

УДК 678.7

РАЗРАБОТКА ОБОБЩЕННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В АВИАСТРОЕНИИ

© 2019 Г.В. Дмитриенко, Е.Н. Згуральская, Г.Л. Ривин, А.А. Федоров

Ульяновский государственный технический университет,
обособленное структурное подразделение «Институт авиационных технологий и управления»,
г. Ульяновск

Статья поступила в редакцию 22.08.2019

В статье рассмотрены математические модели для диагностики полимерных композиционных материалов радиоволновыми методами.

Ключевые слова: математическая модель, полимерные композиционные материалы, авиастроение.
DOI: 10.24411/1990-5378-2019-00053

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ
и Правительства Ульяновской области в рамках научного проекта № 18-48-732005\18*

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в авиастроении используется большое количество конструкционных и материалов радиотехнического назначения. Особенно удаляется использования полимерных композиционных материалов (ПКМ), которые используются и как конструкционные и как радиотехнические. Сегодня используются ПКМ различных типов от многокомпонентных до многослойных и тканых. Большую популярность получили материалы на основе углеродных волокон. Отличительной особенностью тканей из углеродных волокон - их высокая термостойкость, жесткость и прочность, а также электропроводность сравнимая с металлами. В процессе изготовления углеродных ПКМ широкое распространение получило многонаправленное армирование, которое позволило устранить частично или полностью анизотропию материала и дает возможность реализовать заданные свойства материала в различных направлениях у готового изделия. Так же применяются ПКМ на основе стекловолокна, имеющих сотовые структуры. Технология изготовления таких структур ПКМ изложена в [1-8]. Из числа ПКМ волоконные материалы обладают самыми высокими прочностными и жесткостными характеристиками, при обычной и

повышенной температурах, низким коэффициентом линейного температурного расширения и рядом других свойств. Объемная доля волокон в волокнистых ПКМ составляет 60-80 %. При использовании различных типов ПКМ в авиационных изделиях необходимо проводить входной контроль их на соответствие технических характеристик, заявленных в документации на них. Сегодня типов ПКМ большое количество, разрабатывать по каждому типу ПКМ индивидуальную методику проверки для производства довольно затратно. Для этого предлагается провести классификацию используемых материалов на производстве с помощью системного анализа произвести их группировку, с целью уменьшения размерности задачи. В результате получаем небольшой набор методик диагностики материалов, позволяющих охватить весь спектр используемых ПКМ на производстве.

ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

Проведя всесторонний системный анализ, установлено:

- ПКМ характеризуются следующими параметрами: ϵ - диэлектрическая проницаемость материала, $\text{tg} \delta$ - тангенс угла диэлектрических потерь, d - проводимость (поверхностная проводимость);

- ПКМ имеют различные температурные характеристики.

Исходя из перечисленного ставится следующая задача: составление более точных математических моделей: электродинамических и тепловых моделей для полного охвата ПКМ используемого на производстве, для проведение диагностики их характеристик в свободном пространстве.

Дмитриенко Герман Вячеславович, доктор технических наук, профессор кафедры «Самолетостроение».

E-mail: dmitrienko.german@yandex.ru

Згуральская Екатерина Николаевна, старший преподаватель кафедры «Самолетостроение».

Георгий Леонидович Ривин, кандидат технических наук, доцент кафедры «Самолетостроение».

E-mail: avia@ulstu.ru

Федоров Александр Александрович кандидат технических наук, доцент кафедры «Самолетостроение».

ПУТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для составления математических моделей электродинамики применяется более строгий с электродинамической точки зрения математический метод, метода интегральных уравнений (МИУ). Данный метод активно развивался и применяется для радиоволновых измерений в свободном пространстве [9-21], также МИУ применим для различных нетрадиционных задач. Так, Васильевым Е.Н. МИУ – развивался в антенной технике, для диэлектрических и проводящих тел имеющих осевую симметрию [17]. Кислюком М.Ж. МИУ – использовался в методе вторичных волн для решения граничных задач в свободном пространстве, в волноводах и резонаторах [18]. С помощью МИУ были получены точные аналитические решения многих практических задач: дифракции, электродинамики и антенной техники, которые раньше решались приближенными методами и не имели точных аналитических решений.

Составление ИУ производится из уравнений Максвелла, используя специальные функции: вектора Герца или векторные потенциалы. Эти функции должны удовлетворять условию излучения на бесконечность, которое математически записывается как: $\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + k \psi \right) = 0$. МИУ

автоматически учитывает выполнение условия излучения на бесконечность, это позволяет производить описание электродинамических процессов в более строгой постановке электродинамики. МИУ позволяет получить точное решение сложных задач в аналитическом виде. При численном решении ИУ используется метод моментов, который дает широкий спектр возможностей для анализа и математического моделирования полученных решений.

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПКМ

Процедура составления ИУ производится через поверхностные токи, наводимые на поверхности образца ПКМ зондирующей электромагнитной волной. В ИУ поверхностные токи задаются через векторные электрический или магнитный потенциалы. Диэлектрические параметры ПКМ и характеристики отражающей поверхности задают через поверхностный импеданс. Информационным параметром является отраженная волна, [21-25]. Результаты измерений обрабатываются численными методами в строгой электродинамической постановке.

