

АНАЛИЗ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КВАДРАТУРНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПО ПИЛОТ-СИГНАЛАМ

© 2021 К.В. Комарова

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, г. Саранск, Россия

Статья поступила в редакцию 30.06.2021

Рассмотрена задача восстановления квадратурных составляющих по пилот-сигналам в многочастотных системах связи. Для нахождения дисперсии ошибки оценивания квадратурных составляющих используются методы фильтрация Калмана, авторегрессионные процессы 1 и 2 порядка. *Ключевые слова:* корреляционная функция, квадратурные составляющие, пилот-сигналы, многочастотные системы связи, относительная дисперсия ошибки.

DOI: 10.37313/1990-5378-2021-23-4-111-115

ВВЕДЕНИЕ

Для систем радиосвязи важной проблемой является повышение помехоустойчивости приёма цифровых дискретных сигналов. В системах приема дискретных сообщений пилот-сигналы используются для восстановления квадратурных составляющих коэффициента передачи канала связи [1]. Применение пилот-сигналов позволяет дать оценку частотно-временного поля характеристик принимаемых сигналов и снизить вероятность ошибочного приема символов. Поэтому их число должно выбираться с учетом компромисса между снижением скорости передачи информации и качеством оценивания характеристик замираний. Для оценивания (интерполяции) частотно-временного случайного поля (СП) применяются различные методы, тесно связанные с моделями представления СП квадратурных составляющих [2]. Наиболее эффективно представление СП в виде двумерного марковского поля, что позволяет применять для восстановления калмановские алгоритмы [3]. Вместе с тем, это приводит к дополнительным ошибкам за счет замены реальных корреляционных функций (КФ), СП экспоненциальными. Таким образом, встает актуальная задача сравнительного анализа эффективности алгоритмов восстановления СП квадратурных составляющих в системах мобильной связи на основе известных и предложенных методов представления СП с помощью авторегрессий с кратными корнями характеристических уравнений.

Рассмотрим возможности восстановления квадратурных составляющих с корреляционной функцией (КФ) в пространстве частот. Для нахождения дисперсии ошибки оценивания квадратурных составляющих воспользуемся филь-

трацией Калмана при аппроксимации реальной дробно-рациональной КФ авторегрессионными (АР) процессами первого и второго порядка.

Оптимальная оценка $\hat{\bar{x}}$ вектора \bar{x} квадратурных составляющих записывается в виде [4]:

$$\hat{\bar{x}} = PC^T V^{-1} \bar{Z}, \quad (1)$$

где P – ковариационная матрица ошибок оценивания. Используя формулы, запишем

$$P = V_x (E + C^T V^{-1} C V_x)^{-1}, \quad (2)$$

где $V_x = M\{\bar{x}\bar{x}^T\}$ – ковариационная матрица вектора значений квадратурных составляющих. Структура этой матрицы имеет следующий вид:

$$V_x = \begin{pmatrix} \zeta_x^2 & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1M} \\ B_{21} & \zeta_x^2 & B_{23} & \dots & B_{2M} \\ - & - & - & - & - \\ B_{M1} & B_{M2} & B_{M3} & \dots & \zeta_x^2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $B_{ij} = M\{x_i x_j\}$ – ковариация между значениями квадратурных составляющих на частотах ω_i и ω_j . Эту матрицу удобно переписать в виде:

$$V_x = \zeta_x^2 \tilde{V}_x \quad (4)$$

где

$$\tilde{V}_x = \begin{pmatrix} 1 & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1M} \\ R_{21} & 1 & R_{23} & \dots & R_{2M} \\ - & - & - & - & - \\ R_{M1} & R_{M2} & R_{M3} & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

$R_{ij} = B_{ij} / \zeta_x^2$ – коэффициент корреляции квадратурных составляющих, которые находятся по заданной КФ:

$$\begin{aligned} R_{ij} &= R(k = i - j) = R(k) = \\ &= R(\Delta\omega) = \frac{1}{1 + \Delta\omega^2 \tau c k^2} = \frac{1}{1 + \alpha^2 k^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\alpha = \Delta\omega_p \tau c k$; $\Delta\omega_p$ – разность соседних

Комарова Ксения Владимировна, аспирантка кафедры «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» Института электроники и светотехники.
E-mail: kvkomarova10@mail.ru

частот. Заданный интервал корреляции k_0 на уровне $1/e$ позволяет выбрать коэффициент α [5-6]:

$$R(k_0) = \frac{1}{e} = \frac{1}{1+\alpha^2 k_0^2} \quad (6)$$

или $\alpha = \frac{\sqrt{e-1}}{k_0}$, где e – основание натурального логарифма.

Обычно применение фильтра Калмана основано на замене КФ экспонентой

$$R_1(k) = \sigma_1^2 \rho^{|k|}, \quad (7)$$

где ρ_1 находится из условия равенства

$$R_1(k_0) = \frac{1}{e}. \text{ При этом } \rho_1 = e^{-1/k_0}.$$

Для повышения эффективности восстановления квадратурных составляющих будем использовать АР процесс с корнем характеристического уравнения кратности $m=2$. При этом КФ

$$R_2(k) = \left(1 + \frac{(1-\rho^2)}{(1+\rho^2)} |k|\right) \rho^{|k|}, \quad (8)$$

где параметр ρ по заданному значению k_0 .

