

**РАСЧЕТ ГОФРИРОВАННОЙ СТЕНКИ НА ПРОЧНОСТЬ
И ЖЕСТКОСТЬ АНАЛИТИЧЕСКИМ И ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМИ**

© 2020 И.Е. Адеянов, М.Ю. Александрова

Самарский государственный технический университет

Статья поступила в редакцию 20.01.2020

В статье предлагается метод аналитического и численного расчета гофрированной стенки под давлением. Постановка задачи формулируется следующим образом: проверить гофрированную стенку на прочность и жесткость. В условиях нормальной эксплуатации в материале гофрированной стенки не должны возникать пластические деформации, а также стенки гофра не должны схлопываться. Аналитический расчет производится методом сил, численный - методом конечных элементов. Проводится анализ и сопоставление аналитического и численного решений.

Ключевые слова: гофр, метод сил, метод конечных элементов.

DOI: 10.37313/1990-5378-2020-22-2-81-85

Гофрированные стенки используются в трансформаторах для компенсации избыточного давления масла при нагреве. Гофрированная стенка под давлением имеет ограничения в условиях эксплуатации. Деформации ее гофра в общем случае должны быть упругими и не допускающими схлопывания.

Гофр представляет собой тонкостенную конструкцию, полученную гибкой листа (рисунок 1, а). Геометрические параметры гофра, необходимые для расчета, приведены на рисунке 1, б.

В качестве расчетной схемы гофра используем конструкцию в виде рамы с прямоугольным сечением $\delta \times 1$. Учитываем симметрию гофра относительно вертикальной оси (рисунок 2, а). Имеем статически неопределимую систему. Определяем неизвестные реакции в скользящей заделке X_1 и X_2 методом сил [1]. Расчет напряжений и перемещений гофра проводим в упругой линейной постановке. Схемы, используемые в этих расчетах, приведены на рисунках 2, б-д.

Записываем систему канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0, \end{cases}$$

где $\delta_{11} = \sum_{i=1}^3 \int_{l_i} \frac{M^1 M^1}{EI} dx_i$, $\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_{i=1}^3 \int_{l_i} \frac{M^1 M^2}{EI} dx_i$,

$$\delta_{22} = \sum_{i=1}^3 \int_{l_i} \frac{M^2 M^2}{EI} dx_i, \Delta_{1p} = \sum_{i=1}^3 \int_{l_i} \frac{M^p M^1}{EI} dx_i,$$

Адеянов Игорь Евгеньевич, кандидат технических наук, доцент кафедры механики. E-mail: adigorev@gmail.com
Александрова Маргарита Юрьевна, кандидат технических наук, доцент кафедры механики.
E-mail: kris-maks@mail.ru

$$\Delta_{2p} = \sum_{i=1}^3 \int_{l_i} \frac{M^p M^2}{EI} dx_i - \text{определяются с помощью}$$

интеграла Мора.

Выражения изгибающих моментов от заданных внешних нагрузок и от единичных нагрузок по 3-м участкам рамы представлены в таблице 1.

На основе интеграла Мора

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^3 \int_{l_i} \frac{M^1 M^1}{EI} dx_i = \frac{1}{EI} b^2 \left(\frac{b}{3} + c \right),$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_{i=1}^3 \int_{l_i} \frac{M^1 M^2}{EI} dx_i = -\frac{1}{EI} \left(\frac{b^2}{2} + bc \right),$$

$$\delta_{22} = \sum_{i=1}^3 \int_{l_i} \frac{M^2 M^2}{EI} dx_i = \frac{1}{EI} (a + b + c),$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{M^p M^1}{EI} dx = -\frac{p}{EI} (0,25a^2 b^2 + 0,125b^4 + 0,5b(a^2 + b^2)c + 0,5ac^2 b + \frac{1}{6}c^3 b),$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{M^p M^2}{EI} dx = \frac{p}{EI} \left(\frac{1}{6}a^3 + 0,5a^2 b + \frac{1}{6}b^3 + 0,5(a^2 + b^2)c + 0,5ac^2 + \frac{1}{6}c^3 \right).$$

