УДК 517.9 : 62-50

ДИССИПАТИВНОСТЬ МНОГОТЕМПОВЫХ СИСТЕМ

© 2020 М.М. Семенова

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара

Статья поступила в редакцию 30.01.2020

В статье излагается метод определения функции запаса. Исследуется диссипативность многотемповых систем. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.
Ключевые слова: линейная многотемповая система, функция запаса, диссипативная система относительно функции расхода.
DOI: 10.37313/1990-5378-2020-22-1-98-100

ВВЕДЕНИЕ

Теория сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений интенсивно развивается и методы ее активно применяются для решения задач из различных областей естествознания и техники. Это объясняется широким спектром приложений таких систем: гидродинамика, электроэнергетика, радиотехника, динамика полета и др. Сингулярно возмущенные системы могут быть получены естественным путем не только при моделировании, но и при исследовании объектов, которые совершают одновременно медленные и быстрые движения. Движение систем твердых тел представляет собой сложную композицию быстрых и медленных движений.

Данная работа посвящена исследованию диссипативности многотемповых систем относительно функции расхода. Цель работы – найти функцию запаса линейной многотемповой системы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим модель линейной многотемповой системы вида:

$$\prod_{k=0}^{i} \varepsilon_k \dot{x}_i = \sum_{j=0}^{n} A_{ij} x_j + B_i u, i = \overline{0,n};$$

$$y = \sum_{j=0}^{n} C_j x_j, \qquad (1)$$

где

$t \in \mathbb{R}, x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, u \in \mathbb{R}^r, y \in \mathbb{R}^p, A_{ij}, B_i, C_j, i,j = \overline{0,n}$ – постоянные матрицы соответствующих размерностей, $\varepsilon_i, i = \overline{1,n}$ – малые положительные параметры, $\varepsilon_0 = 1$; и функция расхода $w(u,y) = y'Qy + 2y'Su + u'Ru$, где Q, S, R – постоянные матрицы, причем Q, R – симметрические, штрих означает транспонирование.

Определение 1. Вещественно-значимая функция $w: \mathbb{R}^{n_0+n_1+\cdots+n_n} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ такая, что для любого $t \geq 0$, любого начального состояния $x(0) = x^0$ и любого допустимого управления $u(\cdot)$ выполняется $\int_0^t \left| w\left(\Phi(x^0, s, u), u(s), y(s)\right) \right| ds < +\infty$, называется функцией расхода системы (1).

Определение 2. Система (1) называется диссипативной относительно функции расхода w, если существует функция $V: \mathbb{R}^{n_0+n_1+\cdots+n_n} \to \mathbb{R}^+, V \in C^0$ такая, что для любых $x(0) = x^0$, для любых допустимых управлений $u(\cdot)$ и для любого $t \geq 0$ выполняется неравенство $V(x^1) \leq V(x^0) + \int_0^t w(x(s), u(s), y(s)) ds,$ где $x^1 = \Phi(x^0, t, u)$. Функция V называется функцией запаса системы (1), а неравенство называется неравенством диссипации.

Пусть для системы (1) выполняются предположения, аналогичные условиям $A_1 - A_4$, приведенные в работе [1]:

Для любого $x(t_0) = x^0$ и любого допустимого $u(\cdot)$ существует единственное решение системы (1). Это решение определено на $[t_0, +\infty)$ и таково, что $y(\cdot)$ – локально-интегрируемая с квадратом функция.

Система (1) глобально достижима из начала координат. Это означает, что для любых $x^1 \in \mathbb{R}^{n_0+n_1+\cdots+n_n}, t_1$ существуют $t_0 \leq t_1$ и такие, что $\Phi(x(0), t_1 - t_0, u) = x^1$.

Введем функцию доступного запаса $V_a(x_0) = -\inf_{u,T>0} \int_0^T w(u,y) dt,$ которая предполагается дифференцируемой по x.

