

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ВАН ДЕР ПОЛЯ

© 2020 М.Балабаев

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва

Статья поступила в редакцию 18.03.2020

В рамках данной работы рассматривается метод кривизны потока применительно к задаче моделирования критических явлений в одной из трехтемповых быстро-медленных автономных динамических систем. В статье рассмотрена модель, являющаяся обобщением классической модели Ван дер Поля. Построены приближения инвариантного многообразия и двумерного аналога траектории-утки — инвариантной поверхности со сменой устойчивости.

Ключевые слова: быстро-медленные системы, инвариантные многообразия, сингулярные возмущения, критические явления, смена устойчивости, кривизна потока, модель Ван дер Поля.

DOI: 10.37313/1990-5378-2020-22-2-138-141

1 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В рамках настоящей работы будет рассматриваться класс трехтемповых быстро-медленных автономных динамических систем, зависящих от одного дополнительного скалярного параметра p :

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = f(x, y, z, \varepsilon, p), \\ \dot{y} = g(x, y, z, \varepsilon, p), \\ \dot{z} = \varepsilon h(x, y, z, \varepsilon, p), \end{cases} \quad (1)$$

где под точкой подразумевается дифференцирование по времени t , параметр $0 < \varepsilon \ll 1$ обуславливает малое возмущение системы, а x, y и z — быстрая, медленная и сверхмедленная переменные соответственно.

Напомним, что траектория сингулярно возмущенной системы называется *траекторией-уткой*, если она вначале проходит вдоль притягивающего листа медленного инвариантного многообразия, а затем — вдоль его отталкивающего листа, причем пройденные расстояния в обоих случаях сравнимы с единицей [1, с. 110]. Само понятие траектории-утки (фр. *canard*) было впервые использовано французскими математиками в работах [2,3].

Использование траекторий-уток получило весьма широкое распространение при моделировании критических явлений различной природы [1,4,18,19].

Естественным обобщением траекторий-уток, которые по сути являются одномерными инвариантными многообразиями, являются их многомерные аналоги — *инвариантные многообразия со сменой устойчивости* [5-7], эпизодически возникающие в случае нетривиальной размерности медленной переменной. Подобно траекториям-уткам, такие многообразия располагаются одно-

временно как вблизи притягивающего, так и вблизи отталкивающего листов медленного инвариантного многообразия [1, с. 280].

Особым классом подобных многообразий следует считать *точные поверхности*, которые характеризуются тем, что через каждую их точку проходит траектория-утка. Фактически, такие поверхности целиком состоят из траекторий-уток, каждая из которых моделирует критическое, но при этом безопасное протекание некоторого процесса. Подобный подход к моделированию критических явлений был впервые применен в работе [8], а затем многократно использован в работах [9-11].

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ — достаточно гладкая функция, задаваемая равенством

$$\varphi(x, y, z, \varepsilon) = \begin{vmatrix} f & g & h \\ \dot{f} & \dot{g} & \dot{h} \\ \ddot{f} & \ddot{g} & \ddot{h} \end{vmatrix}.$$

Говорят, что φ определяет *кривизну фазового потока* исходной динамической системы в соответствующей точке.

Как хорошо известно [12,13], функция φ является глобальным инвариантом, то есть имеет место тождество $d\varphi \equiv 0$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \equiv 0.$$

Это равенство лежит в основе метода кривизны потока. Используя его, можно получить систему алгебраических уравнений [14,15], решения которой позволяют параметризовать инвариантное многообразие с некоторой точностью.

Предположим, что скалярный параметр p допустимо использовать в качестве управляющего воздействия для исходной модели (1). Подобрав надлежащим образом функцию $p = p(x, y, z, \varepsilon)$, можно достичь того, что разрыв инвариантного многообразия вдоль кривой срыва будет

*Балабаев Михаил Олегович, аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления.
E-mail: m.o.balabaev@gmail.com*

устранен одновременно во всех точках. Таким образом, в некоторых случаях удастся склеить притягивающий и отталкивающий листы инвариантного многообразия вдоль всей кривой срыва, получив тем самым инвариантное многообразие со сменой устойчивости.

Подобный подход в контексте метода кривизны потока был впервые применен в работах [9-11] для нахождения инвариантных поверхностей со сменой устойчивости в модели трехмерного автокаталитического реактора, самосопряженной модели ФитцХью-Нагумо и модели Копера.

2. ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Важность осциллятора Ван дер Поля для прикладных задач сложно переоценить. Он нашел свое применение в моделировании множества физических, биологических, геологических и сейсмологических процессов.

В настоящей статье мы будем рассматривать один из частных случаев обобщенной модели Ван дер Поля, первоначально упомянутый в работе [16] и затем частично исследованный в работе [17]:

$$\begin{cases} \dot{x} = px^2 + qx^3 - y, \\ \dot{y} = x - z, \\ \dot{z} = \varepsilon(\mu - ry). \end{cases} \quad (2)$$

В этой упрощенной модели μ является бифуркационным параметром, скалярные величины $p > 0$, $q < 0$ и $r > 0$ полагаются действительными порядка $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а малое возмущение определяется вещественнозначным параметром $0 < \varepsilon \ll 1$. В рамках данной работы мы ограничимся рассмотрением области $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}, x, y, z > 0\}$, интересной с физической точки зрения.

Очевидно, что медленное многообразие модели (2) является цилиндрической поверхностью, образующей для которой служит кубическая парабола

$$y = px^2 + qx^3.$$

Кривая срыва модели (2) является совокупностью двух прямых и, очевидно [1, с. 19], определяется из системы

$$\begin{cases} px^2 + qx^3 - y = 0, \\ 2px + 3qx^2 = 0. \end{cases}$$

Для нас представляет интерес только одна из этих прямых, имеющая непустое пересечение с областью \mathbb{R}_+^3 и определяемая вектор-функцией

$$\left\{ -\frac{2p}{3q}, \frac{4p^3}{27q^2}, z \right\}.$$

Для инвариантного многообразия системы (2) мы будем использовать параметрическое представление, которое удобно искать в виде разложения по степеням малого параметра:

$$y = y(x, z, \varepsilon) = y_0(x, z) + y_1(x, z) \varepsilon. \quad (3)$$

Воспользуемся методом кривизны потока [14, с. 192]. В соответствии с ним первые два коэффициента разложения будут иметь вид:

$$y_0(x, z) = px^2 + qx^3, \quad (4)$$

$$y_1(x, z) = \frac{z - x}{4px + 6qx^2}. \quad (5)$$

Как видим (см. рисунок 1), полученное инвариантное многообразие системы претерпевает разрыв вдоль кривой срыва за исключением единственной точки, соответствующей $z = 1$. Траектория-утка, соответствующая данным рисунка и полученная в работе [17], ожидаемо проходит именно через эту точку.

Воспользуемся подходом, изложенным в работе [15], чтобы устранить разрыв вдоль всей кривой срыва. Для этого вместо параметра p исходной системы подставим функцию

$$p(z) = -\frac{3qz}{2}.$$

Это позволит устранить разрыв в функции (5), причем вышеуказанная подстановка оставляет в силе налагаемое моделью (2) ограничение $p > 0$, если только мы находимся в интересующей нас области \mathbb{R}_+^3 .

Подставив функцию $p(z)$ в коэффициенты (4) и (5), мы можем выписать первое приближение (3) инвариантного многообразия, не имеющее разрыва вдоль кривой срыва (см. рисунок 2). Таким образом, можно говорить о том, что найденная функция (6) является нулевым приближением *склеивающей*.

Более того, если для исходной модели (2) зафиксировать некоторую точку на кривой срыва и вычислить точное значение, то соответствующая величина $p(z)$ будет близка к этому значению. Это означает, что полученное инвариантное многообразие не просто имеет смену устойчивости вдоль кривой срыва, но и целиком состоит из траекторий-уток, то есть принадлежит к классу точных поверхностей.

3. ВЫВОДЫ

Для частного случая обобщенной модели Ван дер Поля при помощи метода кривизны потока была получена склеивающая функция

$$p(z, \varepsilon) = -\frac{3qz}{2} + O(\varepsilon).$$

Она позволила склеить притягивающий и отталкивающий листы интегрального многообразия вдоль всей линии срыва и тем самым построить инвариантное многообразие со сменой устойчивости:

$$y(x, z, \varepsilon) = qx^3 - \frac{3qx^2z}{2} - \frac{1}{6qx} \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

