линейной, то строится модель более высокого порядка до тех пор, пока среднеквадратичное отклонение для модели порядка r+1 не будет больше чем для модели порядка r. После выполнения этого условия порядок r может считаться оптимальным для описания входных данных, и поведение зависимой переменной будет описываться многочленом степени r [5].

ПОДБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ГТД

После получения достаточно адекватной модели рассчитывается оптимальные значения параметров ГТД, которые позволят минимизировать среднее значение коэффициента потерь.

Для нахождения этих параметров используется метод деформируемого многогранника Нелдера-Мида, который позволяет найти безусловный минимум функции n переменных. Так как в данной работе на значения параметров ГТД накладывается ограничение в виде множества допустимых значений, то, если точка многогранника выйдет за пределы допустимой зоны, она будет спроецирована на границу допустимых значений [6].

Параметрами метода являются:

- коэффициент отражения α>0, обычно выбирается равным 1;
- коэффициент сжатия β>0, обычно выбирается равным 0.5;
- коэффициент растяжения γ>0, обычно выбирается равным 2.

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ МИНИМУМА ФУНКЦИИ

Алгоритм нахождения минимума функции заключается в следующем:

1. *подготовка*. Выбор *n*+1 точки x_i которые образуют многогранник *n*-мерного пространства. Находим значения функции $f_i(x_i)$;

2. *сортировка*. Выберем три точки: x_h с наибольшим значением функции f_h, x_g со следующим по величине значением f_g и x_l с наименьшим значением функции f_l. Цель – дальнейшее уменьшение f_h;

3. нахождение центра тяжести всех точек за исключением x_h: $x_c = \frac{1}{n}\sum_{i \neq h} x_i$;

4. *отражение*. Отразим точку x_h относительно x_c с коэффициентом α, получим точку $x_r x_r$ и вычислим в ней функцию: $f_r = f(x_r)$

$f_r = f(x_r)$. Координаты новой точки вычислим по формуле: $x_r = (1+\alpha)x_c - \alpha x_h$;

5. проверяем насколько уменьшилась функция, находя положение f_r в ряду f_h, f_g, f_l:

- если $f_r < f_l$, то направление правильное, можно увеличить шаг. Производим *«растяжение»*. Новая точка $x_e = (1-\gamma)x_c + \gamma x_r$ и значение функции $f_e = f(x_e)$. Если $f_e < f_r$, то расширяем многогранник до этой точки, присваивая точке x_h значение x_e, переходим на шаг 9. Если $f_r < f_e$, то переместились слишком далеко: присваиваем точке x_h значение x_r и переходим на шаг 9;

- если $f_l < f_r < f_g$, то новая точка лучше двух предыдущих. Присваиваем точке x_h значение x_r и переходим на шаг 9;

- если $f_g < f_r < f_h$, то меняем местами значения x_r и x_h, f_r и f_h. После этого переходим на шаг 6;

- если $f_h < f_r$, то переходим на следующий шаг 6.

6. *сжатие*. Строим точку $x_s = \beta x_h + (1-\beta)x_c$ и вычисляем в ней значение $f_s = f(x_s)$;

7. если $f_s < f_h$, то присваиваем точке x_h значение x_s и переходим на шаг 9;

8. если $f_s > f_h$, то первоначальные точки оказались самыми удачными. Делаем глобальное сжатие многогранника к точке с наименьшим значением $x_i \leftarrow x_l + \frac{x_i - x_l}{2}, i \neq l$;

9. *проверка сходимости*. Проверяем взаимную близость полученных вершин многогранника к искомому минимуму. Если требуемая точность еще не достигнута, переходим на шаг 2.

Вычисленные с помощью данного метода значения параметров ГТД обеспечивают минимальное значение коэффициента потерь для полученной ранее модели.

РЕЗУЛЬТАТЫ

С помощью реализованной программы был проведен ряд экспериментов с результатами стендовых испытаний узлов ГТД. На рис. 3 изображена часть входных данных, использованных для экспериментального исследования.

Данные результаты испытаний были введены в программу и проанализированы. Результат был выведен в текстовое поле на главной форме программы и представлен на рисунке 4. В результате с помощью метода наименьших квадратов были получены оптимальная степень полинома, показатели зависимости коэффициента потерь от параметров ГТД, а также с помощью метода деформируемого многогранника были найдены оптимальные значения параметров ГТД, при которых значение среднее значение коэффициента потерь минимально.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В соответствии с поставленной задачей был проведён анализ предметной области, представляющей из себя методы испытания узлов ГТД.

Разработаны алгоритмы учёта каждого фактора, оказывающего влияние на выбранный критерий эффективности системы и на их основе составлен алгоритм анализа входных данных и оптимизации полученной модели.

