УДК 517. 93, 517.937

О ПРИВЕДЕНИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ К РЕАЛИЗАЦИИ С ПОЛИЛИНЕЙНЫМ РЕГУЛЯТОРОМ ИНВАРИАНТНЫМ К ДВУМ РАЗНО-РЕГУЛИРУЕМЫМ ТРАЕКТОРНЫМ ПУЧКАМ

© 2020 А.В. Данеев[1], А.В. Лакеев[2], В.А. Русанов[2], А.А. Ветров[2]

[1] Иркутский государственный университет путей сообщения
[2] Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, Иркутск

Для двух разно-регулируемых пучков (конечных, счетных, или даже континуальных) управляемых траекторных кривых типа «траектория, управление», индуцированных заданной нестационарной гиперболической системой, но с разными полилинейными регуляторами, показано, что, если нелинейный функциональный оператор Релея-Ритца будет полуаддитивен на линейной оболочке от объединения этих пучков, то разрешима задача существования общего (инвариантного) нестационарного полилинейного регулятора, при наличии которого в структуре данной гиперболической системы, объединение этих траекторных пучков содержится в семействе её допустимых решений. Приведен иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: полилинейная дифференциальная реализация, гиперболическая система, инвариантный полилинейный регулятор.
DOI: 10.37313/1990-5378-2020-22-1-77-85

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 19-01-00301, 19-08-00746).

ВВЕДЕНИЕ

Качественная теория дифференциальной реализации управляемых динамических систем в настоящее время, и вероятно надолго, представляет довольно активную область исследований в области обратных задач математической физики [1]. В данном контексте настоящая работа продолжает изыскания [2], поскольку её цель – исследовать экзистенциональные доказательства существования операторных коэффициентов[1] инвариантного полилинейного регулятора (IP-регулятора) нестационарной гиперболической системы; впрочем, данные результаты распространимы на стационарные случаи [3–7]. Инвариантность регулятора предполагает, что исследуемая (моделируемая) гиперболическая система должна содержать в классе допустимых решений два фиксированных пучка управляемых траекторных кривых, при этом каждый пучок неограничен по мощности (конечный/счетный/континуальный) и индуцирован своим (индивидуальным) полилинейным регулятором.

1. ТЕРМИНОЛОГИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Далее $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $(Z_i, \|\cdot\|_Z)$, $i = 1, \ldots, n$ – вещественные сепарабельные гильбертовы пространства (предгильбертовость [8] определяют нормы $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y, \|\cdot\|_Z$), $U := Y\times Z_1\times\ldots\times Z_n$ – гильбертово пространство-произведение с нормой $\|(y, z_1, \ldots, z_n)\|_U := (\|y\|_Y^2 + \sum_{i=1,\ldots,n} \|z_i\|_Z^2)^{1/2}$, $L(Y, X)$ – банахово пространство с операторной нормой $\|\cdot\|_{L(Y,X)}$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из Y в X (аналогично $(L(X, X), \|\cdot\|_{L(X,X)})$ и $(L(Z_i, X), \|\cdot\|_{L(Z,X)})$), X^i – i-ая декартова степень пространства X, $\mathcal{Z}(X^i, Z_i)$ – пространство всех непрерывных i-линейных (полилинейных) отображений[2] из X в Z_i.

Пусть $T := [t_0, t_1]$ – отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ и $\wp_\mu$ – σ-алгебра всех μ-измеримых подмножеств из T. Если ниже $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ – некоторое банахово пространство, то через $L_p(T, \mu, \mathcal{B})$, $p\in[1, \infty)$ будем обозначать банахово фактор-пространство классов μ-эквивалентности всех интегрируемых по Бохнеру [8] отображений $f: T \to \mathcal{B}$ с нормой $(\int_T \|f(\tau)\|^p\mu(d\tau))^{1/p}$, через $L_\infty(T, \mu, \mathcal{B})$ – пространство всех эквивалентных классов μ-измеримых и

[1] Это сводит задачу структурной идентификации нелинейного регулятора системы, как апостериорной реализации его общей полилинейной структуры, к более осязаемой задаче разрешимости реализации адаптационных (настраиваемых *a posteriori*) оператор-функций при мультипликативном представлении i-линейных аддитивных членов этой структуры; другой (более радикальный) подход связан с идентификацией операторов из i-кратных тензорных произведений гильбертовых пространств, в частности, подпространств пространства Фока [8].

[2] Пространство $\mathcal{Z}(X^k, Z)$ линейное (как пространство функций со значениями в векторном пространстве Z: сложение и умножение на скаляр производится поточечно), при этом под $\mathbb{B} \in \mathcal{Z}(X^k, Z)$ понимается такое соответствие $z = \mathbb{B}(x_1, \ldots, x_k)$ между упорядоченными системами $(x_1, \ldots, x_k)$ элементов из X и элементами из Z, которое линейно по каждому x_i при фиксированных остальных элементах, и для некоторого $c < 0$ удовлетворяет $\|\mathbb{B}(x_1, \ldots, x_k)\|_Z \le c\|x_1\|_X \ldots \|x_k\|_X$; это эквивалентно: для каждого i и любых $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1},\ldots, x_k \in X$ верно $x_i \mapsto \mathbb{B}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k) \in L(X, Z)$.

Данеев Алексей Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор. E-mail: daneev@mail.ru
Лакеев Анатолий Валентинович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник
Русанов Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник. E-mail: v.rusanov@mail.ru
Ветров Александр Анатольевич, научный сотрудник.

Пусть $T := [t_0, t_1]$ – отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ и $\wp_\mu$ – σ-алгебра всех μ- измеримых подмножеств из T. Если ниже $(\mathrm{B}, ||\cdot||)$ – некоторое банахово пространство, то через $\mathrm{L}_p(T, \mu, \mathrm{B})$, $p \in [1, \infty)$ будем обозначать банахово фактор-пространство классов μ-эквивалентности всех интегрируемых по Бохнеру [8] отображений f: $T \to \mathrm{B}$ с нормой $(\int_T ||f(\tau)||^p \mu(d\tau))^{1/p}$, через $\mathrm{L}_\infty(T, \mu, \mathrm{B})$ – пространство всех эквивалентных классов μ-измеримых и μ-существенно ограниченных функций из T в B. Кроме того, $AC^1(T, X)$ – множество всех функций φ: $T \to X$, первая производная которых является абсолютно непрерывной на T функцией (относительно меры μ), сверх того, для упрощения примем

$$\mathbf{\Pi} := AC^1(T, X) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, Y) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, Z_1) \times \ldots \times \mathrm{L}_2(T, \mu, Z_n).$$

Введем вспомогательные конструкции, связанные с системой обозначений. Через

$$H_2 := \mathrm{L}_2(T, \mu, Y) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, Z_1) \times \ldots \times \mathrm{L}_2(T, \mu, Z_n)$$

обозначим пространство-произведение с топологией, индуцированной нормой

$$||(w_0, \ldots, w_n)||_H := (\int_T ||(w_0(\tau), \ldots, w_n(\tau))||_U^2 \mu(d\tau))^{1/2}, \ (w_0, \ldots, w_n) \in H_2;$$

ясно, что H_2 – гильбертово пространство (в силу [8] конструкции нормы $||\cdot||_H$).