Для сокращения размерности задачи применяется методика составления ИУ для тел вращения. Напряженности электрического и магнитного полей выражается через возбуждающие токи.

$$E(p) = \frac{1}{j\omega\epsilon'_a} (k^2 A^E + \text{graddiv} A^E) - \text{rot} A^M; \quad (1)$$

$$H(p) = \frac{1}{j\omega\mu'_a} (k^2 A^M + \text{graddiv} A^M) + \text{rot} A^E,$$

где k – волновое число; ϵ'_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость; μ'_a – абсолютная магнитная проницаемость; ω – круговая частота.

$$A^E = \int_{\Sigma} J^E(q) G(p, q) d\sigma_q,$$

$$A^M = \int_{\Sigma} J^M(q) G(p, q) d\sigma_q, \quad (2)$$

где A^E, A^M – векторные электрические и магнитные потенциалы; $J^E(q), J^M(q)$ – электрический и магнитный токи в точке истока; $G(p, q)$ – функция Грина $G = \frac{\text{Exp}(-j\aleph r)}{4\pi r}$, r – расстояние

между точками наблюдения p и истока q ; p – точка наблюдения; q – точка истока; S – граница поверхности Σ материала или поверхности датчика.

Эти соотношения удовлетворяют волновому уравнению Гельмгольца и граничным условиям излучения на бесконечность [17,21]. Сделав подстановку (2) в (1) получим

$$E(p) = \int_{\Sigma} \left\{ -j\omega\mu'_a J^E(q) G(p, q) + \frac{1}{j\omega\epsilon'_a} \text{graddiv}(J^E(q) G(p, q)) - \text{rot}(J^M(q) G(p, q)) \right\} d\sigma_q; \quad (3)$$

$$H(p) = \int_{\Sigma} \left\{ -j\omega\epsilon'_a J^M(q) G(p, q) + \frac{1}{j\omega\mu'_a} \text{graddiv}(J^M(q) G(p, q)) + \text{rot}(J^E(q) G(p, q)) \right\} d\sigma_q. \quad (4)$$

$$p \in S; G = \frac{\text{Exp}(-j\aleph r)}{4\pi r}; \aleph = \sqrt{\mu'_a \epsilon'_a}.$$

Полученные уравнения эквивалентны ИУ для диэлектрических тел, в которых электрический ток протекает по поверхности или в скин-слое проводящих тел. Образец ПКМ по своим электродинамическим свойствам относится к импедансным материалам, имеющим большое затухание. При этом можно считать, что токи наводимые внутри материала ПКМ имеют малую амплитуду и создают малую составляющую поля во внешнем пространстве, поэтому ими можно пренебречь. На основании изложенного выше интегрирование производится по поверхности, а не по объему [17]. В связи с громоздкостью преобразований промежуточные выкладки опускаем.

Для упрощения вычислительного процесса, делаются некоторые утверждения, которые снижают размерность задачи:

1. Считаем, что электромагнитная волна, проникающая в глубь ПКМ перпендикулярна внешней поверхности, и направлена по одной из координатных осей (ось Z).

2. В силу правила перестановочной двойственности уравнений Максвелла, следующих из их симметрии, тензорные функции $h^{E,M}$, $h^{E,M}$ связаны между собой следующими выражениями.

$$\begin{aligned} h^E(p, q, \varepsilon_a, \mu_a) &= -\xi^M(p, q, \varepsilon_a, \mu_a) \\ h^M(p, q, \varepsilon_a, \mu_a) &= \xi^E(p, q, \varepsilon_a, \mu_a) \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда используя утверждение, что вектора E и H удовлетворяют уравнению Гельмгольца, можно сделать переход от трехкратного интеграла по поверхности S к двукратному интегралу по поверхности L .

$$\begin{aligned} E(p) &= \int_L \xi^E(p, q, \varepsilon_a, \mu_a) J^E(q) + \\ &+ \xi^M(p, q, \varepsilon_a, \mu_a) J^M(q) dl, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} H(p) &= \int_L h^E(p, q, \varepsilon_a, \mu_a) J^E(q) + \\ &+ h^M(p, q, \varepsilon_a, \mu_a) J^M(q) dl. \end{aligned} \quad (9)$$

Получаем истокообразные уравнения в сжатой форме. Далее для простоты записи тензорных функций будут писаться $h^{E,M}$, $h^{E,M}$. Полученные истокообразные уравнения (8, 9) используются для решения задачи по нахождению поля в радиоволновом датчике, и являются исходными уравнениями, для описания взаимодействия электромагнитного поля с образцом ПКМ в волноводном датчике.

В зависимости от параметров e , $tg d$ и d все типы ПКМ можно условно разделить на группы материалов, соответственно три основных модели для проведения диагностики:

1. полубесконечного тела;
2. тонкого тела;
3. многослойного тела.

Модель полубесконечного тела

Модель полубесконечного тела используется при измерении образцов ПКМ на отражении. Контроль e комплексной диэлектрической проницаемости ПКМ. Считаем, что образец измеряемого ПКМ по оси радиоволнового датчика (круглый волновод на конце которого рупор) Z бесконечным, производим измерение отраженной волны от образца. Поле зондирующей волны создается током J^M , а электрические токи, участвующие в выражении являются наведенными на поверхности импедансного тела ПКМ. Общее электромагнитное поле состоит из падающей и отраженной волн. Для простоты понимания

представим описание для волноводного датчика. Обозначим $L1$ – внешнюю границу поверхности волноводной конструкции, $L2$ – внешнюю границу поверхности измеряемого образца ПКМ. Тогда электромагнитное поле внутри области 1 измерительного датчика в точке наблюдения p согласно (5) и (6) представляется в виде

$$\begin{aligned} E(p) &= \int_{L1} \xi^M \tilde{J}^M(q) dl + \\ &+ \int_{L2} [\xi^E J^E(q) + \xi^M \tilde{J}^M(q)] dl. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} H(p) &= \int_{L1} h^M \tilde{J}^M(q) dl + \\ &+ \int_{L2} [h^E J^E(q) + h^M \tilde{J}^M(q)] dl. \end{aligned} \quad (11)$$

где $L1$ – граница волноводной конструкции, $L2$ – граница измеряемого образца ПКМ.

