УДК 517.9:62-50

ДЕКОМПОЗИЦИЯ МНОГОТЕМПОВЫХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЯЕМЫХ И НАБЛЮДАЕМЫХ СИСТЕМ

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара

Статья поступила в редакцию 30.01.2020

В статье излагается метод декомпозиции многотемповой модели управляемой и наблюдаемой системы, линейной по быстрым переменным, основанный на теории интегральных многообразий быстрых и медленных движений. Исследуются управляемость и наблюдаемость системы вблизи начала координат. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.
Ключевые слова: декомпозиция многотемповых систем, интегральное многообразие, управляемость, наблюдаемость, асимптотические разложения.
DOI: 10.37313/1990-5378-2020-22-1-93-97

ВВЕДЕНИЕ

В связи с интенсивным развитием авиации, химической промышленности, нелинейной механики и других областей науки и техники возникла потребность в использовании математических моделей высокой размерности, описываемых системами дифференциальных уравнений, которые естественным образом возникают при моделировании и анализе объектов различной природы, способных одновременно совершать быстрые и медленные движения. В теории автоматического управления модели, описываемые системами сингулярно возмущенных уравнений возникают практически всегда. Примерами могут служить гироскопические, электромеханические и другие системы.

Данная работа посвящена изучению свойств управляемости и наблюдаемости сингулярно возмущенной системы. Исследование производится на основе метода декомпозиции математических моделей, отображающих свойства систем. Декомпозиция является одним из основных приемов для изучения сложных систем и состоит в расщеплении исходной задачи на ряд независимых задач меньшей размерности. Декомпозиция сингулярно возмущенных систем подразумевает частотное разделение движений на быстрые и медленные.

Цель работы:

- Понижение размерности задачи управляемости и наблюдаемости многотемповой системы, линейной по быстрым переменным так, чтобы модель меньшей размерности с большой степенью точности отражала все свойства исходной системы.
- Получение достаточных условий управляемости и наблюдаемости сингулярно возмущенных систем.

Семенова Марина Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. E-mail: semenova73@bk.ru

РАСЩЕПЛЯЮЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Рассмотрим модель многотемповой системы вида:

$$\prod_{k=0}^{i} \varepsilon_k \dot{x}_i = f_i(x_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) x_j + B_i(x_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) u, \quad i = \overline{0, n}, \tag{1}$$
$$w = \phi(x_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) x_j,$$

где $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ – переменные состояния, соответствующие различным темпам движения, x_0 – медленная переменная, x_n – самая быстрая переменная, $u \in U \subset \mathbb{R}^r$ – управляющие воздействия, $w \in V \subset \mathbb{R}^p$ – измеряемая координата, $f_i \in \mathbb{R}^{n_i}, i = \overline{0, n}, \phi \in \mathbb{R}^p$ – векторные функции, A_{ij}, B_i, a_{ij} – матричные функции соответствующих размерностей, $i = \overline{0, n}, j = \overline{1, n}$; ε_l – малые положительные параметры, $\varepsilon_l \in (0, \varepsilon_l^0], l = \overline{1, n}, \varepsilon_0 = 1, t \in \mathbb{R}$.

Пусть для системы (1) выполняются условия [1]:

1) Собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(x_0), i = \overline{1, n_n}$ матрицы $A_{nn}(x_0, 0, \dots, 0)$ удовлетворяют неравенству $Re\, \lambda_i \le -2\beta_1 < 0$.

2) Собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(x_0),\ i = \overline{1, n_{n-1}}$ матрицы $A_{n-1,n-1}(x_0, 0, \dots, 0)$ удовлетворяют неравенству $Re\, \lambda_i \le -2\beta_2 < 0$.

…

n) Собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(x_0),\ i = \overline{1, n_1}$ матрицы $A_{11}(x_0, 0, \dots, 0)$ удовлетворяют неравенству $Re\, \lambda_i \le -2\beta_n < 0$.

n+1) Функции $f_i,\ A_{ij},\ i, j = \overline{0, n},\ A_{nn}^{-1}(x_0, 0, \dots, 0)$, $A_{n-1,n-1}^{-1}(x_0, 0, \dots, 0), \dots, A_{11}^{-1}(x_0, 0, \dots, 0)$ имеют достаточное число равномерно непрерывных и ограниченных частных производных по всем переменным при $\varepsilon_i \in (0, \varepsilon_i^0], t \in \mathbb{R}$.