Далее, рассмотрим банахово пространство-произведение

$$\mathbf{L}_2 := \mathrm{L}_2(T, \mu, L(Y, X)) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, L(Z_1, X)) \times \ldots \times \mathrm{L}_2(T, \mu, L(Z_n, X))$$

классов μ-эквивалентности упорядоченных систем оператор-функций с нормой

$$||(B_0, \ldots, B_n)||_{\mathrm{L}} := (\int_T (||B_0(\tau)||_{L(Y,X)}^2 + \textstyle\sum_{i=1,\ldots,n} ||B_i(\tau)||_{L(Z,X)}^2)\mu(d\tau))^{1/2}.$$

Пусть заданы оператор-функции A_0, $A_1 \in \mathrm{L}_1(T, \mu, L(X, X))$, $A_2 \in \mathrm{L}_\infty(T, \mu, L(X, X))$, при этом μ-почти всюду в T оператор $A_0(t)$, $t \in T$ самосопряженный и строго положительно-определенный, а также фиксированы натуральное число n, i-линейные отображения $\mathrm{B}_i \in L(X^i, Z_i)$, $i = 1, \ldots, n$ и

$$\begin{gathered} N_1 \subset \{(x, u, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x)) \in \mathbf{\Pi}\}, \ \mathrm{Card}\, N_1 \le \infty, \\ N_2 \subset \{(x, u, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x)) \in \mathbf{\Pi}\}, \ \mathrm{Card}\, N_2 \le \infty, \end{gathered} \tag{1}$$

два фиксированных варианта поведения исследуемой динамической системы с траекториями x, программным управлением u и позиционными обратными связями (формами) $\mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x)$, при этом $N_1 \cap N_2 = \varnothing$; здесь и далее Card N_j – мощность множества (пучка) N_j. Ясно, что

$$\mathrm{B}_i(x, \ldots, x) \in \mathrm{L}_\infty(T, \mu, Z_i), \forall i = 1, \ldots, n, \forall (x, u, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x)) \in N_j, j = 1, 2.$$

Условимся далее отличать в обозначениях вектор-функцию $(x, u, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x)) \in \mathbf{\Pi}$ как класс эквивалентности (mod μ) от конкретного представителя из этого класса – «индивидуальной» вектор-функции вида:

$$t \mapsto (x(t), u(t), \mathrm{B}_1(x(t)), \ldots, \mathrm{B}_n(x(t), \ldots, x(t))).$$

Далее предполагаем, что в действительности управляемые динамические пучки N_1, N_2 – суть решения *одной* гиперболической системы с *разными* полилинейными регуляторами:

$$\begin{gathered} A_2 d^2x/dt^2 + A_1 dx/dt + A_0 x = B_{01} u + \textstyle\sum_{i=1,\ldots,n} B_{i1} \mathrm{B}_i(x, \ldots, x), \ (B_{01}, \ldots, B_{n1}) \in \mathbf{L}_2, \\ \forall (x, u, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x)) \in N_1; \\ A_2 d^2x/dt^2 + A_1 dx/dt + A_0 x = B_{02} u + \textstyle\sum_{i=1,\ldots,n} B_{i2} \mathrm{B}_i(x, \ldots, x), \ (B_{02}, \ldots, B_{n2}) \in \mathbf{L}_2, \\ \forall (x, u, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x)) \in N_2, \\ (B_{01}, \ldots, B_{n1}) \ne (B_{02}, \ldots, B_{n2}); \end{gathered} \tag{2}$$

здесь и далее с учётом леммы 1 [1] в аналитической конструкции x-решения следуем § 121 [9].

Рассмотрим задачу: определить (в терминах вектор-функций объединенного пучка $N_1 \cup N_2$) аналитические условия существования упорядоченной системы оператор-функций $(B_0^+, \ldots, B_n^+) \in \mathbf{L}_2$, для которой осуществима дифференциальная реализация динамического пучка $N_+ := N_1 \cup N_2$ вида:

$$\begin{gathered} A_2 d^2x/dt^2 + A_1 dx/dt + A_0 x = B_0^+ u + \textstyle\sum_{i=1,\ldots,n} B_i^+ \mathrm{B}_i(x, \ldots, x), \\ \forall (x, u, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x)) \in N_+. \end{gathered} \tag{3}$$

Постановка обратной задачи (3) приводит к некоторому количеству методологических схем математического моделирования[3], правильно объясняющих физическую действительность, вырабатывая новую математическую интуицию в области обратных задач гиперболических систем [10].

Замечание 1. Отметим, что нет структурных препятствий[4], чтобы распространить полученные ниже результаты на качественную теорию реализации *IP*-регулятора гиперболической системы (3), включающего в свой состав полилинейные операторы – программно-позиционные связи из $L(X^i \times Y, Z_i)$, и содержащие в качестве дополнительных переменных k-раз ($k \leq i$) производную dx/dt и 1-раз программное управление u; ясно, что в данной постановке $\mathrm{B}(x, \ldots, dx/dt, \ldots, u) \in \mathrm{L}_2(T, \mu, Z_i)$ для любого отображения $\mathrm{B} \in L(X^i \times Y, Z_i)$. При этом, если для дифференциальной реализации (3) ставить задачу разрешимости реализации полилинейных форм из $L(X^i \times Y, Z_i)$, $i = 1, \ldots, n$, то основой математического аппарата может служить конструкция тензорного произведения[5] гильбертовых пространств [8], т.к. его структура сводит изучение полилинейных отображений к изучению линейных отображений путем введения новой операции на категории линейных пространств.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Обозначим через $\mathrm{L}(T, \mu, R)$ пространство классов μ-эквивалентности всех вещественных μ- измеримых на T функций и пусть $\leq_{\mathrm{L}}$ – квазиупорядочение в $\mathrm{L}(T, \mu, R)$ такое, что $\phi_1 \leq_{\mathrm{L}} \phi_2$, если $\phi_1(t) \leq \phi_2(t)$ μ-почти всюду в T. Наименьшую верхнюю грань для подмножества $W \subset \mathrm{L}(T, \mu, R)$ обозначим через $\sup_{\mathrm{L}} W$, если эта грань существует для подмножества W в структуре частичного упорядочения $\leq_{\mathrm{L}}$.