Складывая оба уравнения канонической системы метода сил, предварительно умножив первое уравнение системы на δ_{21} , а второе на $-\delta_{11}$, получим неизвестную реакцию X_2

$$\delta_{12}\delta_{21}X_2 + \Delta_{1p}\delta_{21} - \delta_{22}\delta_{11}X_2 - \Delta_{2p}\delta_{11} = 0,$$

$$X_2 = \frac{\Delta_{2p}\delta_{11} - \Delta_{1p}\delta_{21}}{\delta_{12}\delta_{21} - \delta_{11}\delta_{22}}.$$

Складывая оба уравнения канонической системы метода сил, предварительно умножив

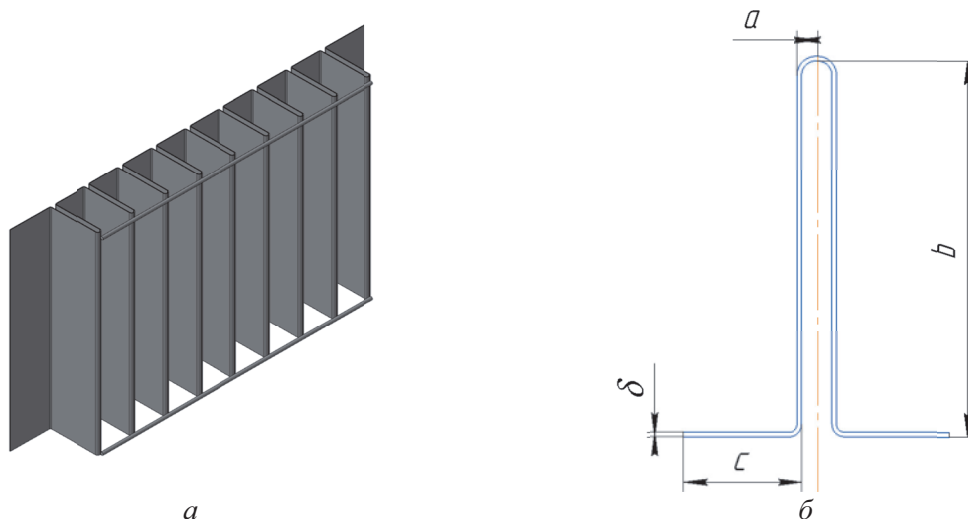


Рис. 1. Гофрированная стенка:
а - общий вид; б - сечение рассчитываемой части гофра

Таблица 1. Выражения изгибающих моментов от заданных внешних нагрузок и от единичных нагрузок по 3-ем участкам рамы

Участок	M^p	M^1	M^2
AB	$M_1^p = -0,5px^2$	$M_1^1 = 0$	$M_1^2 = 0$
BC	$M_2^p = -0,5pa^2 - 0,5px^2$	$M_2^1 = 1 \cdot x = x$	$M_2^2 = -1$
CD	$M_3^p = -0,5p(a^2 + b^2) - pax - 0,5px^2$	$M_3^1 = 1 \cdot b = b$	$M_3^2 = -1$