Используя метод декомпозиции [2] и асимптотические разложения медленных интегральных многообразий [3], произведем гладкую замену переменных:

$$x_0 = v_0 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k H_0^j, x_i = v_i + h_i + \sum_{j=i+1}^{n} \prod_{k=i+1}^{j} \varepsilon_k H_i^j, i = \overline{1, n-1}, \quad (2)$$

$$x_n = v_n + h_n,$$

где $h_n = h_n(x_0, \dots, x_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$,

$H_0^1 = H_0^1(v_0, v_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), h_1 = h_1(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), H_i^2 = H_i^2(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, v_1 + h_1, v_2, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), h_2 = h_2(v_0 + \varepsilon_1 \times H_0^1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_0^2, v_1 + h_1 + \varepsilon_2 H_1^2, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), i = 0,1;$ $H_i^j = H_i^j(v_0 + \sum_{l=1}^{j-1} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^{j-1} \prod_{k=2}^{l} \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{j-1} + h_{j-1}, v_j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), j = \overline{3, n}, i = \overline{0, j-1};$

$h_i = h_i(v_0 + \sum_{l=1}^{i} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^{i} \prod_{k=2}^{l} \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{i-1} + h_{i-1} + \varepsilon_i \times H_{i-1}^i, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), i = \overline{3, n-1}.$

После такой замены получим систему «блочно-треугольного» вида:

$$\begin{gathered}
\dot v_0 = f_0(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + A_{01}(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_1(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + A_{02}(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \times h_2(v_0, h_1(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \\
\dots + A_{0,n-1}(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_{n-1}(v_0, h_1(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), h_2(v_0, h_1(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \dots, h_{n-2}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + A_{0n}(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_n(v_0, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \widetilde{B_0}(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k H_0^n, \varepsilon_1, \dots, \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k H_0^n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) u, \quad (3) \\
\varepsilon_1 \dot v_1 = \widetilde{A_{11}}(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) v_1 + \widetilde{A_{1n}}(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)(h_n(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, v_1 + h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - h_n(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)) + \widetilde{B_1}(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k H_0^n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) u, \\
\dots \\
\prod_{k=1}^{i} \varepsilon_k \dot v_i = \widetilde{A_{ii}}(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^{i} \varepsilon_k H_0^i, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) v_i + \widetilde{A_{in}}(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^{i} \varepsilon_k H_0^i, \times H_0^i, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)(h_n(v_0 + \sum_{j=1}^{i} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k H_0^j, v_1 + h_1 + \sum_{j=2}^{i} \prod_{k=2}^{j} \varepsilon_k H_1^j, \dots, v_i + h_i, h_{i+1}, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - h_n(v_0 + \sum_{j=1}^{i} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k \times H_0^j, v_1 + h_1 + \sum_{j=2}^{i} \prod_{k=2}^{j} \varepsilon_k H_1^j, \dots, h_i, h_{i+1}, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)) + \widetilde{B_i}(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k H_0^n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) u, \\
\dots \\
\prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k \dot v_n = \widetilde{A_{nn}}(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k H_0^n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) v_n + \widetilde{B_n}(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k H_0^n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) u, \\
w = \phi_1(v_0, v_1, \dots, v_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n).
\end{gathered}$$

Здесь

$\widetilde{A_{11}}(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = A_{11}(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - \varepsilon_1 \frac{\partial h_1}{\partial y_0^{(1)}} A_{01}(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), y_0^{(1)} = v_0 + \varepsilon_1 H_0^1;$

$\widetilde{A_{ii}}(v_0 + \sum_{j=1}^{i} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = A_{ii}(v_0 + \sum_{j=1}^{i} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - \sum_{l=0}^{i-1} \prod_{k=l+1}^{i} \varepsilon_k \frac{\partial h_i}{\partial y_l^{(i)}} A_{li}(v_0 + \sum_{j=1}^{i} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k \times H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), i = \overline{2, n-1},$ $y_0^{(m)} = v_0 + \sum_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k H_0^j,$ $m = \overline{1, n-1},$