Используя истокообразное представление (10) и применим граничное условие на поверхности образца $L2$ ($p \in L2$) в виде, эквивалентном виде

$$\tilde{J}^M = -\tilde{Z}[n, J^E], \quad \tilde{Z} = Z / \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}, \quad (12)$$

получим интегральное уравнение относительно тока J^E первой гармоники. Полное поле внутри образца ПКМ на большом удалении от границы раздела ПКМ и свободное пространство равно нулю.

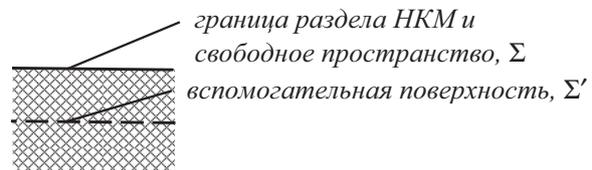


Рис.1. Расположение вспомогательной поверхности

Это условие будет выполняться, если на вспомогательной поверхности (рис. 1), расположенной внутри тела образца ПКМ или волноводного датчика, обращается в ноль тангенциальная составляющая полного магнитного поля в выражении (11). Для получения интегрального уравнения точка наблюдения p помещается на вспомогательную поверхность S' , расположенную внутри образца ПКМ, умножаем истокообразное уравнение на нормаль в точке наблюдения p , направление нормали в сторону источника излучения, а правую часть приравняется к нулю, получаем:

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{n} \times \int_{L1} h_1^M \tilde{J}_1^M(q) dl + \\ &+ \vec{n} \int_{L2} [h_1^E J_1^E(q) - h_1^M \tilde{Z}[\vec{n}(q), J_1^E(q)]] dl, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\tilde{Z} = \begin{vmatrix} Z_{11} & 0 \\ 0 & Z_{22} \end{vmatrix}$ – матрица поверхностного импеданса.

ИУ на границе $L1$ относительно магнитного тока получается из истокообразного представления (8). Опуская точку наблюдения p на границу $L1$ датчика и умножая на нормаль в точке p , получается следующее интегральное уравнение

$$-\frac{1}{2} \tilde{J}_1^M(p) + \int_{L1} \xi_1^M \tilde{J}_1^M(q) dl + \int_{L2} \xi_1^E J_1^E(q) - \xi_1^M \tilde{Z}[\tilde{n}(q), J_1^E(q)] dl = 0. \quad (14)$$

В выражении (14) наличие внеинтегрального члена представляет поле падающей волны на границе $L1$ в задаче на отражение. Полученная система из двух интегральных уравнений (13) и (14) описывает электромагнитное поле в измерительном волноводном датчике с образцом ПКМ. Система является полной, т.к. неизвестным в ней являются только ток J_1^E на границе $L2$. Полученные уравнения записаны в векторной форме, делая переход к скалярной форме, уравнения (13) и (14) решаются численно, вычисляется неизвестный ток J_1^E на границе $L2$. Составление интегральных уравнений для конусного рупора, такое же отличие заключается в поверхности интегрирования, поверхность волновода заменяется на поверхность рупора. Составленные интегральные уравнения на поверхности Σ в результате позволяют получить распределение реального существующего тока. Составленные интегральные уравнения на поверхности Σ' используются как вспомогательные, и применяются когда возникают трудности с неустойчивостью решения.

Модель электрически тонкого тела

Структура измерительного радиоволнового датчика на базе круглого волновода, МИУ позволяет численно рассчитать комплексный коэффициент отражения для рупора произвольной

образующей. Такая конструкция волноводного датчика эквивалентна схеме измерения в свободном пространстве. По аналогии с измерениями в свободном пространстве можно производить измерения диэлектрических параметров электрически тонких образцов ПКМ на прохождение, добавив на выходе измерительного датчика приемную антенну (рис.2,б) или же эквивалент ее на круглом волноводе без рупора (рис. 2,а).

Для измерения диэлектрических характеристик ПКМ на прохождение электромагнитной волны сквозь материал, используется мощность повышенного уровня, которая на выходе образца измеряемого материала имеет достаточный уровень мощности для измерительных приборов. Причина повышения мощности измерения связана из-за большого затухания электромагнитной волны в ПКМ. Такие измерения производятся на углеродных образцах ПКМ малой толщины до 2 мм или материалов типа стеклопластики.