Определение 1 [2]. *Рассмотрим оператор* $\Psi\colon \Pi \to \mathrm{L}(T, \mu, R)$, *построенный согласно правила*

$$\Psi(q, w_0, \ldots, w_n)(t) := \begin{cases} \|A_2(t)d^2q(t)/dt^2 + A_1(t)dq(t)/dt + A_0(t)q(t)\|_X (\|w_0(t)\|_Y^2 + \\ + \sum_{i=1,\ldots,n} \|w_i(t)\|_Z^2)^{-1/2}, \text{ если } (w_0(t), \ldots, w_n(t)) \neq 0 \in U; \\ 0 \in R, \text{ если } (w_0(t), \ldots, w_n(t)) = 0 \in U; \end{cases} \qquad (4)$$

следуя терминологии [12, 13] *оператор* (4) *назовем оператором Релея–Ритца*.

В конструкции оператора Ψ корректно включение $d^2q/dt^2 \in \mathrm{L}_1(T, \mu, X)$ (в силу леммы 1 [1]).

Пусть $N \subset \{(x, u, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x)) \in \Pi\}$, Card $N \leq \infty$ и Q – некоторое (т.е. любое) поглощающее множество в Span N; в геометрии поглощающего множества следуем [8], т.е. $\bigcup\{\alpha Q\}_{\alpha>0} = \mathrm{Span}\, N$. Фиксируя терминологию (мотивации см. в теореме 2 [2]), будем говорить, что пучок управляемых динамических процессов N *регулярный* для тройки оператор-функций (A_0, A_1, A_2) гиперболической системы (3) в том и только в том случае, если имеет место следующее положение:

$$\{t \in T\colon \|A_2(t)d^2q(t)/dt^2 + A_1(t)dq(t)/dt + A_0(t)q(t)\|_X = 0\} \supset$$

$$\supset \{t \in T\colon \|w_0(t)\|_Y + \textstyle\sum_{i=1,\ldots,n} \|w_i(t)\|_Z = 0\} \ (\mathrm{mod}\ \mu),\ \ \forall (q, w_0, \ldots, w_n) \in Q.$$

Замечание 2. i) Если, при анализе динамического пучка N, обнаруживается, что

$$\bigcup\nolimits_{i=1,\ldots,n} \mathrm{supp}\, \|\mathrm{B}_i(x, \ldots, x)\|_Z =$$

$$= \mathrm{supp}\, \|x\|_X \ (\mathrm{mod}\ \mu),\ \ \forall (x, u, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x)) \in N,$$

то пучок N будет регулярным для любой тройки оператор-функций

$$(A_0, A_1, A_2) \in \mathrm{L}_1(T, \mu, L(X, X)) \times \mathrm{L}_1(T, \mu, L(X, X)) \times \mathrm{L}_\infty(T, \mu, L(X, X));$$

ii) в силу теоремы 2 [2] и представления (2) N_1, N_2 из (1) суть регулярные динамические пучки.

Приведем необременительные исходные положения, уточняющие позицию i) замечания 2.

---

[3] В [2] коротко обсуждается другая (геометрическая) трактовка обратной задачи (3) и дается вариант её решения – теорема 3 [2]. В разделе 4 данная трактовка получит дальнейшее развитие (оно выписано в формулировке теоремы 2 и её следствия 3) при определенных ограничениях на мощность динамических пучков N_1, N_2.

[4] Этого нельзя сказать в отношении структуры регулятора с программно-позиционными связями из $L(X^i \times Y^j, Z_{ij})$, $j \geq 2$, поскольку в данном случае, т.е. когда область определения оператора $\mathrm{B} \in L(X^i \times Y^j, Z_{ij})$, $j \geq 2$ включает j-раз переменную (управление) u, может *не выполняться* (см. комментарий сноски 2) условие $\mathrm{B}(x, \ldots, dx/dt, \ldots, u) \in \mathrm{L}_2(T, \mu, Z_{ij})$.

[5] Некоторые элементы этого теоретико-тензорного расширения отражает работа [6] и алгоритм (2.1)–(2.2) [11] структурно-параметрической идентификации; см. на его базе пример 1 [11] апостериорного восстановления дифференциальных уравнений нелинейной динамики пространственно-вращательного движения, описываемого уравнением Эйлера с полилинейными членами относительно координат угловых скоростей и регулятором их демпфирования.

Лемма 1 (модификация леммы 1 [14]). *Если* $\ker B_1 = 0$, *то динамический пучок N будет регулярным для любых оператор-функций* $A_0, A_1 \in L_1(T, \mu, L(X, X))$, $A_2 \in L_\infty(T, \mu, L(X, X))$.

Доказательство. Ясно, что положение $\ker B_1 = 0$ влечет

$$\bigcup_{i=1,\ldots,n} \operatorname{supp} \|B_i(x, \ldots, x)\|_Z =$$
$$= \operatorname{supp} \|x\|_X \ (\mathrm{mod}\ \mu),\ \ \forall (x, u, B_1(x), \ldots, B_n(x, \ldots, x)) \in N.$$

Поэтому достаточно показать, что для любых функций $f \in AC(T, X)$, $g \in L(T, \mu, R)$ равенство $df(t)/dt = 0$ выполняется μ-почти всюду в $T_{fg} :=\{t \in T: \|f(t)\|_X + |g(t)| = 0\}$; ясно, что в структуре доказательства теоремы пара $(f, df/dt)$ выполняет двоякую роль – роль пары $(x, dx/dt)$ и пары $(dx/dt, d^2x/dt^2)$.

Пусть $T_f := \{t \in T: f(t) = 0\}$. Поскольку $T_f \supset T_{fg}$, то в случае $\mu(T_f) = 0$ утверждение $\{t \in T: \|df(t)/dt\|_X = 0\} \supset T_{fg}$ (mod μ) прозрачно. Поэтому рассмотрим вариант $\mu(T_f) \neq 0$.