Функция расхода w удовлетворяет условию: для любого $y \neq 0$ найдется u такое, что $w(u,y) < 0$.

Собственные значения $\lambda_i, i = \overline{1,n}$ матрицы A_{nn} удовлетворяют неравенству $Re\, \lambda_i(A_{nn}) \leq -2\beta < 0$.

Семенова Марина Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. E-mail: semenova73@bk.ru

ПАССИВНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Для построения функции запаса $\varphi(x) = x'Px, x = (x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_n)'$ запишем необходимые и достаточные условия диссипативности [2] системы (1) относительно функции расхода w:

$$\sum_{l=0}^{n-1} \prod_{k=l+1}^{n} \varepsilon_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_l} \sum_{j=0}^{n} A_{lj} x_j + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$$
$$\times \sum_{j=0}^{n} A_{nj} x_j = \prod_{k=0}^{n} \varepsilon_k \left[\left(\sum_{l=0}^{n} x'_l C'_l\right) Q\right.$$
$$\left.\times \left(\sum_{j=0}^{n} C_j x_j\right) - x'F'Fx\right],$$
$$\frac{1}{2}\left[\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=l+1}^{n} \varepsilon_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_l} B_l + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} B_n\right] =$$
$$\prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left[\sum_{l=0}^{n} x'_l C'_l S + x'F'W\right],$$
$$R = W'W.$$

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = 0$, получим систему

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \sum_{j=0}^{n} A_{nj} x_j = 0, \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} B_n = 0,$$
$$R = W'W.$$

Матрицу P будем искать в виде $P =$

$$\begin{pmatrix} P_{11} & \varepsilon_1 P_{12} & \dots & \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k P_{1,n+1} \\ \varepsilon_1 P'_{12} & \varepsilon_1 P_{22} & \dots & \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k P_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k P'_{1,n+1} & \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k P'_{2,n+1} & \dots & \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k P_{n+1,n+1} \end{pmatrix},$$

где $P_{ij} = P_{ij}^{0,0,\dots,0} + \varepsilon_1 P_{ij}^{0,1,\dots,0} + \cdots$

$$+\varepsilon_n P_{ij}^{0,0,\dots,1} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 P_{ij}^{1,1,\dots,0} + \cdots, i, j = \overline{1, n+1}.$$

Полагая, что матрица W – квадратная невырожденная матрица, из второго уравнения, получим $F' = (PB - C'S)W^{-1}$, обозначим $K = W^{-1}$ и подставив F и W в первое уравнение, получим уравнение Лурье

$$PH + H'P - PLP + M = 0,$$
$$H = (h_{ij})_{i=\overline{0,n}, j=\overline{0,n}},$$
$$h_{ij} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{i} \varepsilon_k} (B_i KK'S'C_j - A_{ij});$$
$$L = (l_{ij})_{i=\overline{0,n}, j=\overline{0,n}},$$
$$l_{ij} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{i} \varepsilon_k \prod_{l=1}^{j} \varepsilon_l} B_i KK'B'_j;$$
$$M = (m_{ij})_{i=\overline{0,n}, j=\overline{0,n}},$$
$$m_{ij} = C'_i (Q - SKK'S')C_j.$$

Обозначим,

$$T = KK', T = T^{0,0,\dots,0} + \varepsilon_1 T^{1,0,\dots,0}$$
$$+\varepsilon_2 T^{0,1,\dots,0} + \dots + \varepsilon_n T^{0,0,\dots,1} + \varepsilon_1 \varepsilon_{2\dots}.$$

Выполняя действия и приравнивая соответствующие блоки матриц, стоящих в левой и правой частях этого уравнения, получим подсистему с $\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$ линейно независимыми уравнениями.

