

УДК 539.3

**МЕТОД ОСВОБОЖДЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ
РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА**

© 2019 Д.А. Красноруцкий^{1,2}, В.А. Бернс^{1,2}, П.А. Лакиза^{1,2}, В.Е. Левин²

¹ ФГУП «СибНИА им. С.А. Чаплыгина» (СибНИА), г. Новосибирск

² Новосибирский государственный технический университет (НГТУ)

Статья поступила в редакцию 15.02.2019

Расчетные динамические модели разрабатываются на этапе проектирования летательного аппарата (ЛА) и используются в оценках эксплуатационной нагруженности, обеспечении прочности, управляемости и аэроупругой устойчивости ЛА. Эти модели сопровождают экспериментальные исследования, опытную и серийную эксплуатацию ЛА. При этом расчетные модели корректируются по результатам наземных модальных испытаний. Расчетной моделью ЛА является, как правило, модель свободной динамической системы. В то же время для модальных испытаний авиационная техника либо устанавливается на шасси, либо помещается на специальную систему упругого вывешивания, а космические конструкции – на систему обезвешивания. В настоящей работе предлагается метод освобождения закрепленной динамической расчетной модели ЛА после проведения процедуры прямой коррекции её матриц жесткости и/или масс. Такая коррекция приводит к тому, что сделать модель свободной невозможно непосредственным возвращением убранных при закреплении модели степеней свободы. Предлагаемый метод позволяет освободить модель от закреплений при условии, что известны инерционные характеристики свободной конструкции. А именно: масса и массовые моменты инерции относительно некоторой точки, например, центра тяжести. Метод основан на том, что закрепленная модель ставится на виртуальную подвижную платформу, которая имеет инерционные характеристики исходной свободной конструкции. Это позволяет описывать в модели движение конструкции как жесткого тела. Движение платформы влияет через инерционные силы на закрепленную модель, обратное влияние осуществляется через сумму всех сил инерции модели, которая, по сути, является реакцией в закреплении. Система уравнений движения закрепленной модели дополнена уравнениями движения платформы, силы инерции, обусловленные движением как жесткого целого, добавлены в каждое уравнение движения модели. Кроме того, осуществлен переход от локальной системы координат, связанной с закрепленной моделью, к глобальной системе координат. Полученные уравнения не нарушают симметрию матриц жесткости и масс. Частоты и формы собственных колебаний освобожденной модели близки к соответствующим частотам и формам свободной модели. Реализация метода проиллюстрирована для математической модели набора линейных осцилляторов. Показан пример освобождения условной балочной модели самолета, установленного на шасси.

Ключевые слова: летательный аппарат, расчетная динамическая модель, модальные испытания, коррекция расчетной модели, освобождение расчетной модели.

ВВЕДЕНИЕ

Расчетные динамические модели разрабатываются на этапе проектирования летательного аппарата (ЛА). Они используются в оценках

эксплуатационной нагруженности, обеспечении прочности, управляемости и аэроупругой устойчивости ЛА. По завершению расчетного этапа изготавливается динамически подобная модель (ДПМ) ЛА и проблема аэроупругой устойчивости решается экспериментально [1, 2]. Затем строится опытное изделие, а за ним и серийные. Расчетные динамические модели сопровождают экспериментальные исследования, опытную и серийную эксплуатацию ЛА. При этом расчетные модели корректируются по результатам наземных модальных испытаний, которым подвергаются ДПМ, опытные и выборочно серийные ЛА [1 – 10].

Важно отметить, что расчетной моделью ЛА является модель свободной динамической системы. В то же время для модальных испытаний авиационная техника либо устанавливается на

Красноруцкий Дмитрий Александрович, кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник СибНИА, доцент кафедры «Прочность летательных аппаратов» НГТУ. E-mail: krasnorutskiy@corp.nstu.ru
Бернс Владимир Андреевич, доктор технических наук, доцент, начальник отдела динамических испытаний СибНИА, профессор кафедры «Прочность летательных аппаратов» НГТУ. E-mail: v.berns@yandex.ru
Лакиза Павел Анатольевич, магистрант кафедры «Прочность летательных аппаратов» НГТУ, инженер СибНИА. E-mail: qinterfly@gmail.com
Левин Владимир Евгеньевич, доктор технических наук, доцент, зам. зав. кафедрой «Прочность летательных аппаратов» НГТУ. E-mail: v.levin@corp.nstu.ru