Обозначим через $T_0 := \{t \in T_f: \exists\delta > 0,\ \mu((t-\delta, t+\delta) \cap T_f) = 0\}$. Покажем, что $\mu(T_0) = 0$. Для этого выберем каждому $t \in T_0$ константу $\delta^*_t > 0$ так, что $\mu((t-\delta^*_t, t+\delta^*_t) \cap T_f) = 0$. Найдём такие рациональные числа δ'_t, δ''_t, что $\delta'_t \in (t-\delta^*_t, t)$, $\delta''_t \in (t, t+\delta^*_t)$ и пусть $I_t := (\delta'_t, \delta''_t)$. Тогда семейство интервалов $\{I_t\}_{t\in T0}$ покрывает множество T_0, а т.к. каждый интервал I_t является открытым с рациональными концами, то семейство $\{I_t\}_{t\in T0}$ содержит счётное подсемейство $\{I_{ti}\}_{i=1,2,\ldots}$, также являющееся покрытием множества T_0. Далее, поскольку для любого индекса $i = 1, 2, \ldots$ выполняется $I_{ti} \subset (t_i-\delta^*_{ti}, t_i+\delta^*_{ti})$, то $\mu(I_{ti} \cap T_\delta) = 0$, и значит справедлива следующая «цепочка» μ-отношений:

$$\mu(T_0) = \mu(T_0 \cap (\textstyle\bigcup_{i = 1, 2, \ldots} I_{ti})) =$$
$$= \mu(\textstyle\bigcup_{i = 1, 2, \ldots} T_0 \cap I_{ti}) \leq \sum_{i=1, 2, \ldots} \mu(T_0 \cap I_{ti}) = 0,$$

откуда $\mu(T_0) = 0$. Теперь проведём завершающую часть доказательства.

Пусть $t \in T_f \backslash T_0$, тогда для любого $\delta > 0$ будет $\mu((t-\delta, t+\delta) \cap T_f) > 0$, и поскольку $f\in AC(T, X)$, то найдётся такое множество $T^* \subset T$, что $\mu(T^*) = 0$ и $\forall t \in T_f\backslash T^*$ существует $df(t)/dt$. Покажем, что $df(t)/dt = 0$ для $t \in T_f\backslash(T_0 \cup T^*)$. Действительно, для любого натурального k имеем $\mu((t - 1/k, t + 1/k) \cap T_f) > 0$ и, следовательно, найдётся момент $t_k \neq t$, $|t_k-t| < 1/k$, $t_k \in T_f$. Но тогда в структуре сильной топологии будет выполнятся предельный переход (что, в конечном итоге, и требовалось показать):

$$df(t)/dt = \lim\{(f(t-\Delta t) - f(t))/\Delta t: \Delta t \to 0\} =$$
$$= \lim\{(f(t_k) - f(t))/(t_k - t) = 0 \in X: k \to \infty\} = 0 \in X.$$

Следствие 1. *Если* $(x, u, B_1(x), \ldots, B_n(x, \ldots, x)) \in \Pi$ *и* $\ker B_1 = 0$, *то* $\wp_\nu \subset \wp_{\nu\_}$, *где* ν, $\nu\_$ *– соответствующие лебеговски пополненные бихевиористические меры вида*

$$\nu(S) := \int_S (\|u(\tau)\|_Y^2 + \textstyle\sum_{i=1,\ldots,n} \|B_i(x(\tau), \ldots, x(\tau))\|_Z^2)\mu(d\tau),\ \ S \in \wp_\mu,$$
$$\nu\_(S) := \int_S \|A_2(\tau)d^2x(\tau)/d\tau^2 + A_1(\tau)dx(\tau)/d\tau + A_0(\tau)x(\tau)\|_X \mu(d\tau),\ \ S \in \wp_\mu,$$

при этом, если $\mathrm{Im}\, B_1 = Z_1$, *то*

$$\|A_2d^2x/dt^2 + A_1dx/dt + A_0x\|_X (\|u\|_Y^2 + \textstyle\sum_{i=1,\ldots,n} \|B_i(x, \ldots, x)\|_Z^2)^{-1/2} \in L_2(T, \mu, R) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \|A_2d^2x/dt^2 + A_1dx/dt + A_0x\|_X (\|u\|_Y^2 + \|x\|_X^2 + \textstyle\sum_{i=2,\ldots,n} \|B_i(x, \ldots, x)\|_Z^2)^{-1/2} \in L_2(T, \mu, R),$$

для любых оператор-функций

$$A_0, A_1 \in L_1(T, \mu, L(X, X)), A_2 \in L_\infty(T, \mu, L(X, X)).$$

Из функциональной конструкции (4) с очевидностью следует, что оператор Релея–Ритца удовлетворяет простым (но важным) соотношениям:

$$0 \leq_L \Psi(\phi),\ \text{где}\ 0 \in L(T, \mu, R),\ \phi \in \Pi, \qquad (5)$$
$$\Psi(\beta\phi) = \Psi(\phi),\ 0 \neq \beta \in R.$$

Теория оператора Релея–Ритца нуждается в очень точном теоретико-множественном языке, что заставляет нас уделить этому языку особое внимание. Поэтому прежде чем идти дальше, нам будет удобно ввести дополнительную терминологию.

Определение 2 [12, 13]. *Оператор Релея–Ритца назовем полуаддитивным с весом* $\alpha \in R$ *на множестве* $E \subset \Pi$, *если для любой пары* $(\phi_1, \phi_2) \in E\times E$ *справедливо неравенство*

$$\Psi(\phi_1 + \phi_2) \leq_L \alpha\Psi(\phi_1) + \alpha\Psi(\phi_2).$$

Лемма 2. *Полуаддитивность (с фиксированным весом) оператора Релея–Ритца есть свойство конечного характера для подмножеств множества* Π.

Доказательство. Пусть на некотором множестве $E \subset \Pi$ оператор Релея–Ритца Ψ полуаддитивен с некоторым весом α, тогда данный оператор будет полуаддитивен с этим весом на любом конечном подмножестве из E. С другой стороны, если Ψ полуаддитивен с тем же весом на любом конечном подмножестве множества E, то для любой пары вектор-функций $(\phi_1, \phi_2) \in E\times E$ будет выполняться $\Psi(\phi_1 + \phi_2) \leq_L \alpha\Psi(\phi_1) + \alpha\Psi(\phi_2)$, поскольку на подмножестве $\{\phi_1, \phi_2\} \subset E$ оператор Ψ полуаддитивен с весом α. □

Взаимоотношение между леммой 2 и леммой Тейхмюллера–Тьюки[6] приводит к важной геометрической характеристике полуаддитивности оператора Релея–Ритца, а именно: в Π существуют максимальные множества, на которых оператор (4) полуаддитивен с некоторым весом $\alpha > 0$, при этом данные множества не могут быть *линейными* в случае $\alpha \in (0, 1)$; чтобы убедиться, достаточно рассмотреть действие Ψ на паре $(\phi, 0) \in E\times E$, $\phi \neq 0$ за исключением тривиального варианта $E = \{0\} \subset \Pi$, именно поэтому ниже в лемме 3 (и по умолчанию дальше) предполагается, что вес полуаддитивности оператора Ψ – некоторая фиксированная постоянная $\alpha \in [1, \infty)$.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha \in [1, \infty)$, *тогда в* Π *существует (не единственное) максимальное относительно теоретико-множественного включения линейное множество E, на котором оператор Релея–Ритца полуаддитивен с весом* α.