$y_1^{(p)} = v_1 + h_1(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \sum_{j=2}^{p} \prod_{k=2}^{j} \varepsilon_k H_1^j, p = \overline{2, n-1}, y_{q-1}^{(q)} = v_{q-1} + h_{q-1} + \varepsilon_q H_{q-1}^q, q = \overline{2, n};$

$\widetilde{B_n}(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k H_0^n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = B_n(v_0 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=l+1}^{n} \varepsilon_k \frac{\partial h_n}{\partial x_l} B_l(v_0 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k \times H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \widetilde{B_i}(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \dots, \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k \times H_0^n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = B_i(v_0 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k \cdot H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - \frac{\partial H_i^n}{\partial v_n} \widetilde{B_n}(v_0 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k \times H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), i = \overline{0, n-1};$ $\phi_1 = \phi(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)(v_k + h_k + \sum_{i=k+1}^{n} \prod_{p=k+1}^{i} \varepsilon_p H_k^i, k = \overline{1, n-1}.$

Функции h_i, H_i^j можно искать как асимптотические разложения:

$h_1\left(y_0^{(1)}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\right) = \sum_{k \ge 0} \varepsilon_1^k h_{1k}(y_0^{(1)}, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n);$ $h_i\left(y_0^{(i)}, \dots, y_{i-1}^{(i)}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\right) = \sum_{k \ge 0} \varepsilon_i^k h_{ik}(y_0^{(i)}, \dots, y_{i-1}^{(i)}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_n);$ $H_0^1(v_0, v_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \sum_{k \ge 0} \varepsilon_1^k H_{0k}^1(v_0, v_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n);$ $H_i^j(y_0^{(j)},$

$$\dots, y_{j-1}^{(j)}, v_j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon_j^k H_{ik}^j (y_0^{(j)}, \dots, y_{j-1}^{(j)}, v_j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \varepsilon_n),$$
$$i = \overline{0, j-1},$$

из соответствующих уравнений:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial h_1}{\partial y_0^{(1)}} (f_0(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \sum_{j=1}^{n-1} A_{0j} (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_j (v_0 + \sum_{l=1}^{j} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^{j} \prod_{k=2}^{l} \varepsilon_k \times H_1^l, \dots, v_{j-1} + h_{j-1} + \varepsilon_{j-1} H_{j-1}^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + A_{0n} (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_n (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = f_1(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \sum_{j=1}^{n-1} A_{1j} (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_j (v_0 + \sum_{l=1}^{j} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^{j} \prod_{k=2}^{l} \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{j-1} + h_{j-1} + \varepsilon_{j-1} H_{j-1}^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + A_{1n} (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_n (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n);$$

