

УДК 539.3

## ПЕРЕМЕННОЕ НАГРУЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

© 2020 Н.И. Дедов, В.Н. Исуткина

Самарский государственный технический университет

Статья поступила в редакцию 12.05.2020

В статье рассматривается деформирование пластин и пологих оболочек с учетом геометрической нелинейности и пластических деформаций при переменном нагружении. В случае упругопластического материала учитывается разгрузка, вторичные пластические деформации, сжимаемость материала. Приведены геометрические и физические соотношения и разрешающие нелинейные дифференциальные уравнения теории гибких пологих оболочек из упругопластического материала для произвольного цикла нагружения. Зависимость между интенсивностью напряжений и деформаций, с использованием обобщенного принципа Мазинга, позволяет исследовать деформирование гибких пластин и оболочек из циклически идеального, упрочняемого и разупрочняемого материалов. В выражениях для внутренних сил и внутренних моментов выделены добавочные силы и добавочные моменты, учитывающие историю нагружения пластин и оболочек на предыдущем  $n-1$ -ом нагружении.

*Ключевые слова:* Геометрическая нелинейность, упругопластическое деформирование, закритические деформации, разгрузка, вторичные пластические деформации, пластина, пологая оболочка, переменное нагружение.

DOI: 10.37313/1990-5378-2020-22-3-152-156

В данной работе исследуется напряженное и деформированное состояние гибких пластин и пологих оболочек на прямоугольном плане, при многократном упругопластическом нагружении. Учитывается разгрузка, вторичные пластические деформации и сжимаемость материала. Для исследования напряженно – деформированного состояния при упругопластических деформациях пластин и оболочек необходимы физические уравнения связи напряжений с деформациями, которые определяются принятыми теориями пластичности.

В работе [1] рассмотрено исследование геометрически нелинейных пластин и пологих оболочек при упругопластическом деформировании при статическом однократном нагружении. Разрешающие уравнения теории гибких пластин и оболочек получены на основе деформационной теории пластичности Генки-Ильюшина с учетом разгрузки и вторичных пластических деформаций. Определены верхние и нижние критические нагрузки, показаны зоны разгрузки и вторичных пластических деформаций.

Напряженно-деформированное состояние при упругопластическом деформировании прямоугольных пластин при повторном на-

гружении исследовано в работе [2] для материалов с различными механическими характеристиками.

В работах [3-5] для решения нелинейных задач теории оболочек используется метод последовательных нагружений, разработанный В.В. Петровым. Было показано, что сходимость процесса решения нелинейных уравнений заметно ухудшается при подходе к значениям критической нагрузки.

В работах [6-8] рассматриваются устойчивость и закритическое поведение геометрически и физически нелинейных задач теории пологих оболочек. Для решения нелинейных уравнений применен метод общей итерации, разработанный М.С. Корнишиным. Метод общей итерации имеет достаточно хорошую сходимость при исследовании докритических, закритических состояний и при определении верхней и нижней критических нагрузок.

В данной работе рассматривается упругопластическое деформирование гибких пластин и пологих оболочек на прямоугольном плане, включая закритические деформации при

Переменном нагружении наружным давлением. Схема нагружения пологой оболочки на прямоугольном плане показана на рис. 1.

При упругопластическом деформировании пластин и пологих оболочек на участке активного нагружения OAN компоненты девиатора напряжений связаны с компонентами девиатора деформаций соотношениями, которые по теории малых упругопластических деформаций имеют вид

*Дедов Николай Иванович, кандидат технических наук, профессор кафедры «Механика».*

*E-mail: nikolai\_dedov@mail.ru*

*Исуткина Вера Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и прикладной информатики.*