Составляется система интегральных уравнений для внешней (освещенной) и тыльной (теневого) границ тонкого тела, используя уравнения (8) и (9). На внешней поверхности ($L1$) поле зондирующей волны создается током J^M , на тыльной поверхности ($L2$), прошедшая волна будет описываться наведенными токами J_2^M и J_2^E . Процесс составления интегральных уравнений такой же, как для полубесконечной модели, учитывая на границах $L1$ и $L2$ граничные условия для импедансного тела. Запишем систему уравнений:

$$-\frac{1}{2} \tilde{J}_1^M(p_1) + \int_{L1} \xi_1^M \tilde{J}_1^M(q_1) dl + \int_{L2} \xi_1^E J_1^E(q_1) - \xi_1^M \tilde{Z}[\tilde{n}(q_1), J_1^E(q_1)] dl = 0; \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} J_2^M(p_2) + \int_{L1} \xi_1^M \tilde{J}_1^M(q_2) dl + \int_{L2} (\xi_2^E - \xi_1^E) J_2^E(q_2) - (\xi_2^M - \xi_1^M) \tilde{Z}[\tilde{n}(q_2), J_2^E(q_2)] dl = 0; \quad (16)$$

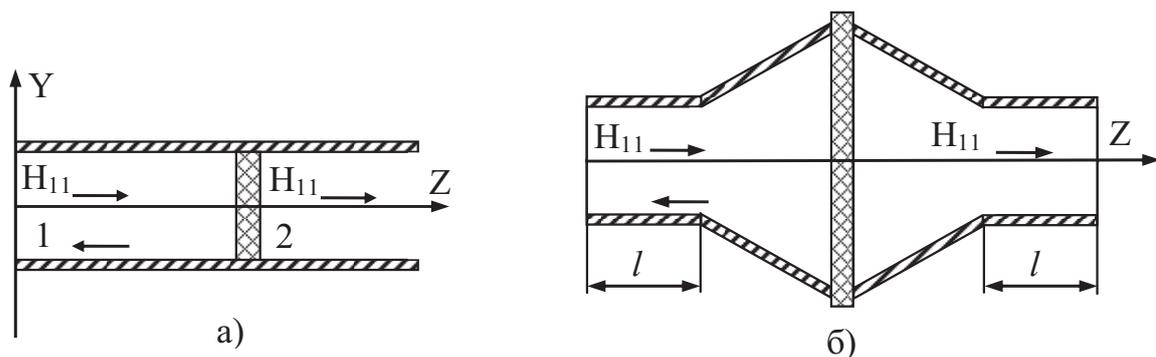


Рис. 2. Конструкция волноводного датчика для измерений на прохождение: а) – на круглом волноводе; б) – на круглом волноводе с коническим рупором

$$\frac{1}{2} J_2^E(p_2) + \int_{L1} h_1^M \tilde{J}_1^M(q_2) dl + \int_{L2} (h_2^M - h_1^M) J_2^E(q_2) - (h_2^M - h_1^M) \tilde{Z}[\tilde{n}(q_2), J_2^E(q_2)] dl = 0. \quad (17)$$

где p_1, q_1 точки на границе $L1$, а p_2, q_2 на границе $L2$.

Уравнение (15) для внешней поверхности $L1$ аналогично уравнениям для однородного полубесконечного тела. Последний интегральный член в левой части его учитывает отражение от тыльной поверхности. Уравнения (16), (17) описывают поле прошедшей волны, при этом первые интегральные члены учитывают влияние внешней поверхности. На обеих поверхностях выполняются граничные условия (12). Полученные уравнения представляют собой уравнения Фредгольма второго рода, которые решаются численными методами. Описываемый ток, в интегральных уравнениях на освещенной поверхности представляется как $J^M = J_{над}^M + J_{отр}^M$, на затененной поверхности $J^M = J_{про}^M$.

По предложенной математической модели был проведен контроль образца ПКМ. По результатам измерений было определено значение относительной диэлектрической проницаемости материала У-ПУ $\epsilon=940\pm 30\%$ и тангенса угла диэлектрических потерь $tg\delta=1,3\pm 40\%$, имеющих модуль коэффициента отражения 0,94.

Многослойные модели ПКМ

В предыдущих моделях считали, что поле, проникающее вглубь измеряемого образца ПКМ мало, и его воздействием можно пренебречь в случае, когда закон распределения токов внутри ПКМ не влияет на закон распределения токов на поверхности ПКМ. Эти модели (бесконечной пластины) пригодны для материалов, имеющих большое затухание. В случае, когда материалы имеют высокое значение коэффициента отражения и малую геометрическую толщину, а токи имеющиеся внутри ПКМ не малые, составляется многослойная модель для ПКМ как в [17,21], в которой протекающие внутри токи влияют на токи, протекающие на поверхности ПКМ. Такая модель применима для материалов имеющих сложную внутреннюю структуру и большое значение $tg\delta$ близкое к 1 и более. В случае на отражение уточненная многослойная математическая модель имеет вид рис.3, на прохождение рис. 4.

Модель образца ПКМ представляется виде многослойной структуры состоящей из однородных слоев, количество слоев определяется дискретом разбиения по ϵ . Интегральные уравнения для многослойной структуры составляется на основе уравнений полученных ранее (8) и (9) для каждого слоя, используя обе его границы. Нумерация слоев производится в соответствии с

рис. 3 и рис. 4. Методика составления интегральных уравнений для многослойной структуры следующая. Составление интегральных уравнений для многослойной среды производится как для одного слоя, учитывая распределение токов на границах раздела. Сшивка производится по граничным условиям Шукина-Леонтовича т.к. ПКМ обладает ϵ, μ - электрической и магнитной проницаемостями и σ - проводимостью. Образец разбит на N - слоев, их границы не имеют общих точек. В каждом слое могут находиться сторонние источники, нумерация слоев производится по направлению от источника наблюдения в глубь образца ПКМ. Составление уравнений производится, для слоев K и $K+1$ имеющих общую границу S_K используя (8), (9) к K -му слою применяют теорему эквивалентности. Нормаль на границах поверхностей раздела слоев направлена в сторону первоисточников.