шасси, либо помещается на специальную систему упругого вывешивания, а космические конструкции – на систему обезвешивания. Системы упругого вывешивания и обезвешивания, влияние которых на свободную конструкцию строго регламентировано [11], являются сложными и дорогостоящими техническими сооружениями. Кроме того, известные методы коррекции математических моделей конструкций не предполагают использование моделей для граничных условий, отличных от тех, что были реализованы в эксперименте [12 – 19]. В настоящей работе предлагается метод освобождения динамической расчетной модели ЛА после проведения процедуры ее коррекции.

МЕТОД ОСВОБОЖДЕНИЯ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ

Пусть имеется скорректированная по результатам испытаний закрепленная конечно-элементная (КЭ) модель L некоторой упруго-массовой конструкции. Модель описывается матрицами жесткости K и масс M , имеет n степеней свободы и N узлов. Система уравнений собственных колебаний этой модели имеет следующий вид:

$$KX + M\ddot{X} = 0. \quad (1)$$

Ставится задача освободить КЭ-модель от закреплений при условии, что известны инерционные характеристики свободной конструкции, а именно: масса и массовые моменты инерции относительно некоторой точки, например, центра тяжести. Информации об убранных при начальном закреплении модели степенях свободы либо нет, либо она неактуальна, то есть она не позволяет сделать модель свободной. Последнее имеет место быть, например, когда проводится прямая коррекция матрицы жесткости и/или масс закрепленной модели по результатам эксперимента.

Пусть рассматриваемая модель L находится на виртуальной платформе, к которой она прикреплена всеми узлами, которые были зафиксированы. Эта платформа может перемещаться и поворачиваться как жесткое целое. Положение платформы в глобальной неподвижной системе координат будем определять координатами точки C – вектором $\vec{R}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, а ориентация в пространстве задается вектором конечного поворота $\vec{\Omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ [20]. Виртуальная платформа в общем случае находится на упругом основании, заданном тремя линейными и тремя крутильными жесткостями.

При ускорении платформы на закрепленную модель действуют дополнительные силы инерции, обусловленные ускорением каждой точки за счёт перемещения и поворота платформы, поэтому уравнение движения (1) переписывается в следующем виде:

$$KX + M(\ddot{X} + \ddot{X}_0) = 0. \quad (2)$$

где $X_0 = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \dots \\ \vec{R}_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1^0(x_0, y_0, \dots, \omega_3) \\ \dots \\ x_n^0(x_0, y_0, \dots, \omega_3) \end{Bmatrix}$, $\vec{R}_i = \vec{R}_0 + \vec{r}_i$,

x_0, y_0, z_0 – линейные перемещения платформы, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – компоненты вектора конечного поворота $\vec{\Omega}$. В случае малых поворотов матрица λ линейна относительно компонент этого вектора и имеет следующий вид:

$$\lambda(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \begin{pmatrix} 1 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 1 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Каждый узел КЭ-модели L до деформирования имеет координаты $x_i^0, y_i^0, z_i^0, i = 1..N$ в своей системе координат, которая необязательно совпадает с системой координат, выбранной выше, тогда точка C в этой системе имеет координаты x_0, y_0, z_0 . Так как рассматриваются малые перемещения, то зависимость $\vec{r}_i = \vec{r}_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – линейная относительно компонент вектора конечного поворота [20]:

$$\vec{r}_i = \lambda \vec{r}_i^0 = \begin{pmatrix} 1 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 1 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_i^0 - x_0 \\ y_i^0 - y_0 \\ z_i^0 - z_0 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 1 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x_i^0 \\ \Delta y_i^0 \\ \Delta z_i^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta x_i^0 - \Delta z_i^0 \omega_2 + \Delta y_i^0 \omega_3 \\ \Delta z_i^0 \omega_1 + \Delta y_i^0 - \Delta x_i^0 \omega_3 \\ -\Delta y_i^0 \omega_1 + \Delta x_i^0 \omega_2 + \Delta z_i^0 \end{Bmatrix}, i = 1..N. \quad (3)$$