*E-mail: vera\_isutkina@mail.ru*

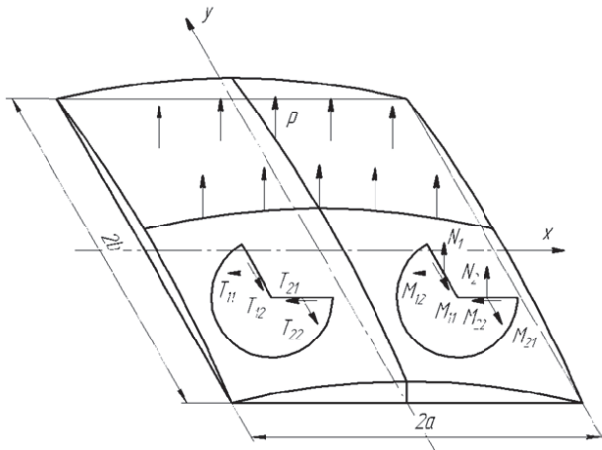


Рис. 1. Пологая оболочка на прямоугольном плане

$$\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}), i, j=1, 2, 3$$

где  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  – модуль объемного сжатия,

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} \text{ – средняя деформация,}$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \text{ – среднее напряжение,}$$

$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0$  – зависимость среднего напряжения от средней деформации.

Зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций принимается в виде, предложенном А.А. Ильюшиным

$$\sigma_i = 3G(1 - \omega_i) e_i,$$

где  $\omega_i = f(e_i)$  – функция А.А. Ильюшина.

Переход из упругого состояния в пластическое принимаем в соответствии с критерием Губера - Мизеса по интенсивности напряжений или деформаций [9]

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)} = \sigma_T$$

- по интенсивности напряжений,

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)} = \varepsilon_T$$

- по интенсивности деформаций.

При разгрузке на участке диаграммы NPR, включающем область вторичных пластических деформаций, связь между напряжениями и деформациями на плоскости с координатами  $\sigma_i - \varepsilon_i$  имеет вид

$$\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_0 \delta_{ij} = + \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}_i}{\bar{e}_i} (\bar{\varepsilon}_{ij} - \bar{\varepsilon}_0 \delta_{ij}),$$

$$i, j = 1, 2, 3.$$

Здесь введены разности

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma' - \sigma_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon'_i - \varepsilon_{ij}, i, j = 1, 2, 3,$$

где  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  – величины компонентов тензо-

ра напряжений и деформаций при разгрузке,  $\sigma'_{ij}, \varepsilon'_i$  – величины компонентов тензора напряжений и деформаций в конце первого нагружения. Остальные выражения для напряжений и деформаций при разгрузке те же самые, что и при первом нагружении, отмечаются чертой сверху.

Используя общую теорему об упругопластической разгрузке, сформулированную В.В. Москвитиным, запишем связь между компонентами девиатора напряжений и компонентами девиатора деформаций при циклическом нагружении в виде [10]

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(n)} = 3K \bar{\varepsilon}_0^n \delta_{ij} + \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}_i^n}{\bar{e}_i^n} (\bar{\varepsilon}_{ij}^n - \bar{\varepsilon}_0^n \delta_{ij}),$$

$$i, j = 1, 2, 3.$$

Здесь введены разности

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}^{(n-1)} - \sigma_{ij}^{(n)}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(n-1)} - \varepsilon_{ij}^{(n)},$$

$$i, j = 1, 2, 3,$$

где  $\sigma_{ij}^{(n)}, \varepsilon_{ij}^{(n)}$  – величины компонентов тензора напряжений и деформаций при n-ом нагружении,  $\sigma_{ij}^{(n-1)}, \varepsilon_{ij}^{(n-1)}$  – величины компонентов тензора напряжений и деформаций в конце предыдущего (n-1)-го нагружения.

Аналогично уравнениям теории малых упругопластических деформаций при циклическом нагружении имеют место следующие соотношения

$$\bar{\sigma}_i^{(n)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\bar{\sigma}_{11}^{(n)} - \bar{\sigma}_{22}^{(n)})^2 + (\bar{\sigma}_{22}^{(n)} - \bar{\sigma}_{33}^{(n)})^2 + (\bar{\sigma}_{33}^{(n)} - \bar{\sigma}_{11}^{(n)})^2 + 6(\bar{\sigma}_{12}^{(n)2} + \bar{\sigma}_{23}^{(n)2} + \bar{\sigma}_{31}^{(n)2})}$$