Для K слоя уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E_K(p) &= \int_{\Sigma_K} [\xi^E J_K^E(q) + \xi^M \tilde{J}_K^M(q)] d\sigma_q + \\ &+ \int_{\Sigma_{K-1}} [\xi^E J_{K-1}^E(q) + \xi^M \tilde{J}_{K-1}^M(q)] d\sigma_q + E_K^{\Pi}(p) \\ p \in S_K \\ \frac{1}{2} H_K(p) &= \int_{\Sigma_K} [h^E J_K^E(q) + h^M \tilde{J}_K^M(q)] d\sigma_q + \\ &+ \int_{\Sigma_{K-1}} [h^E J_{K-1}^E(q) + h^M \tilde{J}_{K-1}^M(q)] d\sigma_q + H_K^{\Pi}(p) \\ p \in S_K \end{aligned} \quad (18)$$

Интегральные уравнения составлены в матричной форме для слоя K , аналогично записываются для слоя $K+1$, интегралы берутся по поверхностям S_K и S_{K+1} как (18).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E_{K+1}(p) &= \int_{\Sigma_{K+1}} [\xi^E J_{K+1}^E(q) + \xi^M \tilde{J}_{K+1}^M(q)] d\sigma_q + \\ &+ \int_{\Sigma_K} [\xi^E J_K^E(q) + \xi^M \tilde{J}_K^M(q)] d\sigma_q + E_{K+1}^{\Pi}(p) \\ p \in S_{K+1} \\ \frac{1}{2} H_{K+1}(p) &= \int_{\Sigma_{K+1}} [h^E J_{K+1}^E(q) + h^M \tilde{J}_{K+1}^M(q)] d\sigma_q + \\ &+ \int_{\Sigma_K} [h^E J_K^E(q) + h^M \tilde{J}_K^M(q)] d\sigma_q + H_{K+1}^{\Pi}(p) \\ p \in S_{K+1} \end{aligned} \quad (19)$$

Для получения возбуждаемых токов на поверхности уравнение (18) домножаются векторно на нормаль и на ϵ_{K+1} , а (19) – на нормаль и ϵ_K , затем уравнения (18) и (19) складываются. Получаются уравнения токов, протекающих на границе раздела слоев.

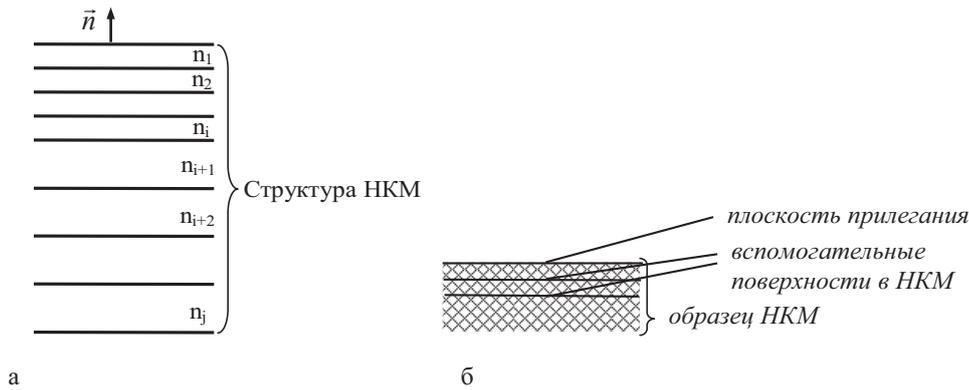


Рис. 3. Многослойные модели ПКМ на отражение: а) – математическая; б) – физическая модель

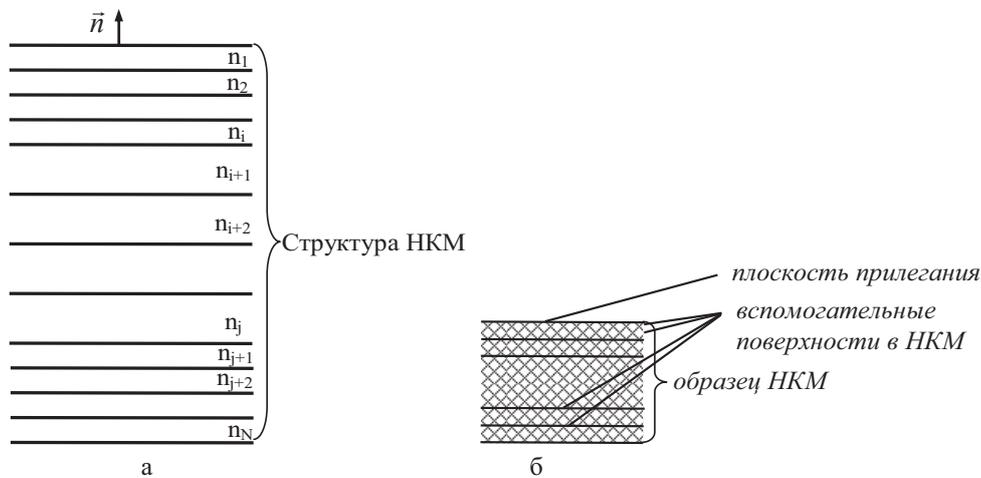


Рис. 4. Многослойные модели ПКМ на прохождение: а) – математическая; б) – физическая модель