Для определенности пусть каждый узел описывается тремя линейными и тремя угловыми степенями свободы (хотя в общем случае это может быть не так), тогда выражение (2) с учетом (3) переписывается в следующем виде:

$$K \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} + M \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \\ \ddot{x}_5 \\ \ddot{x}_6 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \ddot{z}_0 - \Delta y_N^0 \ddot{\omega}_1 + \Delta x_N^0 \ddot{\omega}_2 \\ \ddot{\omega}_1 \\ \ddot{\omega}_2 \\ \ddot{\omega}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{x}_0 - \Delta z_1^0 \ddot{\omega}_2 + \Delta y_1^0 \ddot{\omega}_3 \\ \ddot{y}_0 + \Delta z_1^0 \ddot{\omega}_1 - \Delta x_1^0 \ddot{\omega}_3 \\ \ddot{z}_0 - \Delta y_1^0 \ddot{\omega}_1 + \Delta x_1^0 \ddot{\omega}_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \ddot{z}_0 - \Delta y_N^0 \ddot{\omega}_1 + \Delta x_N^0 \ddot{\omega}_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (4)$$

Раскрывая скобки в (4), получим:

$$K \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} + M \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \\ \ddot{x}_5 \\ \ddot{x}_6 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix} + M \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{x}_0 + M \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{y}_0 + M \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{z}_0 +$$

Уравнения (6) и (7) образуют новую систему уравнений движения с симметричными матрицами размером $(n+6)$:

$$\bar{K}\bar{X} + \bar{M}\ddot{\bar{X}} = 0,$$

или

$$\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \xi \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} M & (\Sigma m)^T \\ \Sigma m & \mu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{\xi} \end{Bmatrix} = 0. \quad (8)$$

Система (8) описывает собственные колебания конечно-элементной модели L вместе с платформой. Если модель L получена путем закрепления свободной модели \bar{L} , жесткости крепления платформы равны нулю, тогда частоты, найденные из решения проблемы (8), будут близки к частотам колебаний свободной модели \bar{L} . При этом формы собственных колебаний, найденные из (8), также будут близки к формам свободной модели, если их привести к одной системе координат с учетом относительного движения.

Переведем (8) в глобальную систему координат. Согласно (3) можно записать следующее:

$$\tilde{X} = \bar{X} + \bar{X}_0 = \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \xi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X \\ \xi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \\ \tilde{x}_5 \\ \tilde{x}_6 \\ \dots \\ \tilde{x}_{n-3} \\ \tilde{x}_{n-2} \\ \tilde{x}_{n-1} \\ \tilde{x}_n \\ x_0 \\ y_0 \\ \dots \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \\ x_{n-3} \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_0 \\ y_0 \\ \dots \\ \omega_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_0 - \Delta z_1^0 \omega_2 + \Delta y_1^0 \omega_3 \\ y_0 + \Delta z_1^0 \omega_1 - \Delta x_1^0 \omega_3 \\ z_0 - \Delta y_1^0 \omega_1 + \Delta x_1^0 \omega_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \dots \\ z_0 - \Delta y_N^0 \omega_1 + \Delta x_N^0 \omega_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Выразим локальные координаты \bar{X} :

$$\bar{X} = \tilde{X} - \bar{X}_0 = \begin{Bmatrix} X \\ \xi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \xi \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} X_0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

Подставим (9) в (8):

$$\bar{K}(\tilde{X} - \bar{X}_0) + \bar{M}(\ddot{\tilde{X}} - \ddot{\bar{X}}_0) = 0,$$

$$\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \xi \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} X_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} M & (\Sigma m)^T \\ \Sigma m & \mu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{X}} \\ \ddot{\xi} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \ddot{X}_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0,$$

так как $(\Sigma m)^T \cdot \ddot{\xi} = M \cdot \ddot{X}_0$, $(\Sigma k)^T \cdot \xi = K \cdot X_0$, тогда

$$\begin{pmatrix} K - (\Sigma k)^T \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \xi \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} M & 0 \\ \Sigma m & \mu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{X}} \\ \ddot{\xi} \end{Bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \Sigma m \cdot \ddot{X}_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Введем обозначение: $\Sigma m \cdot \ddot{X}_0 = \Sigma \Sigma m \cdot \ddot{\xi}$, тогда последняя система уравнений переписывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} K - (\Sigma k)^T \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \xi \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} M & 0 \\ \Sigma m & \mu - \Sigma \Sigma m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{X}} \\ \ddot{\xi} \end{Bmatrix} = 0. \quad (10)$$