$$\sum_{l=0}^{i-1} \prod_{k=l+1}^{i} \varepsilon_k \frac{\partial h_i}{\partial y_l^{(i)}} [f_l (v_0 + \sum_{j=1}^{i} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k \times H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \sum_{j=1}^{n-1} A_{lj} (v_0 + \sum_{j=1}^{i} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_j (v_0 + \sum_{l=1}^{j} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^{j} \prod_{k=2}^{l} \varepsilon_k \times H_1^l, \dots, v_{j-1} + h_{j-1} + \varepsilon_{j-1} H_{j-1}^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + A_{ln} (v_0 + \sum_{j=1}^{i} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_n (v_0 + \sum_{j=1}^{i} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k H_0^j, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^{j} \prod_{k=2}^{l} \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{j-1} + h_{j-1} + \varepsilon_{j-1} \times H_{j-1}^j, h_j, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)] = f_i (v_0 + \sum_{j=1}^{i} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \sum_{j=1}^{n-1} A_{ij} (v_0 + \sum_{j=1}^{i} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_j (v_0 + \sum_{l=1}^{j} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^{j} \prod_{k=2}^{l} \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{j-1} + h_{j-1} + \varepsilon_{j-1} \times H_{j-1}^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + A_{in} (v_0 + \sum_{j=1}^{i} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k H_0^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_n (v_0 + \sum_{j=1}^{i} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k H_0^j, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^{j} \prod_{k=2}^{l} \varepsilon_k \times H_1^l, \dots, v_{j-1} + h_{j-1} + \varepsilon_{j-1} H_{j-1}^j, h_j, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), i = \overline{2, n-1}.$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial H_0^1}{\partial v_0} [f_0(v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + A_{01} (v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_1 (v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + A_{02} (v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \times h_2 (v_0, h_1 (v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \cdots + A_{0,n-1} (v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_{n-1} (v_0, h_1 (v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_2 (v_0, h_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \dots, h_{n-2}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + A_{0n} (v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_n (v_0, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)] + \frac{\partial H_0^1}{\partial v_1} [\widetilde{A_{11}} (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) v_1 + \widetilde{A_{1n}} (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \times \{h_n (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, v_1 + h_1 (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_2 (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_0^2, v_1 + h_1 + \varepsilon_2 H_1^2, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \dots, h_{n-1} (v_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k H_0^j, v_1 + h_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k \times H_1^j, \dots, v_{n-2} + h_{n-2} + \varepsilon_{n-1} H_{n-2}^{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - h_n (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, h_1 (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_2 (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_0^2, v_1 + h_1 + \varepsilon_2 H_1^2, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \dots, h_{n-1} (v_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k H_0^j, v_1 + h_1 + \sum_{j=2}^{n-1} \prod_{k=2}^{j} \varepsilon_k \times H_1^j, \dots, v_{n-2} + h_{n-2} + \varepsilon_{n-1} H_{n-2}^{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\} = f_0 (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - f_0 (v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \sum_{j=1}^{n} [A_{0j} (v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - A_{0j} (v_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)] \times h_j (v_0 + \sum_{l=1}^{j} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^{j} \prod_{k=2}^{l} \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{j-1} + h_{j-1} + \varepsilon_{j-1} \times H_{j-1}^j, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n),$$

…

$$\sum_{m=0}^{j-1} \prod_{k=m+1}^{j} \varepsilon_k \frac{\partial H_i^j}{\partial y_m^{(j-1)}} [f_m (v_0 + \sum_{l=1}^{j-1} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) + \sum_{p=1}^{n} A_{mp} (v_0 + \sum_{l=1}^{j-1} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_p (v_0 + \sum_{l=1}^{j-1} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^{j} \prod_{k=2}^{l} \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{p-1} + h_{p-1} + \varepsilon_{p-1} \times H_{p-1}^p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)] + \frac{\partial H_i^j}{\partial v_j} \{\widetilde{A_{jj}} (v_0 + \sum_{l=1}^{j} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) v_j + \widetilde{A_{jn}} (v_0 + \sum_{l=1}^{j} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \widetilde{A_{jn}} (v_0 + \sum_{l=1}^{j} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) [h_n (v_0 + \sum_{l=1}^{j} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^{j} \prod_{k=2}^{l} \varepsilon_k$$

$\times H_1^l, \dots, v_i + h_i, h_{i+1}, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$-h_n(v_0 + \sum_{l=1}^{j} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 +$

$\sum_{l=2}^{j} \prod_{k=2}^{l} \varepsilon_k H_1^l, \dots, h_i, h_{i+1}, \dots, h_{n-1}, \varepsilon_1,$

$\dots, \varepsilon_n)]\} = f_i(v_0 + \sum_{l=1}^{j} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1,$

$\dots, \varepsilon_n) - f_i(v_0 + \sum_{l=1}^{j-1} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots,$

$\varepsilon_n) + \sum_{p=1}^{n}[A_{ip}(v_0 + \sum_{l=1}^{j} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1,$

$\dots, \varepsilon_n) h_p(v_0 + \sum_{l=1}^{j} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1$

$+\sum_{l=2}^{j} \prod_{k=2}^{l} \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{p-1} + h_{p-1} + \varepsilon_{p-1}$

$\times H_{p-1}^p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - A_{ip}(v_0 +$