$$\begin{aligned} \tilde{J}_K^M(p) &= \frac{2\varepsilon_K}{\varepsilon_K + \varepsilon_{K+1}} [n(p), \tilde{E}_K^{CT}(p)] + \frac{2\varepsilon_{K+1}}{\varepsilon_K + \varepsilon_{K+1}} [n(p), \tilde{E}_{K+1}^{CT}(p)] + \\ &+ n(p) \times \int_{\Sigma_K} \{[\varepsilon_K \xi^E - \varepsilon_{K+1} \xi^E] J_K^E(q) + [\varepsilon_K \xi^M - \varepsilon_{K+1} \xi^M] \tilde{J}_K^M(q)\} d\sigma_q + \\ &+ n(p) \times \int_{\Sigma_{K-1}} \{\varepsilon_K \xi^E J_{K-1}^E(q) + \varepsilon_K \xi^M \tilde{J}_{K-1}^M(q)\} d\sigma_q - n(p) \times \\ &\times \int_{\Sigma_{K+1}} \{\varepsilon_{K+1} \xi^E J_{K+1}^E(q) + \varepsilon_{K+1} \xi^M \tilde{J}_{K+1}^M(q)\} d\sigma_q \\ & \quad p \in \Sigma_K \\ \tilde{J}_K^E(p) &= \frac{2\mu_K}{\mu_K + \mu_{K+1}} [n(p), H_K^{CT}(p)] + \frac{2\mu_{K+1}}{\mu_K + \mu_{K+1}} [n(p), H_{K+1}^{CT}(p)] + \\ &+ n(p) \times \int_{\Sigma_K} \{\mu_K h^E - \mu_{K+1} h^E\} J_K^E(q) + \{\mu_K h^M - \mu_{K+1} h^M\} \tilde{J}_K^M(q) d\sigma_q + \\ &+ n(p) \times \int_{\Sigma_{K-1}} \{\mu_K h^E J_{K-1}^E(q) + \mu_K h^M \tilde{J}_{K-1}^M(q)\} d\sigma_q - n(p) \times \\ &\times \int_{\Sigma_{K+1}} \{\mu_{K+1} h^E J_{K+1}^E(q) + \mu_{K+1} h^M \tilde{J}_{K+1}^M(q)\} d\sigma_q \\ & \quad p \in \Sigma_K \end{aligned}$$

В описании процесса на отражение можно заменить внутреннюю структуру одним слоем, и в описании на прохождение также можно заменить на один слой конечной толщины. Составление ИУ производится для каждого слоя, для границ S_{-l} и Σ_{N+l} интегральные уравнения

отсутствуют, как и сами границы. На внешних границах образца ПКМ действует граничные условия Шукна-Леонтовича. Внутри ПКМ производится шивка уравнений. Аналогично можно составить интегральные уравнения для слоя диэлектрика размещенного на проводящей поверхности:

$$\begin{aligned} J_0^E(p) &= 2[n(p), H_K^{CT}(p)] + \\ &+ 2n(p) \times \int_{\Sigma_0} h^E J_1^E(q) d\sigma_q + 2n(p) \times \\ &\times \int_{\Sigma_1} [h^E J_1^E(q) + h^M \tilde{J}_1^M(q)] d\sigma_q \quad , p \in \Sigma_0 \\ \tilde{J}_1^M(p) &= \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} [n(p), \tilde{E}_1^{CT}(p)] + \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} [n(p), \tilde{E}_2^{CT}(p)] + \\ &+ \frac{2n(p)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \times \int_{\Sigma_1} \{[\varepsilon_2 \xi^E - \varepsilon_1 \xi^E] J_1^E(q) + [\varepsilon_2 \xi^M - \varepsilon_1 \xi^M] \tilde{J}_1^M(q)\} d\sigma_q + \\ &+ \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} n(p) \times \int_{\Sigma_0} \xi^E J_0^E(q) d\sigma_q \\ & \quad p \in \Sigma_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1^E(p) = & \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} [n(p), H_1^{CT}(p)] + \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} [n(p), H_{K+1}^{CT}(p)] + \\ & + \frac{2n(p)}{\mu_1 + \mu_2} \times \int_{\Sigma_1} [\mu_2 h^E - \mu_1 h^E] J_1^E(q) + [\mu_2 h^M - \mu_1 h^M] \tilde{J}_K^M(q) d\sigma_q + \\ & + \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} n(p) \times \int_{\Sigma_0} h^E J_0^E(q) d\sigma_q \\ & p \in \Sigma_j \end{aligned}$$

МИУ применим к для измеряемых образцов ПКМ с гладкой рабочей поверхностью (по отношению к размеру зондирующей волны), с математической точки зрения точен.

Использование многослойной модели дает возможность рассматривать в ПКМ такие процессы как нагрев, а также исследовать шероховатость поверхности образцов, вызванные структурой материала или технологическими дефектами.

Алгоритм решения интегральных уравнений

Решение интегральных уравнений производится численными методами. Наиболее распространенным для интегральных уравнений является проекционный численный метод (метод Галеркина) [18-20]. Решение находится в виде суммы: $u(y) = \sum_{n=1}^N a_n \xi_n(y)$, которая подставля-

ется в интегральное уравнение. Функция $\xi_n(y)$ является начальной функцией некоторой полной системы. Далее выбирается другая система функций $\eta_i(x) - (i=1, 2, \dots, N)$, на каждую из них домножаем интегральное уравнение и интегрируем в пределах (с, d). В результате получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{n=1}^N a_n Q_{in} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{in} = & \int_c^d \int_a^b K(x, y) \eta_i(x) \xi_n(y) dx dy, \\ b_i = & \int_c^d f(x) \eta_i(x) dx. \end{aligned}$$

Метод хорош если функции $\xi_n(y)$ при небольшом N хорошо аппроксимируют решение, а интегралы (22) считаются аналитически. Функции ξ_n и η_i могут быть одинаковыми.