Для приведения системы (10) к симметричному виду, воспользуемся линейными комбинациями первых n строк (10) в соответствии с таблицей G_{ji} :

$$\sum_G \left[K\tilde{X} - (\Sigma k)^T \xi + M\ddot{\tilde{X}} \right] = 0,$$

$$\Sigma k \cdot \tilde{X} - \Sigma \Sigma k \cdot \xi + \Sigma m \cdot \ddot{\tilde{X}} = 0,$$

тогда с учетом (10) получим итоговую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} K & -(\Sigma k)^T \\ -\Sigma k & \kappa + \Sigma \Sigma k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \xi \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \mu - \Sigma \Sigma m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{X}} \\ \ddot{\xi} \end{Bmatrix} = 0. \quad (11)$$

Получим выражение для $\Sigma \Sigma m$ аналогично (5):

$$\Sigma m \cdot \ddot{X}_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \dots \sigma_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ \sigma_{61} \dots \sigma_{6n} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_0 - \Delta z_1^0 \ddot{\omega}_2 + \Delta y_1^0 \ddot{\omega}_3 \\ \dots \\ \ddot{\omega}_3 \end{Bmatrix} =$$

$$= \Sigma m \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{x}_0 + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{y}_0 + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{z}_0 + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\Delta z_1^0 \\ \Delta y_1^0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\Delta z_2^0 \\ \Delta y_2^0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{\omega}_1 + \begin{Bmatrix} \Delta z_1^0 \\ 0 \\ -\Delta x_1^0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \Delta z_2^0 \\ 0 \\ -\Delta x_2^0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{\omega}_2 + \begin{Bmatrix} -\Delta y_1^0 \\ \Delta x_1^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\Delta y_2^0 \\ \Delta x_2^0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{\omega}_3 \end{pmatrix}.$$

Итак:

$$\Sigma \Sigma m = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \sigma_{1,G_{i,1}} \sum_{i=1}^N \sigma_{1,G_{i,2}} \sum_{i=1}^N \sigma_{1,G_{i,3}} \sum_{i=1}^N \left(\begin{matrix} \sigma_{1,G_{i,4}} + \\ + \sigma_{1,G_{i,2}} \Delta z_i^0 - \\ - \sigma_{1,G_{i,3}} \Delta x_i^0 \end{matrix} \right) - \sum_{i=1}^N \left(\begin{matrix} \sigma_{1,G_{i,4}} + \\ + \sigma_{1,G_{i,2}} \Delta z_i^0 - \\ - \sigma_{1,G_{i,3}} \Delta x_i^0 \end{matrix} \right) \sum_{i=1}^N \left(\begin{matrix} \sigma_{1,G_{i,4}} + \\ + \sigma_{1,G_{i,2}} \Delta z_i^0 - \\ - \sigma_{1,G_{i,3}} \Delta x_i^0 \end{matrix} \right) - \dots \dots \dots \end{pmatrix}$$

Аналогично можно получить выражения для $\Sigma \Sigma k$.

Необходимо отметить, что точка C не обязательно должна располагаться в центре масс, она может находиться в любом месте конструкции. Пусть точка C находится на расстоянии Δ_x , Δ_y , Δ_z от центра тяжести, тогда матрица μ может быть вычислена следующим образом:

$$\mu = m_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta_z & \Delta_y \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta_z & 0 & -\Delta_x \\ 0 & 0 & 1 & \Delta_y & -\Delta_x & 0 \\ 0 & -\Delta_z & \Delta_y & \frac{J_1}{m_0} + (\Delta^2 - \Delta_x^2) & -\Delta_x \Delta_y & -\Delta_x \Delta_z \\ \Delta_z & 0 & -\Delta_x & -\Delta_x \Delta_y & \frac{J_2}{m_0} + (\Delta^2 - \Delta_y^2) & -\Delta_y \Delta_z \\ \Delta_y & -\Delta_x & 0 & -\Delta_x \Delta_z & -\Delta_y \Delta_z & \frac{J_3}{m_0} + (\Delta^2 - \Delta_z^2) \end{pmatrix},$$

где $\Delta^2 = \Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2$.