- интенсивность напряжений,

$$\bar{e}_i^{(n)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)} - \bar{\varepsilon}_{22}^{(n)})^2 + (\bar{\varepsilon}_{22}^{(n)} - \bar{\varepsilon}_{33}^{(n)})^2 + (\bar{\varepsilon}_{33}^{(n)} - \bar{\varepsilon}_{11}^{(n)})^2 + 6(\bar{\varepsilon}_{12}^{(n)2} + \bar{\varepsilon}_{23}^{(n)2} + \bar{\varepsilon}_{31}^{(n)2})}$$

- интенсивность деформаций,

$$\bar{\sigma}_0^{(n)} = \frac{\bar{\sigma}_{11}^{(n)} + \bar{\sigma}_{22}^{(n)} + \bar{\sigma}_{33}^{(n)}}{3} \text{ – среднее напряжение,}$$

$$\bar{\varepsilon}_0^{(n)} = \frac{\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)} + \bar{\varepsilon}_{22}^{(n)} + \bar{\varepsilon}_{33}^{(n)}}{3} \text{ – средняя деформация.}$$

Связь между шаровыми составляющими тензора напряжений и тензора деформаций имеет вид

$$\bar{\sigma}_0^{(n)} = 3K \bar{\varepsilon}_0^{(n)}.$$

Зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций при n-ом нагружении принимает вид

$$\bar{\sigma}_i^{(n)} = 3G \left( 1 - \bar{\omega}^{(n)} \right) \bar{e}_i^{(n)},$$

где  $\bar{\omega}^{(n)} = f(\bar{e}_i^{(n)})$  – функция А.А. Ильюшина при n-ом нагружении.

В течение полного цикла нагружения внешние силы могут принимать положительные и отрицательные значения. Выражения для компонент напряжений и деформаций при  $n$ -ом нагружении примут вид

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}^{n-1} + (-1)^{n-1} \bar{\sigma}_{ij}^{(n)},$$

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{n-1} + (-1)^{n-1} \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Преобразуем эти формулы, составляя последовательно соотношения, для определения напряжений и деформаций при произвольном  $n$ -ом нагружении через компоненты напряжений и деформаций при первом нагружении

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \sigma' + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \bar{\sigma}_{ij}^{(k)},$$

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \varepsilon'_{ij} + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \bar{\varepsilon}_{ij}^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

При исследовании упругопластического деформирования элементов конструкций, в случае циклического нагружения, необходимо учитывать изменение упругопластических свойств материала для каждого цикла нагружения. Должны быть известны диаграммы циклического деформирования для всего процесса многократного нагружения. На рис.2 приведены диаграммы растяжения при первом нагружении OAN, при разгрузке, последующем сжатии и вторичных пластических деформаций NPR и повторном нагружении RST.

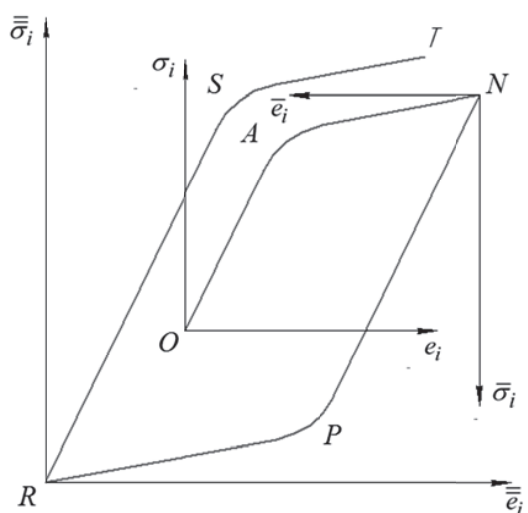


Рис. 2. Диаграммы растяжения при первом нагружении OAN, при разгрузке и последующем сжатии и вторичных пластических деформаций NPR и повторном нагружении RST

В зависимости от законов изменения механических свойств, при циклических нагружениях, различают циклически идеальные материалы у которых упругопластические свойства не

зависят от числа циклов нагружения. У циклически разупрочняемых материалов упругопластические свойства материала уменьшаются, а циклически упрочняющихся – увеличиваются.