Приведем пример решения. Измерительный радиоволновый датчик на базе круглого волновода представляет собой цилиндрическую систему координат, поэтому ток излучения падающей волны задается через напряженность зондирующего поля, которая выражается через

составляющие E_r, E_j электромагнитного поля в волноводе. В круглом волноводе поле основной волны H_{11} представляется как

$$\begin{aligned} E_r^{nad} = & j \frac{\omega \mu_a r_0^2}{r \mu_{11}} J_1 \left(\frac{\mu_{11}}{r_0} r \right) \sin(\varphi) \exp(-jhz). \\ E_\varphi^{nad} = & j \frac{\omega \mu_a r_0^2}{\mu_{11}} J_1' \left(\frac{\mu_{11}}{r_0} r \right) \cos(\varphi) \exp(-jhz). \end{aligned} \quad (29)$$

где w – угловая частота колебаний; μ_a – абсолютная магнитная проницаемость; μ_{11} – корень функции Бесселя; J_1, J_1' – функция Бесселя первого порядка и ее производная; r_0 – радиус волновода; h – волновое число; r, z, j – составляющие цилиндрической системы координат. Операторы *rot, grad, div* интегральных уравнений вида:

$$\begin{aligned} H(p) = & \int_{\Sigma} \left\{ -j\omega \epsilon_a J^M(q) G(p, q) + \right. \\ & + \frac{1}{j\omega \mu_a} \text{grad div}(J^M(q) G(p, q)) + \\ & \left. + \text{rot}(J^E(q) G(p, q)) \right\} d\sigma_q \end{aligned}$$

расписываются в цилиндрической системе координат. Падающая волна представляется через разложение в ряд Фурье

$$E_r^{nad} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E_r^m \exp(jm\varphi),$$

$$\text{где } E_r^m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_r^m \exp(-jm\varphi) d\varphi.$$

Количество членов обычно берется 5-7, для получения устойчивого решения. В измерительном датчике распространяется только волна H_{11} , поэтому делается преобразование для первой гармоники, получается

$$\begin{aligned} E_r^1 = & \frac{1}{2} \frac{\omega \mu_a r_0^2}{r \mu_{11}} J_1 \left(\frac{\mu_{11}}{r_0} r \right); \\ E_\varphi^1 = & \frac{j}{2} \frac{\omega \mu_a r_0^2}{\mu_{11}} J_1' \left(\frac{\mu_{11}}{r_0} r \right). \end{aligned} \quad (30)$$

В элементах для тензорной функции Грина все расстояния нормируются, умножаются на k – волновое число свободного пространства, для приведения к одной размерности в (2.32).

$$\begin{aligned} E_r^1 = & \frac{r_0^2}{2r \mu_{11}} J_1 \left(\frac{\mu_{11}}{r_0} r \right); \\ E_\varphi^1 = & \frac{j r_0^2}{2 \mu_{11}} J_1' \left(\frac{\mu_{11}}{r_0} r \right). \end{aligned}$$

Делая подстановку, переходим к итоговым

интегральным уравнениям, которые решаются методом Галеркина, представляя искомую функцию через набор функций плоских волн.

Составленные системы уравнений позволяют производить расчеты, когда в качестве информационного параметра использования комплексный коэффициент отражения, для этой цели задаваемый магнитный ток \tilde{J}_1^M представляется как сумма токов падающего и отраженного $J^M = J_{пад}^M + J_{отр}^M$. В этом случае в систему добавляется неизвестный отраженный ток, избыточность составленной системы позволяет его вычислить. Решение задачи представлено для симметричного возбуждения, возбуждение производится волной основного типа H_{11} . В итоговых выражениях две составляющие диагональной матрицы поверхностного импеданса с помощью (2.1) выражаются через составляющие полей: $Z_1 = E_R/H_\phi$, $Z_2 = -E_\phi/H_R$. При нулевом импедансе получаем выражения для идеально проводящей поверхности.

Следует отметить, что метод интегральных уравнений накладывает некоторые ограничения на геометрические размеры границ, связанные с зависимостью размерности вычисляемой матрицы от длины границы. От шага разбиения границ на интервалы напрямую зависит точность решения. При размере до 10λ система уравнений решается с хорошей точностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

После этого производят измерения комплексных коэффициентов отражения от эталонного короткозамыкателя и измеряемого образца, с последующей обработкой результатов измерений по вычислению значений ϵ .

По приведенной теории был произведен контроль и определено значение относительной диэлектрической проницаемости образца ПКМ, материала У-ПУ $\epsilon=950\pm 30\%$ и тангенса угла диэлектрических потерь $\text{tg}\delta=1,3\pm 40\%$, имеющих модуль коэффициента отражения 0,94.

В результате проведенного рассмотрения процесса диагностики ϵ ПКМ МИУ, производит усложнение способа обработки результатов контроля, выигрыш за счет усложнения математического аппарата в случае с ПКМ. Усложнение открывает более широкие возможности по автоматизации и обработке результатов измерений, используя высокопроизводительную компьютерную технику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буланов, И.М. Технология ракетных и аэрокосмических конструкций из композиционных материалов. / И.М. Буланов, В.В. Воробей. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 1998. – 514 с.