Положение точки С влияет на относительные координаты каждого узла $\Delta x_i^0, \Delta y_i^0, \Delta z_i^0$ и матрицы K и μ . Более того, модель может быть закреплена не в одной точке, но нужно иметь в виду, что после процедуры освобождения по (8) или (11) появляется специфическая погрешность, вызванная тем, что мы заменяем множество закрепленных степеней свободы всего 6-тью степенями свободы вектора ξ , что вносит определенные изменения в деформирование модели, а именно: все закрепленные точки относительно друг друга не деформируются. Другими словами потерянная информация о законах деформирования закрепленных точек не может быть восстановлена, поэтому освобожденная модель будет отличаться от исходной свободной модели.

Уравнения (8) и (11) могут быть использованы в преобразовании любых расчетных моделей, представленных в виде (1). Проиллюстрируем их применение на простейшем примере: колебания двух масс на пружинках (рис. 1).

Система уравнений собственных колебаний «Закрепленной системы» (рис.1) имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = 0. \quad (12)$$

Преобразование (12) с учетом (8) приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 & 0 & m_1 \\ 0 & m_2 & m_2 \\ m_1 & m_2 & m_0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_0 \end{Bmatrix} = 0. \quad (13)$$

Аналогичное преобразование, но с учетом (11), даёт такую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & -k_1 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_0 + k_1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ x_0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_0 - m_1 - m_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{x}}_1 \\ \ddot{\tilde{x}}_2 \\ \ddot{x}_0 \end{Bmatrix} = 0. \quad (14)$$

Система уравнений, описывающих собственные колебания «Эквивалентной системы» (рис.1), имеет вид:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & -k_1 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_0 + k_1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{x}}_1 \\ \ddot{\tilde{x}}_2 \\ \ddot{\tilde{x}}_3 \end{Bmatrix} = 0. \quad (15)$$

Очевидно, что так как $\tilde{x}_3 = x_0, m_3 = m_0 - m_1 - m_2$, то система уравнений (15) совпадает с системой уравнений (14). Кроме того, следует отметить, что частоты собственных колебаний, найденные по уравнениям (13), совпадают с частотами по (14) и (15). При этом собственные формы колебаний, приведенные к глобальной системе координат, совпадают с соответствующими формами, определенными по (14) и (15). Если в (13)-(15) положить $k_0 = 0$, получим уравнения колебаний свободной системы.

ПРИМЕР ОСВОБОЖДЕНИЯ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ

На рис. 2 представлена условная балочная модель самолёта, стоящего на трёх стойках шасси.

Балки, имитирующие шасси, закреплены следующим образом: для задней опоры запрещены перемещения в трех направлениях и по углу рыскания самолёта, а для двух передних – только перемещения по вертикали.

Предлагаемый метод был реализован в виде программы Fortran, которая в качестве исходных данных использует матрицы жесткости и масс закрепленной расчетной модели, а также