$\sum_{l=1}^{j-1} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_p(v_0 +$

$\sum_{l=1}^{j} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^{j} \prod_{k=2}^{l} \varepsilon_k$

$\times H_1^l, \dots, v_{p-1} + h_{p-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)],$

$i = \overline{0, j-1};$

…

$\sum_{m=0}^{n-1} \prod_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k \frac{\partial H_i^n}{\partial y_m^{(n-1)}} [f_m(v_0 +$

$\sum_{l=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) +$

$\sum_{p=1}^{n} A_{mp}(v_0 + \sum_{l=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots,$

$\varepsilon_n) h_n(v_0 + \sum_{l=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 +$

$\sum_{l=2}^{n-1} \prod_{k=2}^{l} \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{n-1} + h_{n-1}, \varepsilon_1, \dots,$

$\varepsilon_n)] + \frac{\partial H_i^n}{\partial v_n} \widetilde{A}_{nn}(v_0 + \sum_{l=1}^{n} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1,$

$\dots, \varepsilon_n) v_n = f_i(v_0 + \sum_{l=1}^{n} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1,$

$\dots, \varepsilon_n) - f_i(v_0 + \sum_{l=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots,$

$\varepsilon_n) + \sum_{p=1}^{n}[A_{ip}(v_0 + \sum_{l=1}^{n} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l,$

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_p(v_0 + \sum_{l=1}^{n} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, v_1 +$

$h_1 + \sum_{l=2}^{n} \prod_{k=2}^{l} \varepsilon_k H_1^l, \dots, v_{p-1} + h_{p-1} +$

$\varepsilon_{p-1} H_{p-1}^p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) - A_{ip}(v_0 +$

$\sum_{l=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) h_p(v_0 +$

$\sum_{l=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^{n-1} \prod_{k=2}^{l} \varepsilon_k$

$\times H_1^l, \dots, v_{p-1} + h_{p-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n),$

$i = \overline{0, n-1}.$

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

Исследуем управляемость и наблюдаемость [4] блочно-треугольной системы (3). Линеаризуем систему (3), т.е. приведем ее к виду $\dot{v} = Lv + Bu, w = Cv$. Элементы матриц

$L = (l_{ij})|_{v_k=0, k=\overline{0,n}, u=0},$

$B = (b_i)|_{v_k=0, k=\overline{0,n}, u=0}, i, j = \overline{1,n},$

$C = (c_{lj})|_{v_k=0, k=\overline{0,n}}, l = \overline{1,p}, j = \overline{1,n}$

есть частные производные по переменным v_j правых частей уравнений системы (3). Используя критерий Калмана получим, что если линеаризованная система для (3) является вполне управляемой и вполне наблюдаемой, то блочно-треугольная система (3) является локально вполне управляемой и локально вполне наблюдаемой вблизи начала координат. Так как система (3) получена из системы (1) с помощью обратимой замены переменных, то исходная система (1) локально вполне управляема и локально вполне наблюдаема вблизи начала координат.

<u>Пример.</u> В качестве простого примера рассмотрим модель системы математических маятников, подвешенных к несущему телу P, перемещающемуся горизонтально с ускорением u [5]:

$\varepsilon \ddot{x}_i + a_i \dot{x}_i + c_i \sin x_i = b_i u, \quad i = \overline{1,n},$

$p = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i,$

где a_i, b_i, c_i, d_i – коэффициенты, отличные от нуля, x_i – угол отклонения маятника от вертикали, u – скалярное управление, переводящее систему из начального положения в начало координат за минимальное время, $|u| \le 1$.

Перепишем эту систему в виде

$\dot{x}_i = y_i,$

$\varepsilon \dot{y}_i = -c_i \sin x_i - a_i y_i + b_i u, i = \overline{1,n},$

$p = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i.$

С помощью замены переменной

$y_i = z_i - \frac{c_i}{a_i} \sin x_i - \varepsilon \frac{c_i^2}{2a_i^3} \sin 2x_i - \varepsilon^2$

$\times \frac{C_i^3}{A_i^5}(3\cos^2 x_i - 1) \sin x_i + O(\varepsilon^3),$

$x_i = v_i - \varepsilon \frac{z_i}{a_i} - 2\varepsilon^2 \frac{c_i}{a_i^3} z_i \cos v_i + O(\varepsilon^3),$