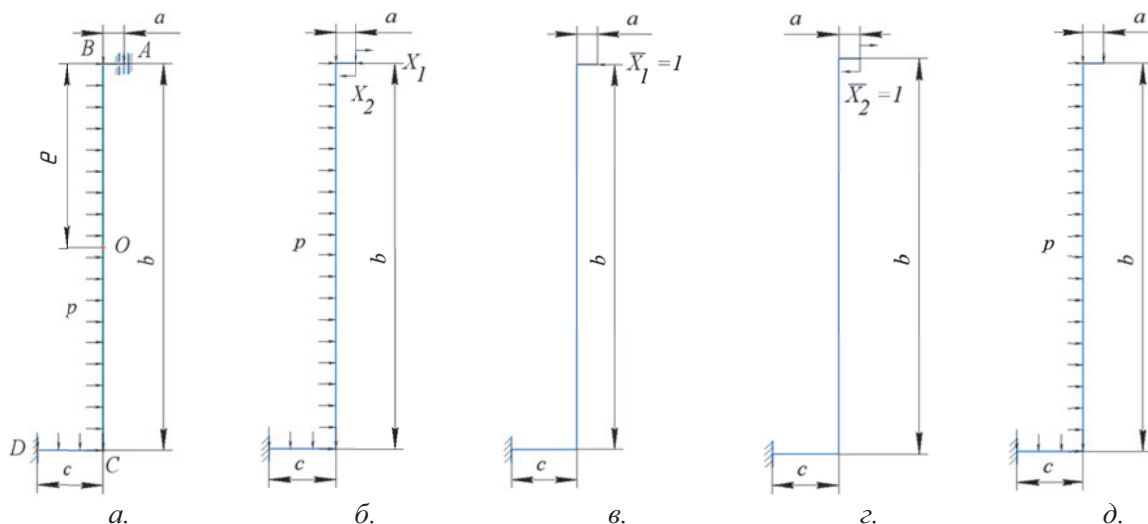


Рис. 2. Расчетная схема гофра, представленного в виде рамы:
а – статически неопределимая рама; б – эквивалентная система метода сил;
в – основная система, нагруженная единичной силой; г – основная система, нагруженная единичным моментом; д – основная система, нагруженная заданной распределенной нагрузкой

первое уравнение системы на δ_{22} , а второе на $-\delta_{12}$, получим неизвестную реакцию X_1

$$\delta_{11}\delta_{22}X_1 + \Delta_{1p}\delta_{22} - \delta_{21}\delta_{12}X_1 - \Delta_{2p}\delta_{12} = 0,$$

$$X_1 = \frac{\Delta_{2p}\delta_{12} - \Delta_{1p}\delta_{22}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}}.$$

Определяем изгибающие моменты и напряжения в точках А, В, С, D (рисунок 2, а).

В точке А: $M_A = -X_2, \sigma_A = \frac{6M_A}{\delta^2},$

где δ – толщина гофра.

В точке В: $M_B = -X_2 - 0,5pa^2, \sigma_B = \frac{6M_B}{\delta^2}.$

В точке С: $M_C = X_1b - X_2 - 0,5p(a^2 + b^2),$

$$\sigma_c = \frac{6M_c}{\delta^2}.$$

В точке D:

$$M_D = X_1 b - X_2 - 0,5 p (a^2 + 2ac + b^2 + c^2),$$

$$\sigma_D = \frac{6M_D}{\delta^2}.$$

Определяем экстремальное значение изгибающего момента на участке рамы BC в точке O:

$$M(x) = X_1 x - X_2 - 0,5 p (a^2 + x^2),$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0, \quad X_1 - px = 0, \quad x = \frac{X_1}{p},$$

где x – расстояние от начала участка BC до сечения, где действует экстремальный изгибающий момент на этом участке.

Определяем экстремальный изгибающий момент:

$$M_o = X_1 x - X_2 - 0,5 p (a^2 + x^2),$$

$$\sigma_o = \frac{6M_o}{\delta^2}.$$

Наибольший прогиб стенки BC гофра про-

исходит в середине BC стенки гофра (точка K). Определяем прогиб с помощью интеграла Мора:

$$\delta = \sum_{i=1}^4 \int_{l_i} \frac{M_i \cdot \overline{M}_i}{EI} dx,$$

где M_i – аналитическое выражение изгибающего момента от заданных нагрузок в произвольном сечении на каждом i -ом участке рамы; \overline{M}_i – аналитическое выражение изгибающего момента от единичной нагрузки $\overline{P} = 1$ в том же сечении, $I = \frac{\delta^3}{12}$ – момент инерции, EI – жест-

кость сечения балки при изгибе.

Расчетная схема определения перемещения точки K_n представлена на рисунке 3.