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left[P_{1j}^{0,0,\dots,0} \left(A_{j-1,k}^{0} - B_{j-1} T^{0,0,\dots,0}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times \sum_{j=l}^{n+1} B'_{j-1} \left(P_{lj}^{0,0,\dots,0}\right)'\right)\right] + \sum_{j=l}^{n+1} \left(A_{j-1,0}^{0}\right)'$$
$$\times \left(P_{lj}^{0,0,\dots,0}\right)' + C'_0 (Q - ST^{0,0,\dots,0} S')C_k =$$
$$0, k = \overline{0, n}, l = \overline{1, n+1};$$
$$\sum_{j=2}^{n+1} \left[P_{2j}^{0,0,\dots,0} \left(\left(A_{j-1,k}^{0}\right) - B_{j-1} T^{0,0,\dots,0}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times \sum_{j=l}^{n+1} B'_{j-1} \left(P_{lj}^{0,0,\dots,0}\right)'\right)\right] + \sum_{j=l}^{n+1} \left(A_{j-1,1}^{0}\right)'$$
$$\times \left(P_{lj}^{0,0,\dots,0}\right)' + C'_1 (Q - ST^{0,0,\dots,0} S')C_k =$$
$$0, k = \overline{1, n}, l = \overline{2, n+1};$$
$$P_{n+1,n+1}^{0,0,\dots,0} \left(A_{nn}^{0} - B_n T^{0,0,\dots,0} B'_n P_{n+1,n+1}^{0,0,\dots,0}\right)$$
$$+\left(A_{nn}^{0}\right)' P_{n+1,n+1}^{0,0,\dots,0} - B_n T^{0,0,\dots,0} B'_n + C'_n$$
$$\times (Q - ST^{0,0,\dots,0} S')C_n = 0,$$
$$A_{ij}^{0} = B_i T^{0,0,\dots,0} S'C_j - A_{ij}, i, j = \overline{0, n}.$$

Последнее уравнение этой системы – уравнение Лурье, положительно определенное решение которого существует и единственно [3], $P_{n+1,n+1}^{0,0,\dots,0} = L_{n+1,n+1}^{0,0,\dots,0}$. Подставляя эти решения в остальные уравнения, находим положительно определенные решения соответствующих уравнений Лурье $P_{ii}^{0,0,\dots,0} = L_{ii}^{0,0,\dots,0}, i = \overline{1, n}$. Отсюда получаем, $P_{ij}^{0,0,\dots,0} = L_{ij}^{0,0,\dots,0}, i = \overline{1, n}, j = \overline{2, n+1}, j \neq i$.

Следующая подсистема состоит из $(n^2 + 3n + 2)$ линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n+1} P_{1j}^{l_1,l_2,\dots,l_n} A_{j-1,k}^{1(k+1)} + \sum_{j=k+1}^{n+1} \left(A_{j-1,0}^{1(1)}\right)'$$
$$\times \left(P_{k+1,j}^{l_1,l_2,\dots,l_n}\right)' = V_{1,k+1}^{l_1,l_2,\dots,l_n}, k = \overline{0, n};$$
$$\sum_{j=2}^{n+1} P_{2j}^{l_1,l_2,\dots,l_n} A_{j-1,k}^{1(k+1)} + \sum_{j=k+1}^{n+1} \left(A_{j-1,1}^{1(2)}\right)'$$
$$\times \left(P_{k+1,j}^{l_1,l_2,\dots,l_n}\right)' = V_{2,k+1}^{l_1,l_2,\dots,l_n}, k = \overline{0, n};$$
$$P_{n+1,n+1}^{l_1,l_2,\dots,l_n} A_{nn}^{1(n+1)} + \left(A_{nn}^{1(n+1)}\right)' P_{n+1,n+1}^{l_1,l_2,\dots,l_n}$$
$$= V_{n+1,n+1}^{l_1,l_2,\dots,l_n}, l_1 + l_2 + \dots + l_n = 1,$$