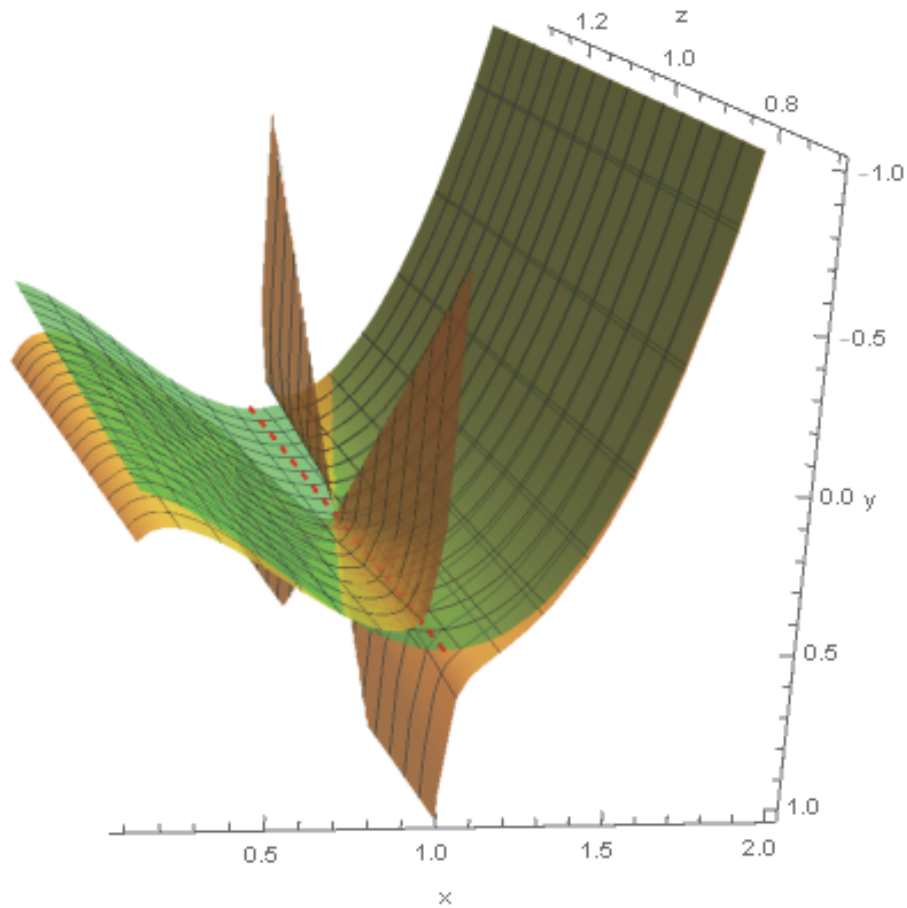


Рис. 1. Медленная поверхность (зеленая), инвариантное многообразие (желтое) и кривая срыва, $\varepsilon = 0.141, p = 1.5, q = -1, r = 0.2, \mu = 0.036$