Доказательство. Пусть $(q_1, w_{01}, \ldots, w_{n1})$ – ненулевой элемент в Π. Тогда в силу (5) оператор Ψ полуаддитивен с весом α на линейной оболочке E_1 над $(q_1, w_{01}, \ldots, w_{n1})$. Далее, пусть $(q_2, w_{02}, \ldots, w_{n2}) \in \Pi$, $(q_2, w_{02}, \ldots, w_{n2}) \notin E_1$ и Ψ полуаддитивен на $E_1 \cup \{(q_2, w_{02}, \ldots, w_{n2})\}$ с весом α; если такового элемента не существует, то E_1 – искомое максимальное множество. Выберем в $E_1 + E_2$, где E_2 – линейная оболочка над $(q_2, w_{02}, \ldots, w_{n2})$, произвольный элемент

$$\beta_1(q_1, w_{01}, \ldots, w_{n1}) + \beta_2(q_2, w_{02}, \ldots, w_{n2}),\ \beta_1, \beta_2 \in R,\ \beta_2 \neq 0.$$

В такой постановке в соответствии с формулами (5) будут выполняться соотношения:

$$\begin{aligned} &\Psi(\beta_1(q_1, w_{01}, \ldots, w_{n1}) + \beta_2(q_2, w_{02}, \ldots, w_{n2})) = \\ &= \Psi(\beta_1\beta_2^{-1}(q_1, w_{01}, \ldots, w_{n1}) + (q_2, w_{02}, \ldots, w_{n2})) \leq_L \\ &\leq_L \alpha\Psi(\beta_1\beta_2^{-1}(q_1, w_{01}, \ldots, w_{n1})) + \alpha\Psi(q_2, w_{02}, \ldots, w_{n2})) = \\ &= \alpha\Psi(\beta_1(q_1, w_{01}, \ldots, w_{n1})) + \alpha\Psi(\beta_2(q_2, w_{02}, \ldots, w_{n2})), \end{aligned}$$

откуда следует, что оператор Ψ полуаддитивен на линейном многообразии $E_1 + E_2$ с весом α. Рассуждая аналогично, можно показать, что в предыдущих выкладках E_1 можно заменить на любое ненулевое линейное подмножество из Π, на котором Ψ полуаддитивен с весом равным α.

Остальные построения будут касаться цепей, поэтому пусть P – семейство всех упорядоченных пар $(E^{\#}, \alpha^{\#})$, где $E^{\#}$ – ненулевое линейное множество в Π и $\alpha^{\#} \in [1, \infty)$, причём оператор Релея–Ритца полуаддитивен на $E^{\#}$ с весом $\alpha^{\#}$. Введем в P частичное упорядочение $<<$, считая

$$(E^{\#}, \alpha^{\#}) << (E^{\#\#}, \alpha^{\#\#}) \Leftrightarrow E^{\#} \subset E^{\#\#},\ \ \alpha^{\#} = \alpha^{\#\#}.$$

По теореме Хаусдорфа (принцип максимума Хаусдорфа [15]) в семействе P существует Ω – максимальная цепь (максимальное линейно упорядоченное множество), содержащая цепь $(E_1, \alpha) << (E_1 + E_2, \alpha)$. Пусть Φ – множество всех линейных множеств E_γ в Π, таких, что $(E_\gamma, \alpha) \in \Omega$. Тогда Φ будет линейно упорядочено относительно теоретико-множественного включения, следовательно, объединение $E := \bigcup\{E_\gamma : E_\gamma \in \Phi\}$ образует (тривиальным образом) линейное многообразие в Π.

Далее, если $(\phi_1, \phi_2) \in E\times E$, то, очевидно, $(\phi_1, \phi_2) \in E_\gamma\times E_\gamma$ для некоторого множества $E_\gamma \in \Phi$, откуда приходим к весовой полуаддитивности для пары (ϕ_1, ϕ_2) оператора Ψ:

$$\Psi(\phi_1 + \phi_2) \leq_L \alpha\Psi(\phi_1) + \alpha\Psi(\phi_2)$$

и значит $(E, \alpha) \in \Omega$. При этом если бы многообразие E не оказалось максимальным в Π, на котором наш оператор Ψ полуаддитивен с весом α, то конструкция линейного расширения, указанная выше, позволила бы получить в семействе P элемент (E^{*}, α), для которого E^{*} строго содержит E, но это противоречило бы максимальности цепи Ω в семействе P. □

3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ *IP*-РЕГУЛЯТОРА

Предмет исследования этого раздела – существование оператор-функций инвариантного полилинейного регулятора системы (3). Не стремясь к формулировке наилучшего положительного результата в этом направлении, дадим его в виде компактной теоремы – простое достаточное условие; все части его доказательства по существу уже подготовлены нами, и осталось только соединить их.

Теорема 1. *Пусть* $N_1, N_2 \subset \Pi$ – *пучки динамических процессов* (1), (2). *Тогда задача* (3) *разрешима, если оператор Релея–Ритца полуаддитивен с некоторым весом на линейном многообразии*

[6] Напомним, что лемма Тейхмюллера–Тьюки является альтернативной формой аксиомы выбора [15].

$$\mathrm{Span}\, N_1 + \mathrm{Span}\, N_2.$$

Замечание 3. Остается открытым вопрос: эквивалентна ли теорема 1 теореме 3 [2] – решение задачи инвариантного расширения дифференциальной реализации в терминах угловой метрики подпространств гильбертова пространства; при этом теорема 1 указывает на значимость (в духе *a majore ad minus*) конструкции веса полуаддитивности оператора (4) при обсуждении вопроса о расширении пучков динамических процессов, допускающих дифференциальную реализацию (3).