$l_i \in \{0,1\}$, где матрицы-коэффициенты

$$A_{ij}^{1(j+1)} = A_{ij}^{0} - B_i T^{0,0,\dots,0} \sum_{l=j+1}^{n+1} B'_{l-1}$$
$$\times \left(L_{j+1,l}^{0,0,\dots,0}\right)', A_{ij}^{1(j+1)} = A_{ij}^{0} - B_i T^{0,0,\dots,0}$$
$$\times \sum_{l=j+1}^{n+1} B'_{l-1} \left(L_{j+1,l}^{0,0,\dots,0}\right)', V_{ij}^{l_1+l_2+\dots+l_n},$$

$i, j = \overline{0, n}$ – постоянные матрицы. Все уравнения этой подсистемы являются линейными. Требуем, чтобы их решения

$P_{ij}^{1,0,\dots,0} = L_{ij}^{1,0,\dots,0}, \dots, P_{ij}^{0,0,\dots,1} = L_{ij}^{0,0,\dots,1}$,

$i, j = \overline{1, n+1}$ были положительно определенными матрицами.

k-ая подсистема состоит из $\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1\right)(k+1)$ линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n+1} P_{1j}^{l_1,l_2,\dots,l_n} A_{i-1,k}^{1(k+1)} + \sum_{j=k+1}^{n+1}\left(A_{j-1,0}^{(1)}\right)' \times \left(P_{k+1,j}^{l_1,l_2,\dots,l_n}\right)' = V_{1,k+1}^{l_1,l_2,\dots,l_n}, k = \overline{0,n},$$

где индексы $l_m \geq 0, l_m \in \mathbb{Z}, \sum_{m=1}^{n} l_m = k$, матрицы $V_{ij}^{l_1,l_2,\dots,l_n}$ – постоянные матрицы. Из этой системы однозначно определяются положительно определенные матрицы-решения $P_{ij}^{l_1,l_2,\dots,l_n} = L_{ij}^{l_1,l_2,\dots,l_n}$. Элементы положительно определенной матрицы P могут быть найдены как асимптотические разложения по малым параметрам $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. Условием положительной определенности матрицы P является положительная определенность ее главных блоков, т.е. блоков $L_{ii}^{l_1,l_2,\dots,l_n}, i = \overline{1, n+1}$, следовательно, функция запаса $\varphi(x)$ системы (1) найдена приближенно. Погрешность такого вычисления равна $O\left(\prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{l_i}\right), l_i \geq 0, l_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^{n} l_i = k+1$.

Пример. Рассмотрим систему, описываемую уравнениями: $\dot{x} = x + y + u$,

$\varepsilon\dot{y} = -y + u, z = x + y$.

Эта система диссипативна относительно функции расхода $w = x^2 + y^2$ с функцией запаса

$$\varphi(x,y) = \left(\frac{1}{2} + \cdots\right)x^2 + (-\varepsilon + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon^2 + \cdots)xy + ((1+\sqrt{2})\varepsilon + \frac{2+3\sqrt{2}}{7}\varepsilon^2 + \cdots)y^2.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование диссипативности многотемповых систем относительно функции расхода. Найдена функция запаса линейной многотемповой системы. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полушин И.Г., Фрадков А.Л., Хилл Д.Д.* Пассивность и пассификация нелинейных систем// Автоматика и телемеханика. 2000. № 3. С. 10 – 11.
2. *Семенова М.М.* Алгебраический критерий диссипативности сингулярно возмущенных систем// Обозрение прикладной и промышленной математики. 2001. Т.8. Вып. 1. С. 408 –409.
3. Устойчивость адаптивных систем. М.: Мир. 1989. 263 с.

DISSIPABILITY OF MULTITEMPO SYSTEMS

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara

A method of discovery of stock function is applied to study of multitempo linear systems. Dissipability of multiparameter linear systems is investigated. The application of the method is illustrated on example.
Keywords: linear multitempo systems, stock function, dissipative system relatively of expense function.
DOI: 10.37313/1990-5378-2020-22-1-98-100

Marina Semenova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor at the Higher Mathematics Department.
E-mail: semenova73@bk.ru