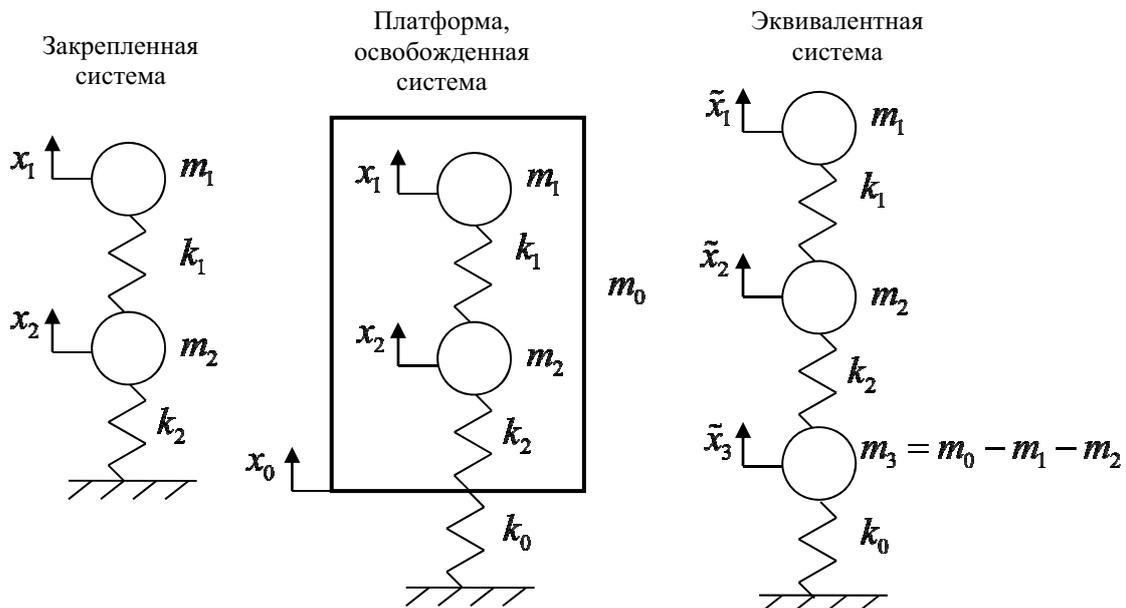


Рис. 1. Пример преобразования системы масс на пружинках

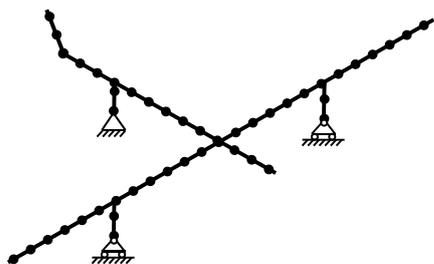


Рис. 2. Балочная модель самолёта

информацию о массе и моментах инерции свободной конструкции. Результатом работы программы является матрицы жесткости и масс для свободной конструкции.

В табл. 1 приведены первые 30 частот собственных колебаний закрепленной модели, свободной модели и модели, освобожденной от закреплений по предлагаемому методу. В последней колонке показана разница в процентах между частотами свободной и освобожденной

модели. Из представленных результатов следует, что частоты практически совпали между собой. Анализ форм колебаний освобожденной модели показал, что они также близки к формам колебаний свободной модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан метод освобождения математических моделей динамических систем, позволяющий восстановить расчетную модель свободного летательного аппарата после ее коррекции по результатам наземных модальных испытаний. Метод основан на том, что закрепленная модель ставится на виртуальную подвижную платформу, которая имеет инерционные характеристики исходной свободной конструкции. Это допускает движение модели, соответствующее движению абсолютно жесткого тела. Процедура осво-

Таблица 1. Результаты расчета

№ тона	Частоты собственных колебаний, Гц			Разница, %
	Закрепленная	Свободная	Освобожденная	
1	1,85662	0	3,43958e-5	100
2	4,96444	9,28706e-5	6,42048e-5	-30,86637
3	6,17794	1,02634e-4	8,37633e-5	-18,38669
4	6,86614	3,49169e-4	1,00292e-4	-71,27698
5	13,10533	3,79388e-4	1,18879e-4	-68,66572
6	17,6852	4,14984e-4	1,36216e-4	-67,17566
7	20,03209	6,45900	6,45896	-5,25493e-4
8	21,06621	6,46460	6,46460	-6,91318e-5
9	23,86814	6,98969	6,98972	4,17216e-4
10	30,36936	21,27473	21,27574	4,74967e-3
11	47,42829	22,40967	22,40978	4,70805e-4
12	53,07032	25,32626	25,32857	9,12919e-3
13	67,18707	33,51995	33,51972	-6,87853e-4
14	71,56714	34,78906	34,78965	1,69555e-3
15	74,38522	36,34213	36,36089	0,05163
16	87,5522	58,08792	58,13280	0,07725
17	92,43276	60,88055	60,88067	2,03587e-4
18	99,24113	70,48880	70,50532	0,02344
19	113,88279	79,28135	79,36471	0,10515
20	121,82606	87,55269	87,55271	1,72603e-5
21	127,80676	92,35691	92,35987	3,20573e-3
22	135,72822	94,81595	94,81654	6,2726e-4
23	138,70894	120,28362	120,30526	0,01799
24	145,96664	135,00200	135,00525	2,40287e-3
25	154,73998	135,53758	135,54151	2,89958e-3
26	164,04692	142,63523	142,65131	0,01128
27	168,1857	146,64659	146,64601	-3,96758e-4
28	177,41973	167,78787	167,79104	1,89001e-3
29	244,28673	174,88687	174,90515	0,01046
30	263,15988	176,76258	176,76110	-8,34006e-4