2. Тарнопольский, Ю.М. Пространственно - армированные композиционные материалы. Справочник. / Ю.М. Тарнопольский, И.Г. Жигун, В.А. Поляков. – М.: Машиностроение, 1987. – 224 с.
3. Волокнистые и дисперсноупрочные композиционные материалы. Справочник. / В.В. Васильев. – М.: Изд-во Наука, 1976. – 214 с.
4. Углеродные волокна и углекомпозиаты. // Под ред. А.А. Берлина. – М.: Мир, 1988. – 270 с.
5. Углеродные волокна и углекомпозиаты. / Под ред. Э. Фатцер. – М.: Мир, 1988. – 336 с.
6. Емец Ю.П. Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой. / Ю.П. Емец. – Киев: Наук. думка, 1986. – 191 с.
7. Макалистер, Л. Многонаправленные углерод-углеродные композиты. / Л. Макалистер, У. Лакман // Прикладная механика композитов. – М.: Изд-во Мир, 1989. – С. 226-294.
8. Заявка 2772520 Франция, МПК⁶Н 01 Q 17/00 Material composite structural absorbant les ondes radar et utilisation d'un tel materiau: / Escarmant Jean Francois; Giat Ind. SA.- /9715681; Заявл. 11.12.97; Опубл. 18.6.99.
9. Шуньяль, Ч. Рассеяние волн поверхностями с периодической структурой. / Ч. Шуньяль, Г. Жэньао // ТИИЭР. – 1981. – Т.69. – №9. – С. 43-56.
10. Whitman G., Schwering F. Scattering by periodic metal surfaces approach. "IEEE MTT-s Int. Microwave Symp., Cherry Hill, N.S., 1976, Dig.Tech.Pap." New York, N/Y., 1976, pp.362-364(англ)
11. Wu Te-Kao, Tsai Leonard L. Scattering from arbitrarily-shaped lossy dielectric bodies of revolution. "Radio Sci" 1977, t.12, №5, pp.7098-718(англ)
12. Matsuhara Masanori "Дэнси дзёхо цусин гаккай ромбунси, Trans. Inst. Electron., Int and Commun. Eng. Jap.", 1987, -C70, №4, pp.487-492 (яп)
13. Кулижский, А.В. Распространение сигнала в двухслойной среде со случайными крупномасштабными неоднородностями. / А.В. Кулижский, М.В. Тинин // Изв. ВУЗов. Сер. Радиофизика. – 1993. – Т.36. – №6. – С.475-485.
14. Комаров, С.А. Рассеяние радиоволн на плоскостом полупространстве с шероховатой границей / С.А. Комаров, А.И. Якушев // Радиотехника и электроника. – 1998. – Т.43. – №6. – С. 650-656.
15. Дандаров, В.А. Численное решение 2-х мерного интегрального уравнения Фредгольма в задаче о распространении радиоволн над нерегулярной земной поверхностью / В.А. Дандаров // Радиотехника и электроника. – 2002. – Т.47. – №11. – С.1329-1334
16. Benali A., Chandezon J., Fontaine J. A new theory for scattering of electromagnetic waves from conducting or dielectric rough surfaces //IEEE transactions on antennas and propagation, 1992, vol.40, no.2. pp. 141-148
17. Васильев, Е.Н. Возбуждение тел вращения / Е.Н. Васильев – М.: Радио и связь, 1988. – 271 с.
18. Кислюк, М.Ж. Метод вторичных волн в задачах электродинамики / М.Ж. Кислюк. – Л.: 1970. – 151 с.
19. Малушков, Г.Д. Методы решения задач электромагнитного возбуждения тел вращения. / Г.Д. Малушков // Изв. ВУЗов. Сер. Радиофизика. – 1975. – Т.18. – №11. – С. 1563-1587.
20. Никольский, В.В. Проекционные методы в электродинамике / В.В. Никольский. – М.: Радио и связь, 1988. – 271 с.

- тродинамике // Прикладная электродинамика./ В.В. Никольский – М.: Высшая школа. – 1977. – вып.1. – С.4-50.
21. Хижняк, Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики / Н.А. Хижняк. – Киев: Наук. думка, 1986. – 256 с.
22. Неганов, В.А. Линейная макроскопическая электродинамика / В.А. Неганов, С.Б. Раевский, Г.П. Яровой. – М.: Радио и связь, т. 1, 2000. – 512 с.
23. Неганов, В.А. Электродинамика и распространение радиоволн / В.А. Неганов, О.В. Осипов, С.Б. Раевский, Г.П. Яровой. – М.: Радио и связь, 2005. – 648 с.
24. Петров, Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн / Б.М. Петров. – М.: Горячая линия–Телеком, 2003. – 558 с.
25. Никольский, В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – М.: Наука, 1989. – 452 с.

DEVELOPMENT OF GENERALIZED MATHEMATICAL MODELS OF POLYMERIC COMPOSITE MATERIALS USED IN THE AIRCRAFT

© 2019 G.V. Dmitrienko, E.N. Zguralskaya, G.L. Rivin, A.A. Fedorov

Ulyanovsk State Technical University,
Separate Structural Unit “Institute of Aviation Technologies and Management”,
Ulyanovsk

The article discusses mathematical models for diagnosis.
polymer composite materials by radio wave methods.

Keywords: mathematical model, polymer composite materials, aircraft construction.

DOI: 10.24411/1990-5378-2019-00053

German Dmitrienko, Doctor of Engineering Sciences, Associate Professor, Professor at the Department of Aircraft Engineering E-mail: dmitrienko.german@yandex.ru

Ekaterina Zguralskaya, Senior Lecturer at the Department of Aircraft Engineering.

Georgy Rivin, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor at the Department of Aircraft Engineering.

E-mail: avia@ulstu.ru

Alexander Fedorov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Aircraft Engineering.