Доказательство теоремы 1. Поскольку линейные оболочки Span N_1 и Span N_2 – поглощающие множества в себе, то в силу теоремы 2 [2] найдутся две функции $\phi_1, \phi_2 \in L_2(T, \mu, R)$, для которых будут выполняться следующие два функциональных неравенства[7]

$$\sup\nolimits_L \Psi[\mathrm{Span}\, N_1] \le_L \phi_1,$$
$$\sup\nolimits_L \Psi[\mathrm{Span}\, N_2] \le_L \phi_2.$$

Выберем в многообразии Span N_1 + Span N_2 в качестве его поглощающего множества само это многообразие. Тогда в силу полуаддитивности Ψ (с весом α) на Span N_1 + Span N_2 получаем

$$\sup\nolimits_L \Psi[\mathrm{Span}\, N_1 + \mathrm{Span}\, N_2] \le_L$$
$$\le_L \alpha \sup\nolimits_L \Psi[\mathrm{Span}\, N_1] + \alpha \sup\nolimits_L \Psi[\mathrm{Span}\, N_2] \le_L \alpha(\phi_1 + \phi_2),$$

откуда, исходя из теоремы 2 [2], следует (с учетом Span $N_1 \cup N_2$ = Span N_1 + Span N_2 и пункта ii) замечания 2), что множество процессов $N_1 \cup N_2$ обладает дифференциальной реализацией (3). □

Следствие 2. *Пусть множества* $N_1, N_2, \ldots, N_k \subset \mathbf{\Pi}$ *имеют реализации* (2). *Тогда* $\bigcup_{i=1,\ldots,k} N_i$, *– семейство решений системы* (3) *для некоторой упорядоченной системы* $(B_0^+, \ldots, B_n^+) \in \mathbf{L}_2$, *если* Ψ *полуаддитивен с весом на линейном многообразии суммы линейных оболочек этих множеств*:

$$\mathrm{Span}\, N_1 + \mathrm{Span}\, N_2 + \ldots + \mathrm{Span}\, N_k. \ \square$$

Следствие 2 позволяет строить алгебру множеств динамических процессов с единицей $\bigcup_{i=1,\ldots,k} N_i$, все элементы которой (как совокупность всех подмножеств единицы) обладающей реализацией (3) с фиксированной моделью (3), при этом вопрос об «индивидуальном» характеристическом признаке дифференциальной реализации для каждого отдельного пучка N_i ($i = 1, \ldots, k$) особенно просто (конструктивно) решается на семействе одноэлементных $N_i = \{(x, u, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x))_i\}$:

$$\Psi((x_i, u_i, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x))_i) \in L_2(T, \mu, R), \ \ i = 1, \ldots, k;$$

что есть аналитический факт теоремы 1 [2]. Если данные соотношения (или некоторые из них) не выполняются, можно ставить задачу синтеза $\mathrm{B}_i \in L(X^i, Z_i)$, $i = 1, \ldots, n$, обеспечивающих означенные условия[8], при этом методологически эту задачу можно трактовать как структурную идентификацию[9] нелинейной компоненты уравнения (3); в данном контексте см. положения работы [11].

4. СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Теперь посмотрим, какие аналитические результаты в решении задачи существования реализации оператор-функций $(B_0^+, \ldots, B_n^+) \in \mathbf{L}_2$ гиперболической системы (3) привносят условия:

$N_1 \subset \{(x, u, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x)) \in \mathbf{\Pi}\}$, $1 \le \mathrm{Card}\, N_1 \le \aleph_0$ (алеф-нуль) – не более чем счетный пучок решений системы (2) с упорядоченной системой оператор-функций $(B_{01}, \ldots, B_{n1}) \in \mathbf{L}_2$,

$N_2 := (x^*, u^*, \mathrm{B}_1(x^*), \ldots, \mathrm{B}_n(x^*, \ldots, x^*)) \in \mathbf{\Pi}$ – решение системы (2) с набором оператор-функций $(B_{02}, \ldots, B_{n2}) \in \mathbf{L}_2$, при этом $(B_{02}, \ldots, B_{n2}) \neq (B_{01}, \ldots, B_{n1})$ и $(x^*, u^*, \mathrm{B}_1(x^*), \ldots, \mathrm{B}_n(x^*, \ldots, x^*)) \notin \mathrm{Span}\, N_1$;

т.о. «объединенный» динамический пучок $N_+ := N_1 \cup N_2$ либо конечный, либо счетный.

Очевидно, что в любой точке $t \in T$ возможно разложение в гильбертовом пространстве U вектора $(u^*(t), \mathrm{B}_1(x^*(t)), \ldots, \mathrm{B}_n(x^*(t), \ldots, x^*(t)))$ на проекцию в Span $\{(u(t), \mathrm{B}_1(x(t)), \ldots, \mathrm{B}_n(x(t), \ldots, x(t))): (x, u, \mathrm{B}_1(x), \ldots, \mathrm{B}_n(x, \ldots, x)) \in N_1\}$, которую обозначим $(u^*(t), \mathrm{B}_1(x^*(t)), \ldots, \mathrm{B}_n(x^*(t), \ldots, x^*(t)))\_$, и дополнение

$$(u^*(t), \mathrm{B}_1(x^*(t)), \ldots, \mathrm{B}_n(x^*(t), \ldots, x^*(t)))_\perp :=$$
$$= (u^*(t), \mathrm{B}_1(x^*(t)), \ldots, \mathrm{B}_n(x^*(t), \ldots, x^*(t))) - (u^*(t), \mathrm{B}_1(x^*(t)), \ldots, \mathrm{B}_n(x^*(t), \ldots, x^*(t)))\_.$$

В данной постановке несложно установить, что вектор-функции

---

[7] Существует (см. теорему 17 [16, с. 68]) счетное множество $Q^* \subset \mathrm{Span}\, N_i$ такое, что, если $\sup_L \Psi(\mathrm{Span}\, N_i) \in L(T, \mu, R)$, то $\phi := \sup_L \Psi(\mathrm{Span}\, N_i)$ осуществляет sup-конструкция: $t \mapsto \phi(t) = \sup\{\Psi(q, w_0, \ldots, w_n)(t) \in R: (q, w_0, \ldots, w_n) \in Q^*\}$.

[8] Можно также искать такие функции $\varphi_{jp}: X \to X$, что $\Psi((x, u, \mathrm{B}_1(\varphi_{11}(x)), \ldots, \mathrm{B}_n(\varphi_{n1}(x), \ldots, \varphi_{nn}(x)))_i) \in L_2(T, \mu, R)$, $i = 1, \ldots, k$.