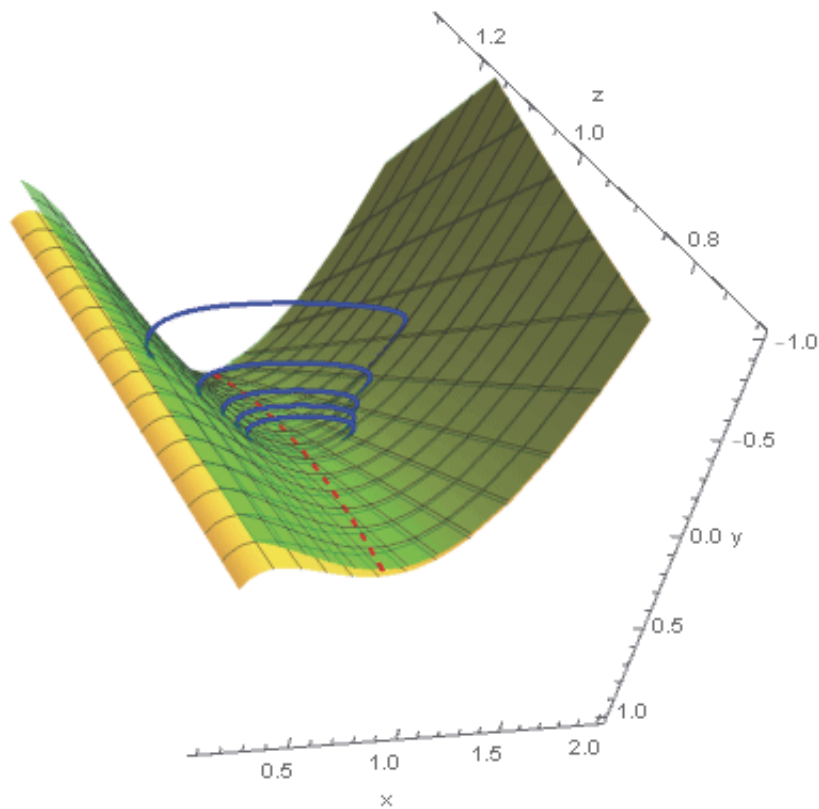


Рис. 2. Медленная поверхность (зеленая), инвариантное многообразие со сменой устойчивости (желтое) и траектория, $\varepsilon = 0.141, q = -1, r = 0.2, \mu = 0.036$, начальные условия $x_0 = 0.33, y_0 = 1.035, z_0 = 0.204342$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев В. А., Шчепакина Е. А.* Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М.: Физматлит, 2010, 320 с.
2. *Benoit E., Calot J. L., Diener M.* Chasse au Canard. *Collectanea Mathematica*, 1981, vol. 31-32. — p. 37-119.
3. *Diener M.* Nesses et les Canards. Publication IRMA, 1979, Strasbourg.
4. *Sobolev V. A., Shchepakina E. A.* Duck Trajectories in a Problem of Combustion Theory. *Differential Equations*, 1996, vol. 32. — p. 1177-1186.
5. *Shchepakina E., Sobolev V.* Integral Manifolds, Canards and Black Swans. *Nonlinear Analysis. Ser. A: Theory Methods*, 2001, vol. 44. — p. 897-908.
6. *Shchepakina E. A., Sobolev V. A., Mortell M. P.* Introduction to system order reduction methods with applications. Cham, Springer lecture notes in math, 2014, vol. 2114, 201 p.
7. *Sobolev V. A., Shchepakina E. A.* Standard Chase on Black Swans and Canards. Preprint N 426. Berlin: WIAS, 1998.
8. *Shchepakina E.* Black swans and canards in self-ignition problem. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol 4, issue 1, 2003, pp. 45-50.
9. *Balabaev M.* Black swan and curvature in an autocatalator model. *Procedia Engineering*, 2017, vol. 201, p. 561-566.
10. *Balabaev M.* Flow curvature in a self-coupled FitzHugh-Nagumo model. *J. Phys.: Conf. Ser.* 1096 012151, 2018.
11. *Balabaev M.* Invariant manifold of variable stability in the Koper model. *J. Phys.: Conf. Ser.* 1368 042003, 2019.
12. *Darboux J. G.* Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré. *Bull. Sci. Math. sér.2*, 1878, Vol. 2., p. 60-96, 123-143, 151-200.
13. *Demazure M.* Catastrophes et bifurcations. Paris: Ellipses., 1989.
14. *Ginoux J. M.* Differential geometry applied to dynamical systems. Singapore: World Scientific, 2009. vol. 3.
15. *Балабаев М. О.* Кривизна потока в задачах моделирования критических явлений // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. т.25. № 2. с.92-99.
16. *Krupa M., Popović N., Kopell N.* Mixed-Mode Oscillations in Three Time-Scale Systems. *Siam J. Applied dynamical systems: Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2008, Vol. 7, No. 2, pp. 361-420.
17. *Desroches M., Jeffrey M.* Canards and curvature: the 'smallness of ε ' in slow-fast dynamics. *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2011., Vol. 467., p. 2404-2421.
18. *Sobolev V. A., Shchepakina E. A.* Self-ignition of Dusty Media. *J. Combustion: Explosion and Shock Waves*, 1993, vol. 29. — p. 378-381.
19. *Gol'dshtein V., Zinoviev A., Sobolev V., Shchepakina E.* Criterion for Thermal Explosion with Reactant Consumption in a Dusty Gas. *Proc. London Roy. Soc. Ser. A.*, 1996, vol. 452. — p. 2103-2119

**MODELING CRITICAL PHENOMENA
IN A GENERALIZED VAN DER POL MODEL**

© 2020 M.O. Balabaev

Samara National Research University named after Academician S.P. Korolyov

In the framework of this paper we consider the flow curvature method applying to modeling critical phenomena in one of the three-time-scale fast-slow autonomous dynamical systems. The article considers a model that is a generalization of the classical Van der Pol model. The approximations of an invariant manifold and a two-dimensional analogue of a duck trajectory (a black swan) are constructed. *Key words:* fast-slow systems, invariant manifolds, singular perturbations, critical phenomena, change of stability, flow curvature, Van der Pol model.

DOI: 10.37313/1990-5378-2020-22-2-138-141