$i = \overline{1,n}$, получим систему блочно-треугольного вида

$\dot{v}_i = -\frac{c_i}{a_i} \sin v_i - \varepsilon \frac{c_i^2}{2a_i^3} \sin 2v_i - \varepsilon^2 \frac{c_i^3}{a_i^5}$

$\times (3\cos^2 v_i - 1) \sin v_i - (\frac{b_i}{a_i} + 2\varepsilon \frac{b_i c_i}{a_i^3}$

$\times \cos v_i) u + O(\varepsilon^3), i = \overline{1,n};$

$\varepsilon \dot{z}_j = (-a_j + \varepsilon \frac{c_j}{a_j} \cos v_j + \varepsilon^2 \frac{c_j^2}{a_j^3} \cos 2v_j)$

$\times z_j + b_j u + O(\varepsilon^3), j = \overline{1,n};$

$p = \sum_{k=1}^{n} d_k (v_k - \varepsilon \frac{z_k}{a_k}(1 - \varepsilon \frac{2c_k}{a_k^3} \cos v_k))$

$+ O(\varepsilon^3).$

Система нулевого приближения

$\dot{v}_i = -\frac{c_i}{a_i} \sin v_i - \frac{b_i}{a_i} u, \quad i = \overline{1,n};$

$\varepsilon \dot{z}_j = -a_j z_j + b_j u, j = \overline{1,n};$

локально вполне управляема вблизи начала координат, значит, блочно-треугольная система локально вполне управляема вблизи начала координат. Система первого приближения

$$\dot{v}_i = -\frac{c_i}{a_i}\sin v_i - \frac{\varepsilon c_i^2}{2a_i^3}\sin 2v_i - (\frac{b_i}{a_i} + \varepsilon\frac{2c_i}{a_i^3}$$

$$\times b_i \cos v_i)u, i = \overline{1,n};$$

$$\varepsilon\dot{z}_j = (-a_j + \varepsilon\frac{c_j}{a_j}\cos v_j) z_j + b_j u,$$

$$j = \overline{1,n}; p = \sum_{k=1}^{n} d_k \left(v_k - \varepsilon\frac{z_k}{a_k}\right),$$

локально вполне наблюдаема вблизи начала координат, значит блочно-треугольная система локально вполне наблюдаема вблизи начала координат. Так как блочно-треугольная система получена из данной системы с помощью обратимой замены переменных, то исходная система локально вполне управляема и локально вполне наблюдаема вблизи начала координат.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены достаточные условия управляемости и наблюдаемости многотемповых систем, линейных по быстрым переменным. Приведен пример системы математических маятников, иллюстрирующий полученные результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Семенова М.М.* Декомпозиция многотемповых моделей управляемых систем // Вестник Самарского государственного университета. 2002. Т. 4. № 26. С. 13–22.
2. *Воропаева Н.В., Соболев В.А.* Конструктивный метод расщепления нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных систем// Дифференциальные уравнения. Т. 31. 1995. №4. С. 569–578.
3. *Стрыгин В.В., Соболев В.А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988. 256 с.
4. *Семенова М.М.* Управляемость и наблюдаемость многотемповых систем // В кн.: Воропаева Н.В., Соболев В.А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. М.: Физматлит. 2009. 256 с. С. 153 – 172.
5. *Богаевский В.Н., Повзнер А.Я.* Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. М.: Наука. 1987. 256 с.

DECOMPOSITION OF MULTIRATE MODELS OF CONTROLLABLE AND OBSERVABLE SYSTEMS

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara

A method of integral manifold is applied to study of multitempo linear on fast variables systems. The use of this method permits us to solve a problem of decomposition of multirate controllable and observable systems. Local controllability and local observability of these systems is investigated. The application of the method is illustrated on example.

Keywords: the decomposition of multirate models, integral manifold, controllability, observability, asymptotic expansions.
DOI: 10.37313/1990-5378-2020-22-1-93-97

Marina Semenova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor at the Higher Mathematics Department.
E-mail: semenova73@bk.ru