

УДК 532.5.032

О ТЕСТИРОВАНИИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ВЯЗКОЙ ДИФФУЗИИ С УЧЕТОМ СЖИМАЕМОСТИ ГАЗА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

© 2020 В.В. Никонов

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва
г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 02.10.2020

В статье решается вязкая подзадача в рамках прямого численного моделирования течения сжимаемого газа. Данная подзадача тестируется на примере двумерной задачи об импульсном старте плоской пластины (задача Стокса). Проведено три расчета с разными начальными данными и получено поле скорости. Результаты сравнивались с результатами задачи Стокса. Из анализа результатов делается вывод, что для достижения приемлемой точности достаточно выбирать шаг по времени по правилу, которое автор сформулировал в более ранних своих работах.

Ключевые слова: сжимаемый газ, уравнения Навье-Стокса, вязкая подзадача, прямое моделирование, численное моделирование, двумерное течение.

DOI: 10.37313/1990-5378-2020-22-5-128-131

При расчете течений воздуха с относительно большими дозвуковыми скоростями возникает подзадача расчета вязкости потока с учетом сжимаемости. Соответствующие уравнения данной подзадачи приводятся, например, в [1, 2]. Правильный выбор шага интегрирования по времени является важным при расчете таких течений. В предыдущих работах [3, 4] автором было найдено правило для выбора шага по времени в подзадаче диффузии для несжимаемого потока. Протестируем это правило для случая сжимаемого течения. Тестирование будем производить на примере двумерной задачи об импульсном старте плоской пластины (задача Стокса) [5].

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА

Уравнения Навье-Стокса для сжимаемого газа [1] в двумерном случае имеют вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - \\ & - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right), \\ \rho \frac{dv}{dt} = & -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \\ & - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Для замыкания задачи необходимо добавить уравнение неразрывности

Никонов Валерий Владимирович, кандидат технических наук, доцент кафедры конструкции и проектирования летательных аппаратов. E-mail: v_nikonov@mail.ru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

и энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(Eu)}{\partial x} + \frac{\partial(Ev)}{\partial y} - \text{div}(P\bar{v}) = 0, \quad (3)$$

где

$$\text{div}(P\bar{v}) = \frac{\partial}{\partial x} (p_{11}u + p_{12}v) + \frac{\partial}{\partial y} (p_{21}u + p_{22}v). \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_{11} = & -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ p_{12} = & p_{21} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$p_{22} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Также необходимо добавить уравнение состояния

$$E = \frac{p}{\kappa - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2),$$

или $\rho C_v T = \frac{p}{\kappa - 1}. \quad (6)$

При этом коэффициент динамической вязкости для воздуха для (1) и (5) определяется следующим выражением [2]

$$\mu = 1,45 \times 10^{-6} \frac{T^{3/2}}{T + 110}. \quad (7)$$

При решении данной задачи методами, использующими расщепление по физическим процессам, возникает задача о моделировании

процесса диффузии. Данная задача будет описываться следующими уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} &= 2 \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ &+ \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) \right), \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \\ &- \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right), \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= 2 \frac{\partial(\mu u)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \mu u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2}{3} \frac{\partial(\mu u)}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \mu u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial(\mu v)}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \mu v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial(\mu u)}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \\ &+ 2 \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + 2 \mu v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{2}{3} \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \mu v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (9) \end{aligned}$$

Для конечно-разностной аппроксимации системы уравнений (8, 9) использовались следующие схемы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} &\approx \frac{\rho_{i,j}^{t+\Delta t} u_{i,j}^{t+\Delta t} - \rho_{i,j}^t u_{i,j}^t}{\Delta t}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &\approx \frac{u_{i+1,j}^t - u_{i-1,j}^t}{2 \Delta x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx \frac{u_{i-1,j}^t - 2u_{i,j}^t + u_{i+1,j}^t}{\Delta x^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &\approx \frac{u_{i+1,j+1}^t - u_{i+1,j-1}^t - u_{i-1,j+1}^t + u_{i-1,j-1}^t}{4 \Delta x \Delta y}, \end{aligned} \quad (10)$$

где Δt – шаг по времени, а Δx и Δy – по пространству. Индекс i отвечает за изменение переменной вдоль оси x , j – вдоль оси y . Остальные производные аппроксимируются аналогичным образом.

Граничные условия прилипания потока на поверхности пластины для слоя фиктивных ячеек $j = 0$, находящихся с «обратной стороны» пластины, сводятся к

$$u_{i,0} = -u_{i,1}, \quad v_{i,0} = 0, \quad (11)$$

где ячейка с координатами $(i,0)$ является прилегающей к поверхности пластины.