бождения расчетной модели от закреплений не нарушает симметрии матриц жесткости и масс. На численном примере условной балочной модели самолета, установленного на шасси, показано, что освобожденная расчетная модель с высокой точностью воспроизводит частоты и формы собственных колебаний свободного самолета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О современных методиках наземных испытаний самолетов в аэроупругости / П.Г. Карклэ, В.А. Малютин, О.С. Мамедов, В.Н. Поповский, А.В. Смотров, В.И. Смыслов // Уч. записки ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, 2012, вып. 2708. 34 с.
2. Карклэ П.Г., Смыслов В.И. Модальные испытания летательных аппаратов и воспроизведение силовых воздействий. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2017. 156 с.
3. Вард Хейлен, Стефан Ламменс, Пол Сас. Модальный анализ: теория и испытания. М.: ООО «Новатест», 2010. 319 с.
4. Бернс В. А., Жуков Е. П., Маринин Д. А., Маленкова В.В. Экспериментальный модальный анализ летательных аппаратов на основе монофазных колебаний // Известия Самарского научного центра РАН. 2018. Том 20. № 4. С. 43-54.
5. Solar Impulse – How to validate the numerical model of a superlight aircraft with A340 dimensions! / M. Böswald, Y. Govers, A. Vollan, M. Basien // Proceedings of ISMA2010 International Conference on Noise and Vibration Engineering including USD2010, Leuven, Belgium, 2010. P. 2451–2466.
6. Advanced GVT Testing of the Gulfstream G650 / R. Brillhart, K. Napolitano, L. Morgan, R. LeBlanc // J. Sound and Vibr. – 2011. – N. 8. – P. 6–9.
7. Peres M.A., Bono R.W., Brown D.L. Practical Aspects of Shaker Measurements for Modal Testing // Proceedings of ISMA2010 International Conference on Noise and Vibration Engineering including USD2010, Leuven, Belgium, 2010. – P. 2539–2550.
8. Modal Parameter Estimation for Large, Complicated MIMO Tests / A. Peter, R. Singhal, B. Peeters, J. Leuridan // J. Sound and Vibr. – 2006. – N. 1. – P. 14–20.
9. Pickrel C.R. Airplane Ground Vibration Testing – Nominal Modal Model Correlation // J. Sound and Vibr. – 2002. – N. 11. – P. 18–23.
10. Baruch M. Optimisation procedure to correct stiffness and flexibility matrices using vibration tests // AIAA Journal, Vol. 16, No. 11, 1978, pp. 1208 – 1210.
11. Влияние системы упругого вывешивания на точность результатов модальных испытаний летательных аппаратов / В.А. Бернс, А.В. Долгополов, Е.П. Жуков, Д.А. Маринин // Вестник СГАУ им. С.П. Королева, 2016. Т. 15. № 1. С. 18-27.
12. Межин В.С., Обухов В.В. Практика применения модальных испытаний для целей верификации конечно-элементных моделей конструкции изделий ракетно-космической техники // Космическая техника и технологии. 2014. № 1(4). С. 86-91.
13. Кузнецов О.А., Смыслов В.И. Опыт корректирования расчетной динамической схемы по результатам резонансных испытаний // Ученые записки ЦАГИ. 1979. т. 10, № 6. С 99–112.
14. Haitao Luo, Wei Wang, Jia Fu, and Lichuang Jiao, “Finite Element Model Updating of Satellite Sailboard Based on Sensitivity Analysis,” Shock and Vibration, vol. 2019, Article ID 4547632, 12 pages, 2019. <https://doi.org/10.1155/2019/4547632>
15. Jang, Jinwoo & Smyth, Andrew. (2016). Model updating of a full-scale FE model with nonlinear constraint equations and sensitivity-based cluster analysis for updating parameters. Mechanical Systems and Signal Processing. 83. 10.1016/j.ymssp.2016.06.018.
16. Asgariéh E., Moaveni B., Stavridis A. (2013) Nonlinear Finite Element Model Updating of a Large-Scale Infilled Frame Structures Based on Instantaneous Modal Parameters. In: Kerschen G., Adams D., Carrella A. (eds) Topics in Nonlinear Dynamics, Volume 1. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, vol 35. Springer, New York, NY
17. Asgariéh, Eliyar & Moaveni, Babak & Stavridis, Andreas. (2013). Nonlinear Finite Element Model Updating of a Large-Scale Infilled Frame Structures Based on Instantaneous Modal Parameters. 10.1007/978-1-4614-6570-6_7.
18. Masoud Sanayei, Peeyush Rohela, Automated finite element model updating of full-scale structures with PARAmeter Identification System (PARIS) // Advances in Engineering Software, Volume 67, 2014, Pages 99-110, ISSN 0965-9978, <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2013.09.002>.
19. T. Wang, H. He, W. Yan, G.P. Chen, A model-updating approach based on the component mode synthesis method and perturbation analysis // Journal of Sound and Vibration, Volume 433, 2018, Pages 349-365, ISSN 0022-460X, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.07.026>.
20. Пустовой Н.В., Левин В.Е. Механика деформирования криволинейных стержней. Новосибирск: НГТУ, 2008. 208 с.