Выражения изгибающих моментов от заданных внешних нагрузок и от единичных нагрузок по 4-м участкам рамы представлены в таблице 2.

Подставляем выражения изгибающих моментов в формулу интеграла Мора:

$$\delta_k = \sum_{i=1}^4 \int_{l_i} \frac{M_i \cdot \overline{M}_i}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \left[\frac{5X_1 b^3}{48} - \frac{X_2 b^2}{8} - \right.$$

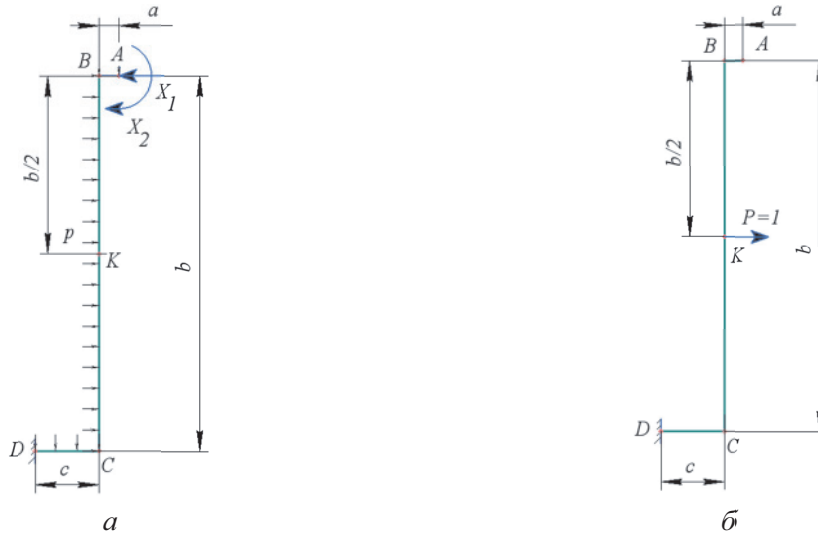


Рис. 3. Расчетная схема для определения перемещения точки K гофра

Таблица 2. Выражения изгибающих моментов от заданных внешних нагрузок и от единичных нагрузок по 4-ем участкам рамы

Участок	M_i	\overline{M}_i
AB	$M = -X_2 - 0,5 p x^2$	$M = 0$
BK	$M = X_1 x - X_2 - 0,5 p a^2 - 0,5 p x^2$	$M = 0$
KC	$M = X_1 (x + 0,5b) - X_2 - 0,5 p a^2 - 0,5 p b (0,25b + x) - 0,5 p x^2$	$M = -1 \cdot x = -x$
CD	$M = X_1 b - X_2 - p a (0,5a + x) - 0,5 p b^2 - 0,5 p x^2$	$M = -1 \cdot 0,5b = -0,5b$

$$\frac{pa^2b^2}{16} - \frac{17pb^4}{384} + \frac{X_1b^2c}{2} - \frac{X_2bc}{2} - \frac{pa^2bc}{4} - \left[\frac{pabc^2}{4} - \frac{pb^3c}{4} - \frac{pbc^3}{12} \right]$$

Наряду с аналитическим расчетом выполняется численное моделирование рамы методом конечных элементов для одного расчетного случая. Исходные данные, выбранные для расчета: $p = 1 \text{ кг/см}^2$ – внешнее давление, $a = 44 \text{ см}$, $b = 10 \text{ см}$, $c = 3,06 \text{ см}$ – геометрические параметры гофра, указанные на схеме (рисунок 1, б), $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ – модуль продольной упругости материала гофра, $\nu = 0,3$ – коэффициент Пуассона, $\delta = 0,12 \text{ см}$ – толщина стенки.

Результаты численного расчета приведены на рисунках 4, а-б.

Результаты аналитического и численного расчетов сведены в таблицу 3. Приведенные результаты показывают хорошее совпадение зна-

чений напряжений и перемещений, полученных предложенными методами.