[9] Поясним: если в *параметрической* идентификации ищется ассерторическое отношение «=» в некотором R^n, то в *структурной* идентификации $\mathrm{B}_i \in L(X^i, Z_i)$, $i = 1, \ldots, n$ устанавливается аподиктическое отношение «$\in$» в $L_2(T, \mu, R)$.

$$t \mapsto (u^*(t), \mathrm{B}_1(x^*(t)), \ldots, \mathrm{B}_n(x^*(t), \ldots, x^*(t))_{\_} : T \to U,$$
$$t \mapsto (u^*(t), \mathrm{B}_1(x^*(t)), \ldots, \mathrm{B}_n(x^*(t), \ldots, x^*(t)))_{\perp} : T \to U$$

являются μ-измеримыми[10]. Далее, обозначим через $E_1(N_1)$, $E_2(N_2) \subset H_2$ подпространства из формулировки теоремы 3 [2], через $E_{\perp}(N_2)$ – замыкание в H_2 линейной оболочки

$$\mathrm{Span}\,\{\chi\cdot(u^*, \mathrm{B}_1(x^*), \ldots, \mathrm{B}_n(x^*, \ldots, x^*))_{\perp} : \chi \in F\},$$

где $F \subset \mathrm{L}(T, \mu, R)$ – семейство классов эквивалентности (mod μ) всех характеристических функций, индуцированных элементами σ-алгебры $\wp_{\mu}$.

Лемма 4. *Подпространства E_1 и $E_{\perp}$ ортогональны в гильбертовом пространстве H_2.*

Везде далее для двух замкнутых подпространств из пространства H_2, таких, что их пересечение есть $\{0\} \subset H_2$, а векторная сумма замкнута в H_2, условимся знак их векторного сложения, обозначать через $\oplus$, в частности, теорема 14.C [9] и лемма 4 делают корректной запись $E_1 \oplus E_{\perp}$.

Зададимся вопросом: при каких аналитических условиях, накладываемых на множества управляемых динамических процессов N_1 и N_2, «расширенное» семейство процессов N_+ обладает дифференциальной реализацией (3)? На одном из путей геометрического решения этой задачи выступает построение характеристического признака (см. ниже лемму 5), определяющего равенство

$$E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_{\perp}, \tag{5}$$

поскольку наличие частной формы равенства (5), а именно, вида

$$E_1 \oplus E_2 = E_1 \oplus E_{\perp}, \tag{6}$$

положительно отвечает на означенный выше вопрос о дифференциальной реализации расширенного пучка N_+ в контексте подхода к геометрическому решению задачи существования общего полилинейного регулятора для динамических пучков N_1, N_2, основанного на теореме 14.C [9] и теореме 3 [2]; ниже одно характерное свойство равенства (6) обнаруживает теорема 2.

Дальнейшее изложение требует привлечения дополнительных конструкций: примем, что

$$\mathcal{T} := \{t \in T : (u^*(t), \mathrm{B}_1(x^*(t)), \ldots, \mathrm{B}_n(x^*(t), \ldots, x^*(t)))_{\perp} = 0\},$$

и пусть $\nu^*_{\perp}$, ν^* – лебеговские пополнения (на соответствующих расширениях σ-алгебр) мер

$$\int_S \left\| (u^*(\tau), \mathrm{B}_1(x^*(\tau)), \ldots, \mathrm{B}_n(x^*(\tau), \ldots, x^*(\tau)))_{\perp} \right\|_U^2 \mu(d\tau),\ \ S \in \wp_{\mu},$$

$$\int_S \left\| (u^*(\tau), \mathrm{B}_1(x^*(\tau)), \ldots, \mathrm{B}_n(x^*(\tau), \ldots, x^*(\tau))) \right\|_U^2 \mu(d\tau),\ \ S \in \wp_{\mu}.$$

Лемма 5. *Равенство $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_{\perp}$ справедливо в том и только в том случае, если*

$$\mathrm{L}_2(T, \nu^*_{\perp}, R) = \chi_{\perp}\cdot \mathrm{L}_2(T, \nu^*, R),$$

где $\chi_{\perp}$ – характеристическая функция множества $T \backslash \mathcal{T}$.

Приведем теперь вариант характеристических условий равенства (6) с наброском доказательства.

Теорема 2. *При выполнении $\mathcal{T} = \varnothing$* (mod μ) *справедливо предложение*:

$$E_1 \oplus E_2 = E_1 \oplus E_{\perp} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{L}_2(T, \nu^*_{\perp}, R) = \mathrm{L}_2(T, \nu^*, R).$$

Доказательство. Предложение $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_{\perp} \Leftrightarrow \mathrm{L}_2(T, \nu^*_{\perp}, R) = \mathrm{L}_2(T, \nu^*, R)$ – прямая констатация леммы 5. С другой стороны, подтверждение факта $E_1 \cap E_2 = \{0\} \subset H_2$ вытекает из

$$\{t \in T : (u^*(t), \mathrm{B}_1(x^*(t)), \ldots, \mathrm{B}_n(x^*(t), \ldots, x^*(t)))_{\perp} = 0\} = \varnothing \ (\mathrm{mod}\ \mu)$$

и следствия 3 теоремы III.5 (теорема Хана–Банаха) [8].

Лемма 5 и теорема 2 в контексте теоремы 14.C [9] и теоремы 3 [2] делают справедливым

Следствие 3. i) *Следующие три свойства эквивалентны*:

$$\mathrm{L}_2(T, \nu^*_{\perp}, R) \subset \chi_{\perp}\cdot \mathrm{L}_2(T, \nu^*, R) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{L}_2(T, \nu^*_{\perp}, R) = \chi_{\perp}\cdot \mathrm{L}_2(T, \nu^*, R) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_{\perp}.$$

ii) *Если $\mathcal{T} = \varnothing$* (mod μ), *то наличие любого свойства из* i) *превращает динамический пучок N_+ в множество нелинейных управляемых процессов с дифференциальной реализацией* (3).

Гипотеза (по существу обращение теоремы 3 [2] и части ii) следствия 3):

«*если $\mathcal{T} = \varnothing$* (mod μ) *и пучок N_+ обладает реализацией* (3), *то* $\mathrm{L}_2(T, \nu^*_{\perp}, R) \subset \mathrm{L}_2(T, \nu^*, R)$»

в общем случае не подтверждается, что иллюстрирует следующий простой пример.