В работах [3, 4] было показано, что при выборе шага по времени в виде

$$\Delta t = kh^2 / \nu \quad (12)$$

ошибка численного решения уравнения диффузии с помощью схемы «донор-акцептор» и схемы «вперед по времени, центральная по пространству» (ВВЦП) зависит только от константы k и от количества сделанных шагов по времени.

Здесь h – шаг ячейки расчетной сетки по пространству $h = \Delta x = \Delta y$. В работе [4] путем серии численных экспериментов было найдено значение $k = 0.22$, при котором ошибка решения минимальна. Применим это значение и в нашей численной схеме.

2. ТЕСТИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ

В качестве тестовой задачи была выбрана первая задача Стокса об импульсном старте плоской стенки [5]. При обращенном движении эту задачу можно рассматривать как продольное обтекание бесконечно длинной плоской пластины равномерным потоком со скоростью u_∞ . В данном случае аналитическое решение данной задачи имеет вид

$$u_{ex}^* = \text{erf}(\eta), \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{4\nu t}}. \quad (13)$$

Расчетная область представляла собой прямоугольник размерами $2b \times 0.2b$, в центре которого в направлении, совпадающем с осью Ox , располагалась плоская пластина длины b . Использовалась однородная расчетная сетка 200×20 ячеек.

Были получены профили безразмерной скорости

$$u_j^* = \frac{u_j}{u_\infty} \quad (14)$$

для трех сечений, располагавшихся на расстояниях: $0.25b, 0.5b, 0.75b$, – от переднего края пластины в численной схеме. В силу выбора переменной η данные профили будут совпадать для разных сечений, и для трех проведенных расчетов. Эти численные расчеты были со следующими начальными условиями (см. таблицу 1). Остальные одинаковые для всех трех случаев начальные условия были равны: скорость набегающего потока $u_\infty = 14.63394141$ м/с, температура $T = 290.511$ К, динамическая вязкость $\mu = 1.79266 \times 10^{-5}$ кг/(м·с).

При проведении расчетов для разных величин h и n выяснилось, что, как и в [3, 4], порядок ошибки численного решения зависит только от константы k и количества сделанных шагов по времени. Максимальная относительная ошибка решения определялась следующим образом

$$\delta = \max |a_j| \cdot 100\%, \quad a_j = \frac{u_j^* - u_{ex}^*(y_j)}{u_{ex}^*(y_j)}, \quad (15)$$

где u_j^* – численное решение, $u_{ex}^*(y_j)$ – аналитическое решение.

Сравнение профиля скорости, полученного численно с помощью рассмотренной схемы, с аналитическим решением показано на рис. 1. При этом для выбранного значения $k = 0.22$ максимальная погрешность для профиля ско-

Таблица 1. Начальные условия, при которых проводились расчеты

№	b, м	h, м	p, Па	ρ , кг/м ³	Re	ν , м ² /с	δ , %
1	0.1	0.001	101325.0	1.225	10^5	1.46339×10^{-5}	0.32
2	1.0	0.01	101325.0	1.225	10^6	1.46339×10^{-5}	0.32
3	1.0	0.01	10132.5	0.1225	10^5	1.46339×10^{-4}	0.32