№ Решетки	λ1s	ζ	β1	β1л	β2эф	См/b	t/b	отгиб δ	d1/b	d2/ar	гамма	Xc	ar/b	хорда (b)
1	0,71829643	0,02023137	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	0,74686502	0,01968561	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	0,77906167	0,02045719	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	0,79784863	0,02014311	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	0,819427	0,01968127	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	0,83495393	0,01980832	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	0,8515312	0,02026033	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	0,86538736	0,0176204	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	0,89183463	0,01693237	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	0,90551455	0,0176204	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	0,92365333	0,01738713	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	0,93826337	0,01990646	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	0,94506538	0,02310832	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	0,95354121	0,02955444	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	0,96723412	0,03069078	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	0,95943601	0,03964417	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	0,97367014	0,04044139	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	1,00380201	0,03908224	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	0,98277836	0,04531854	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	1,04213619	0,05545991	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	1,03469924	0,06108693	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	1,02399716	0,06170784	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05
1	1,05855173	0,06387203	105	105,54	16,95	0,128	0,673	16,39	0,094	0,082	34,76	0,25	0,196	82,05

Рис. 3. Часть входных данных:
λ1s – число Лаваля, определяющее изоэнтропическую скорость потока на входе в рабочее колесо (РК), ζ – коэффициент потерь в РК, β1 – угол потока в относительном движении на входе в РК, β1л – лопаточный угол на входе в РК, β2эф – эффективный угол потока в относительном движении на выходе из РК, См/b – отношение максимальной толщины профиля к хорде, t/b – относительный шаг решетки профилей РК, отгиб δ – угол отставания потока на выходе из РК, d1/b – отношение диаметра кромки лопатки к хорде лопатки, d2/ar – отношение диаметра втулки лопатки к горлу решётки, гамма – угол установки профиля, Xc – положение точки максимальной толщины лопатки, ar/b – отношение горла решетки профилей к хорде, хорда (b) – хорда лопатки РК

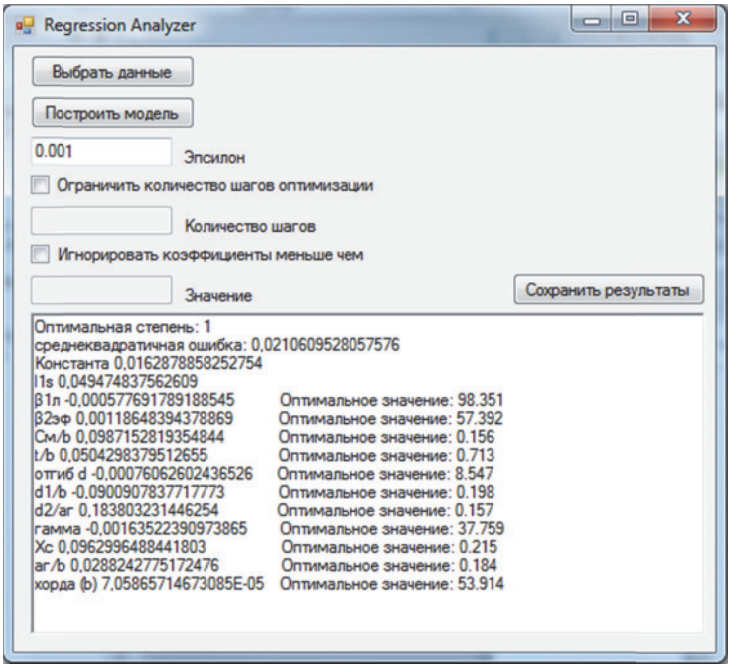

Рис. 4. Результат выполнения программы

Реализована программа, реализующая каждую ступень алгоритма: построение регрессионной модели, нахождение оптимальной степени полинома, оптимизация полученной модели.

Подтверждена точность и адекватность составленной модели, по набору реальных данных. Так как значение полученной из метода наименьших квадратов ошибка приближения, составляющая не более 2% от значения критерия, можно использовать её на практике. Внесение реализованного алгоритма в перечень инструментов испытателей ГТД должно привести к упрощению выбора параметров ГТД при его настройке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Батурин О.В.* Конспект лекций по теории и расчету лопаточных машин. Самара: Издательство СГАУ, 2011, 241 с.
2. *Тихонов Н. Т., Мусаткин Н. Ф., Матвеев В. Н.* Теория лопаточных машин авиационных газотурбинных двигателей. Самара: Издательство СГАУ, 2001, 154 с.
3. *Дрейпер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. Множественная регрессия. М.: «Диалектика», 2007, 912 с.
4. *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир. 1998.
5. *Доугерти К.* Введение в эконометрику. М.: ИНФРА-М, 1999, 402 с.
6. *Стрижов В.* В. Методы индуктивного порождения регрессионных моделей. М.: ВЦ РАН. 2008, 55 с.

APPROXIMATION FUNCTION IDENTIFICATION AND OPTIMIZATION IN THE TESTS DATA ANALYSIS OF GTE COMPONENTS

© 2018 A. N. Danilenko, D. A. Popova-Kovartseva

Samara National Research University named after Academician S.P. Korolyov

In the paper we model the behavior of the loss coefficient in the turbine grids of a gas turbine engine (GTE), depending on its parameters. Factors affecting the operation of gas turbine engines and methods for processing test data of gas turbine engine components are considered. An algorithm was developed and the corresponding software for analyzing the bench test data of a gas turbine engine was implemented. The program allows us to get a mathematical model that describes the behavior of the loss rate of the turbine stage, depending on its parameters. The program provides the ability to customize the process of finding the coefficients of the regression model and the process of optimizing the resulting model. It is possible to save the processing results to a text file.

Keywords: Regression analysis; gas turbine engine; deformable Nelder – Mead polyhedron, loss coefficient, function optimization.

Aleksandra Danilenko, Candidate of Technics, Associate Professor of Software Systems Department.
E-mail: danilenko.al@gmail.com
Darya Popova-Kovartseva, Candidate of Technics, Associate Professor of Software Systems Department.
E-mail: dakkovr@mail.ru