Пример. Пусть $X = Y = Z = R$, $T = [-1, 1]$, $n = 2$. Примем, что параметры (коэффициенты) дифференциальной системы и моделируемые динамические пучки имеют представление:

---

[10] В силу сепарабельности пространства U слабая и сильная измеримости совпадают (теорема IV.22 [8].

$$A_0 = 2,\ A_1 = 4,\ A_2 = 2,$$
$$\mathrm{B}_1 = 1,\ \mathrm{B}_2 = (1, 1),$$
$$N_1 = \{t \mapsto (\mathrm{e}^{-2t}, 0, \mathrm{e}^{-2t}, \mathrm{e}^{-4t}) \colon t \in T\},$$
$$N_2 = \{t \mapsto (t^2 + 1, 4t + 2, t^2 + 1, (t^2 + 1)^2) \colon t \in T\}.$$

Ясно, что пучки N_1, N_2 имеют дифференциальные реализации (2) с регуляторами $(B_{01}, B_{11}, B_{21}) = (1, 2, 0)$, $(B_{02}, B_{12}, B_{22}) = (2, 2, 0)$, причем объединенный динамический пучок $N_+ := N_1 \cup N_2$ имеет реализацию (3) с регулятором, у которого $B_0^+ = B_1^+ = 2$, $B_2^+ = 0$, при этом обеспечены соотношения:

$$(u^*(t), \mathrm{B}_1(x^*(t)), \mathrm{B}_2(x^*(t), x^*(t)) = (4t + 2, t^2 + 1, (t^2 + 1)^2),$$
$$(u^*(t), \mathrm{B}_1(x^*(t)), \mathrm{B}_2(x^*(t), x^*(t))_\perp = (4t + 2, 0, 0),$$

что приводит к очевидному факту $\mathcal{F} = \varnothing \pmod{\mu}$ (хотя $\mathcal{F} = \{-2^{-1}\} \neq \varnothing$) и прозрачному положению

$$\mathrm{L}_2(T, \nu^*, R) = \mathrm{L}_2(T, \mu, R),$$
$$\mathrm{L}_2(T, \nu^*_\perp, R),\ \nu^*_\perp = \int(4\tau + 2)^2\mu(d\tau).$$

В данной постановке

$$1/(4t + 2) \in \mathrm{L}_2(T, \nu^*_\perp, R),$$
$$1/(4t + 2) \notin \mathrm{L}_2(T, \mu, R),$$

откуда $\mathrm{L}_2(T, \nu^*_\perp, R) \not\subset \mathrm{L}_2(T, \nu^*, R)$; в силу следствия 3 также приходим к заключению, что для N_1, N_2 будет $E_1 + E_2 \neq E_1 \oplus E_2$. Кроме того, данный пример показывает, что теорема 3 [2] в общем случае не имеет обращения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rusanov V.A., Antonova L.V., Daneev A.V.* Inverse Problem of Nonlinear Systems Analysis: A Behavioral Approach // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2012. Vol. 10, № 2. P. 69-88.
2. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É.* On Solvability of the Identification-Inverse Problem for Operator-Functions of a Nonlinear Regulator of a Nonstationary Hyperbolic System // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2015. Vol. 16, № 2. P. 71-84.
3. *Колмогоров А.Н.* Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений / А.Н. Колмогоров. Избранные труды. Том 1. Математика и механика. М.: Наука, 2005. С. 296-300.
4. *Данеев А.В., Русанов В.А., Русанов М.В.* От реализации Калмана-Месаровича к линейной модели нормально-гиперболического типа // Кибернетика и системный анализ. 2005. № 6. С. 137-157.
5. *Русанов В.А.* Об одной алгебре множеств динамических процессов, обладающей дифференциальной реализаций в гильбертовом пространстве // Доклады РАН. 2010. Т. 433, № 6. С. 750-752.
6. *Chen Y.A.* New One-Parameter Inhomogeneous Differential Realization of the spl(2,1) Superalgebra // International Journal of Theoretical Physics. 2012. Vol. 51, № 12. P. 3763-3768.
7. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeev A.V., Linke Yu.É.* On the Differential Realization Theory of Nonlinear Dynamic Processes in Hilbert Space // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 97, № 4. P. 495-532.
8. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
9. *Массера Х.Л., Шеффер Х.Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970.
10. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
11. *Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю.* К теории структурной идентификации нелинейных многомерных систем // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, вып. 1. С. 119-132.
12. *Данеев А.В., Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю.* Нестационарная реализация Калмана-Месаровича в конструкциях оператора Релея-Ритца // Кибернетика и системный анализ. 2007. № 1. С. 82-90.
13. *Лакеев А.В., Линке Ю.Э., Русанов В.А.* К дифференциальной реализации билинейной системы второго порядка в гильбертовом пространстве // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. XXII, № 2. С. 27-36.
14. *Русанов В.А., Лакеев А.В., Линке Ю.Э.* К разрешимости дифференциальной реализации минимального динамического порядка семейства нелинейных процессов “вход-выход” в гильбертовом пространстве // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 4. С. 524-537.
15. *Келли Дж. Л.* Общая топология. М.: Наука, 1968.
16. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

ABOUT DRIVING A HYPERBOLIC SYSTEM TO IMPLEMENTATION WITH A POLYLINEAR INVARIANT REGULATOR TO TWO DIFFERENTLY ADJUSTABLE TRAJECTOR BEAMS

 A.V. Daneev[1], A.V. Lakeyev[2], V.A. Rusanov[2], A.A. Vetrov[2]

[1] Irkutsk State Transport University
[2] Institute of System Dynamics and Control Theory named after V.M.Matrosov,
Siberian branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk

For two differently adjustable beams (finite, countable, or even continuous) controlled trajec-tory curves of the "trajectory, control" type, induced by a given non-stationary hyperbolic system, but with different multilinear controllers, it is shown that if the non-linear functional Rayleigh-Ritz operator is semi-additive on the linear shell from the union of these sheaves, then the problem of the existence of a common (invariant) non-stationary multilinear controller, in the presence of which in the structure of this hyperbolic system, the union of these trajectory bundles is contained in the fam-ily of its admissible solutions. An illustrative example is provided.

Keywords: multilinear differential implementation, hyperbolic system, invariant multilinear controller.
DOI: 10.37313/1990-5378-2020-22-1-77-85

Aleksey Daneev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor. E-mail: daneev@mail.ru
Anatoliy Lakeyev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher.
Vyacheslav Rusanov,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher. E-mail: v.rusanov@mail.ru
Alexand Vetrov, Researcher.