Если при первом нагружении наступление текучести материала определяется величинами  $\sigma_T$  и  $\varepsilon_T$ , то в соответствии с принципом Мазинга при циклическом нагружении наступление текучести определяется величинами  $\bar{\sigma}_T = 2\sigma_T$  и  $\bar{\varepsilon}_T = 2\varepsilon_T$ . Принцип Мазинга удовлетворительно описывает свойства лишь циклически идеальных материалов. Введя экспериментальный параметр  $\alpha_n$ , В.В. Москвитин обобщил принцип Мазинга. В этом случае наступление предела текучести на плоскости с координатами  $\bar{\sigma}_i^{(n)}$  и  $\bar{\varepsilon}_i^{(n)}$  определяется значениями  $\bar{\sigma}_{iT}^{(n)} = \alpha_n \sigma_T$  по напряжениям и  $\bar{\varepsilon}_{iT}^{(n)} = \alpha_n \varepsilon_T$  по деформациям. Зависимость параметра  $\alpha_n$  от количества циклов нагружения принимаем в виде [9]  $\alpha_n = \alpha_2 (n-1)^\gamma, \gamma < 1$ . Постоянные  $\alpha_n$  и  $\gamma$  определяются экспериментально. В случае циклически идеального материала  $\alpha_2 = 2, \gamma = 0$ . В случае циклически разупрочняемого материала  $\alpha_2 = 2, \gamma < 0$ , а в случае упрочняемого –  $\alpha_2 = 2, \gamma > 0$ .

Рассмотренные соотношения деформационной теории пластичности широко применяются при решении прикладных задач расчета напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек при пластических деформациях. Более общими являются соотношения теории течения, которые связывают приращения компонент тензора деформаций с напряжениями и их приращениями, что позволяет описывать сложное нагружение. Деформационная теория строго применима лишь в случае простого нагружения. Однако, деформационная теория обладает относительной простотой исходных соотношений и дает результаты удовлетворительно согласующиеся с экспериментом и при нагружениях отличных от простого [11]. В задачах устойчивости соотношения деформационной теории приводят к меньшим значениям критических нагрузок, причем последние лучше согласуются с экспериментом, чем критические нагрузки, определенные по теории течения [12,13].

При  $n$ -ом нагружении компоненты напряжений запишем, выделяя упругую составляющую напряжений, в виде

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}^{\gamma(n)} + \Delta \sigma_{ij}^{(n)}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

где  $\Delta \sigma_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}^{(n-1)} - \bar{\sigma}_{ij}^{(n)} - \sigma_{ij}^{\gamma(n)}$  дополнительные напряжения, учитывающие отклонения материала от закона Гука, наличие

разгрузки и вторичных пластических деформаций.

На основании принятых соотношений для напряжений, опуская индекс « $n$ » можно представить усилия и моменты в сечении оболочки в виде

$$T_{ij} = \int_{-0.5h}^{0.5h} \sigma_{ij} dz = T_{ij}^y + \Delta T_{ij},$$

$$M_{ij} = \int_{-0.5h}^{0.5h} \sigma_{ij} z dz = M_{ij}^y + \Delta M_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$N_i = N_i^y + \Delta N_i, \quad i = 1, 2$$

где  $T_{ij}$  – усилия, действующие в срединной поверхности оболочки,  $\Delta T_{ij}$  – добавочные усилия в срединной поверхности,  $M_{ij}$  – изгибающие и крутящий моменты,  $\Delta M_{ij}$  – добавочные изгибающие моменты и добавочный крутящий момент,  $N_i$  – поперечные силы,  $\Delta N_i$  – добавочные поперечные силы.

Добавочные силы и моменты учитывают историю нагружения оболочки – напряженное деформированное состояние оболочки на предыдущем  $n-1$ -ом нагружении оболочки и нелинейности за счет пластических деформаций.