Максимальный прогиб стенки гофра в рассмотренном расчетном случае не превышает половину расстояния между его стенками 0,38 см, следовательно, соприкосновение стенок гофра не происходит.

Задача решается как физически линейная с учетом только упругих свойств материала гофра. В случае допустимости пластических деформаций расчет должен производиться с учетом геометрической и физической нелинейностей численными методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочник машиностроителя. – М.: МАШГИЗ. – Т.3. – 1962.
2. *Зенкевич О., Чанг И.* Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. – М.: Недра, 1974.
2. *Беляев Н.М.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1976.

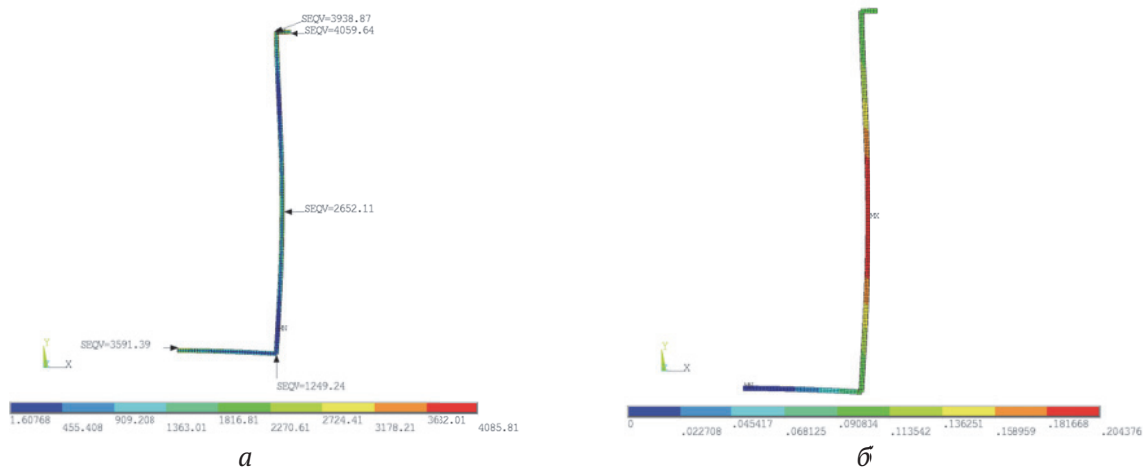


Рис. 4. Результаты численного расчета: а – эквивалентные напряжения, кг/см²; б – суммарные перемещения, см

Таблица 3. Значения напряжений и перемещений

	Аналитический расчет	Численный расчет	Отношение
Эквивалентное напряжение в точке А, кг/см ²	4030	4060	0,99
Эквивалентное напряжение в точке В, кг/см ²	4070	3939	1,03
Эквивалентное напряжение в точке С, кг/см ²	1209	1249	0,97
Эквивалентное напряжение в точке D, кг/см ²	3721	3591	1,04
Эквивалентное напряжение в точке О, кг/см ²	2667	2652	1,01
Максимальное перемещение стенки гофра, см	0,18	0,20	0,9

**STRENGTH CALCULATION AND STIFFNESS CALCULATION
OF A CORRUGATED WALL BY ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS**

© 2020 I.E.Adeyanov, M.Yu. Alexandrova

Samara State Technical University

The article proposes methods of analytical and numerical calculation of a corrugated wall under pressure. The problem statement is formulated as follows: check corrugated wall for strength and stiffness. Under normal conditions, plastic deformation should not occur in the material of corrugated wall, and corrugated walls should not collapse. The analytical calculation is performed by the force method, numerical – by the finite element method. The analysis and comparison of analytical and numerical solution is carried out.

Key words: corrugation, force method, finite element method.

DOI: 10.37313/1990-5378-2020-22-2-81-85

Igor Adeyanov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Mechanics.

E-mail: adigorev@gmail.com

Margarita Alexandrova, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Mechanics.

E-mail: kris-maks@mail.ru