METHOD OF FREEING A FIXED DYNAMIC MODEL OF AN AIRCRAFT

© 2019 D.A. Krasnorutskiy^{1,2}, V.A. Berns^{1,2}, P.A. Lakiza^{1,2}, V.E. Levin²

¹ FSUE "SibNIA named after S.A. Chaplygin", Novosibirsk (SibNIA)

² Novosibirsk State Technical University (NSTU)

Calculated dynamic models are developed at the design stage of an aircraft and are used to estimate operational loading, to provide strength, controllability and aeroelastic stability of the aircraft. These models accompany experimental investigations, trial and serial operation of the aircraft. Wherein the calculated dynamic models are updated by the results of ground modal tests. The calculated model of the aircraft is as a rule the model of the free dynamic system. While the aircraft vehicles are set on landing gears or are installed on the special system of elastic hanging to perform the modal tests, and the space structures are set on the offloading (zero-G) system. In the present work the method of freeing a fixed dynamic model of an aircraft after the procedure of direct updating its stiffness and/or mass matrices has been proposed. This model updating leads to the fact that it is impossible to free the model by direct returning of the degrees of freedom which were removed during the process of fixing the model. The proposed method allows to free the model from fixations in the case of the inertia characteristics of the free structure are known. As in, mass and moments of inertia regarding some point, for example, center of mass. The method is based on the fact that the fixed model is set on a virtual mobile platform which has the inertia characteristics of the input free structure. It allows to describe the movement of the structure as a rigid body in the model. Movement of the platform influences on the fixed model through inertial forces. Reverse impact is performed through the sum of all the inertial forces which is the reaction in the fixation basically. The system of equations which describes movements of the fixed model was extended by the equations of movements of the platform. The inertial forces which are conditioned by the movement as a rigid body are added to each equation of motion of the model. Moreover, transition from the local coordinate system, which is linked to the fixed model, to the global coordinate system is executed. The obtained equations do not violate the symmetry of the stiffness and mass matrices. The eigenfrequencies and eigenforms are close to the corresponding frequencies and forms of the free model. The implementation of the method has been shown on the mathematical model of linear oscillators. The example of freeing of the conditional beam model of the aircraft, which is set on the landing gears, is presented.

Keywords: aircraft, calculated dynamic model, modal tests, model updating, freeing of calculated model.

Dmitry Krasnorutskiy, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher of the SibNIA, Associate Professor of the Aircraft Strength Department of the NSTU.

E-mail: krasno-rutskiy@corp.nstu.ru

Vladimir Berns, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Dynamic Test Department of the SibNIA, Professor of the Aircraft Strength Department of the NSTU. E-mail: v.berns@yandex.ru

Pavel Lakiza, Master's Student of the Aircraft Strength Department of the NSTU, Engineer of the SibNIA.

E-mail: qinterfly@gmail.com

Vladimir Levin, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Deputy Head of the Aircraft Strength Department of the NSTU. E-mail: v.levin@corp.nstu.ru