При повторно переменном нагружении гибких пластин и пологих оболочек давлением, основная система дифференциальных уравнений теории тонких упругопластических оболочек с учетом разгрузки, вторичных пластических деформаций и сжимаемости материала примет вид

$$D\nabla^2 \nabla^2 w + F(\phi) = L(w, \phi) + G(\Delta M_{ij}) + p,$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \delta + N(w) = K(w) + H(\Delta T_{ij}).$$

Приведенная система дифференциальных уравнений позволяет исследовать напряженно – деформированное состояние при циклическом нагружении гибких упругопластических пластин и пологих оболочек в областях докритических и закритических деформаций. Решение данных задач возможно при шаговом методе прослеживания процесса нагружения с использованием общих методов итерации.

## ВЫВОДЫ

Предложенный метод позволяет проводить исследования напряженного деформированного состояния при повторно переменном нагружении упругопластических пластин и гибких пологих оболочек при изгибе и закритических деформациях, изготовленных из циклически идеальных, упрочняющихся и разупрочняющихся материалов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дедов Н.И., Исуткина В.Н. Упругопластическое деформирование геометрически нелинейных пластин и пологих оболочек // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2018. Том 20, № 4(2)(84). С. 320.
2. Zin T.H., Ho E. Elasto-plastic bending of rectangular plate- Journal of Engineering Mechanics Division. Proceedings of the ASCE, vol. 94, EM 1, 1968, pp. 199-210.
3. Петров В.В. Исследование конечных прогибов пластин и пологих оболочек методом последовательных нагружений // Теория пластин и оболочек Тр. 11-й Всес. конф., Львов, 1961. - Киев АН УССР, 1962. - С. 328 - 331.
4. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975. 118 с.
5. Бессонов Л.В., Кузнецова Т.А., Чумакова С.В. О численной реализации метода последовательного изменения параметров при расчёте напряженно-деформированного состояния пологих оболочек // Чебышевский сб., 17:3 (2016), 28–37
6. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. - М.: Наука, 1964.
7. Корнишин М.С., Столяров Н.Н., Дедов Н.И. Упругопластический изгиб гибких пологих оболочек под действием поперечной нагрузки распределенной по малой центральной площадке // В кн.: Исследование по нелинейным задачам теории пластин и оболочек. Саратов, Саратовский ун-т, 1974. С.171-178.
8. Дедов Н.И., Корнишин М.С., Столяров Н.Н. Изгиб прямоугольных в плане гибких пластин и пологих оболочек из нелинейно упругого сжимаемого материала // Труды VIII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Ростов на Дону, 1972, АН СССР.
9. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
10. Москвитин В.В. Пластичность при переменных нагружениях. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965. 263 с.
11. Москвитин В.В. Циклическое нагружение элементов конструкции. М.: Наука, 1981. 344 с.
12. Писаренко Г.С., Мажаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. - Киев: Наук.думка, 1981. - 496с.
13. Соломенко Н.С., Абрамян К.Г., Сорокин В.В. Прочность и устойчивость пластин и оболочек судового корпуса. Л.: Судостроение, 1967.

## **VARIABLE LOADING OF NONLINEAR PLATES AND SHALLOW SHELLS**

© 2020 N.I. Dedov, V.N. Isutkina

Samara State Technical University

The article discusses the deformation of plates and shallow shells, taking into account the geometric nonlinearity and plastic deformations under variable loading. In the case of an elastoplastic material, unloading, secondary plastic deformations, material compressibility are taken into account. Geometric and physical relations and solving nonlinear differential equations of the theory of flexible gentle shells of elastoplastic material are given for an arbitrary loading cycle. The relationship between the intensity of stresses and strains, using the generalized Masing principle, allows us to investigate the deformation of flexible plates and shells of cyclically ideal, strengthened and softened materials. In the expressions for the internal forces and internal moments, additional forces and additional moments are taken into account, taking into account the history of loading of plates and shells on the previous  $n-1$ -th loading.

*Keywords:* Geometric nonlinearity, elastoplastic deformation, supercritical deformations, unloading, secondary plastic deformations, plate, shallow shell, variable loading.

DOI: 10.37313/1990-5378-2020-22-3-152-156

---

*Nikolai Dedov, Candidate of Technical Sciences, Professor of the Department of Mechanics.*

*E-mail: nikolai\_dedov@mail.ru*

*Vera Isutkina, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Applied Informatics. E-mail: vera\_isutkina@mail.ru*