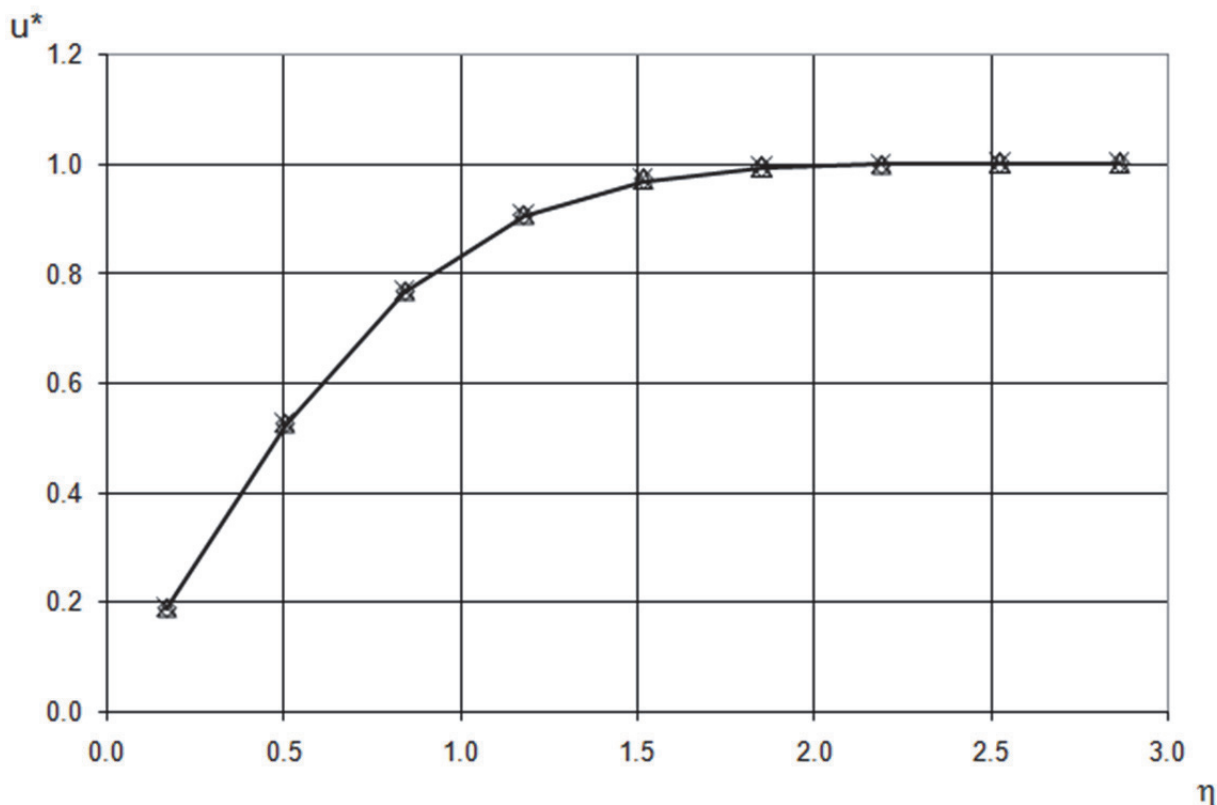


Рис. 1. Распределение продольной безразмерной компоненты скорости u^* над поверхностью пластины в сравнении с аналитическим решением; численное решение: \diamond – сечение $x = 0.25b$, Δ – сечение $x = 0.5b$, \times – сечение $x = 0.75b$, — — — аналитическое решение (12)

рости вдоль линии, перпендикулярной центру пластины, ($0.5b$) составляет 0.32% для всех трех расчетов.

Это позволяет сделать вывод, что значения коэффициента k , при котором получается достаточная точность решения задачи Стокса для схемы ВВЦП [4], и схемы, рассмотренной в данной работе, совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский // М. - Л.: Гос. изд. технико-теоретической литературы. 1950. 676 с.
2. Себиси, Т. Конвективный теплообмен / Т. Себиси, П. Брэдшоу // пер. с англ. С.С. Ченцова и В.А. Хохрякова. Под. ред. Пирумова У.Г. М.: Мир. 1987. 593 с.
3. Nikonov, V. The Ratio between Spatial and Time Resolutions for the Diffusion Substep in 2D Computational Vortex Methods / V. Nikonov, N. Kornev, A. Leder // Schiffbau Forschung. 2002. Vol. 41. N 3/4. Pp. 5-12.
4. Никонов, В.В. О выборе шага по времени в схеме ВВЦП при расчете процесса диффузии / В.В. Никонов // Сборник трудов 13-го Всероссийского семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. СГАУ. Самара. 2007. Ч. 2. С. 55-57.
5. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг // Пер. с нем. Г.А. Вольперта. Под. ред. Лойцянского Л.Г. М.: Наука. 1974. 712 с.

**2D TESTING OF A FINITE DIFFERENCE SCHEME FOR MODELLING
OF A VISCOUS DIFFUSION PROCESS IN COMPRESSIBLE GAS**

© 2020 V.V. Nikonov

Samara National Research University named after Academician S.P. Korolyov,
Samara, Russia

Viscous subproblem of direct numerical simulation of compressible gas is solved. This subproblem is tested on the two-dimensional problem of impulse start of a flat plate (Stokes' problem). Three calculations were made with the different initial conditions and velocity fields were obtained. The numerical results are compared with the solution of Stokes' problem. Analyzing the results, we can conclude that in order to achieve acceptable accuracy, it suffices to choose a time step according to the rule that the author formulated in his earlier works.

Keywords: compressible gas, Navier-Stokes equations, viscous subproblem, direct simulation, numerical simulation, two-dimensional flow.

DOI: 10.37313/1990-5378-2020-22-5-128-131