На рис. 1 приведены три графика КФ $R(k)$, $R_1(k)$, $R_2(k)$ при $k_0 = 10$. Хорошо видно, что КФ $R_2(k)$ лучше аппроксимирует реальную частотную КФ $R(k)$.

ДИСПЕРСИЯ ОШИБКИ ДЛЯ ДВУХ ПИЛОТ-СИГНАЛОВ

Представленное на рис. 2 в качестве примера рассмотрим восстановление квадратурных

составляющих на 10 частотных позициях с двумя пилот-сигналами, расположенными на первой и девятой позициях.

При этом в формуле:

$$C = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

относительные дисперсии ошибок оценивания будут диагональными элементами матрицы.

$$\frac{P}{\sigma_x^2} = V_x (E + q C^T C V_x)^{-1}, \quad (9)$$

где $q = \frac{\sigma_x^2}{\sigma^2}$ – отношение сигнал/шум. Структура

матрицы $\frac{P}{\sigma_x^2}$ имеет следующий вид:

$$\frac{P}{\sigma_x^2} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & P_{12}/\sigma_x^2 & P_{13}/\sigma_x^2 & \dots & P_{1M}/\sigma_x^2 \\ P_{21}/\sigma_x^2 & \sigma_2^2 & P_{23}/\sigma_x^2 & \dots & P_{2M}/\sigma_x^2 \\ - & - & - & - & - \\ P_{M1}/\sigma_x^2 & P_{M2}/\sigma_x^2 & P_{M3}/\sigma_x^2 & \dots & \sigma_M^2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $\sigma_1^2 = \sigma_{\varepsilon 1}^2 / \sigma_x^2, \sigma_2^2 = \sigma_{\varepsilon 2}^2 / \sigma_x^2, \dots$

$\sigma_M^2 = \frac{\sigma_{\varepsilon M}^2}{\sigma_x^2}$ – относительные дисперсии оши-

бок оценивания квадратурных составляющих. $\sigma_x^2 = \text{sigma}_x^2 = S_x^2$.

Представлены графики при $\rho = \text{const}$, как для $q=10$, так и для $q=100$, (рис. 3, 4).

Из рисунков 3 и 4 видно, что АР моделей с кратными корнями характеристических уравнений и КФ $R_2(k)$ (АР процесс с корнем характеристического уравнения кратности $m=2$) немного проигрывает по дисперсии ошибки по отношению к фильтрации с КФ $R(k)$. Предложенный подход $R(k)$ более эффективен, чем остальные методы фильтрации.

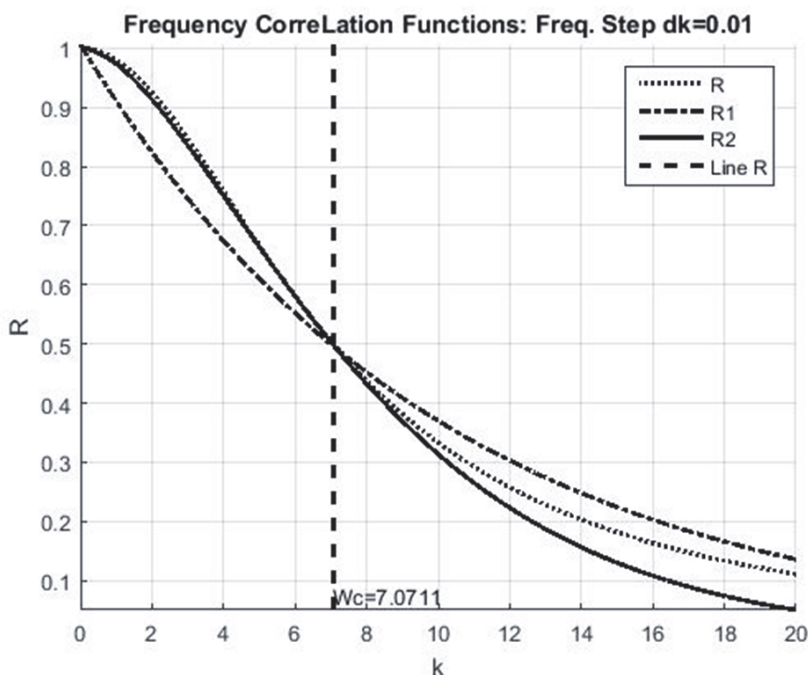


Рис. 1. Корреляционные функции по частоте $dk = 0,01$, где dk – дискретность шага.

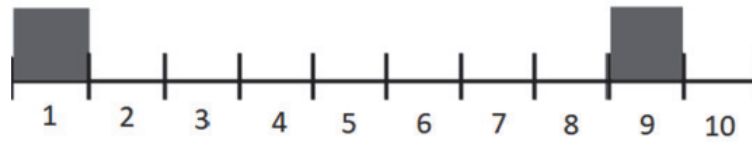
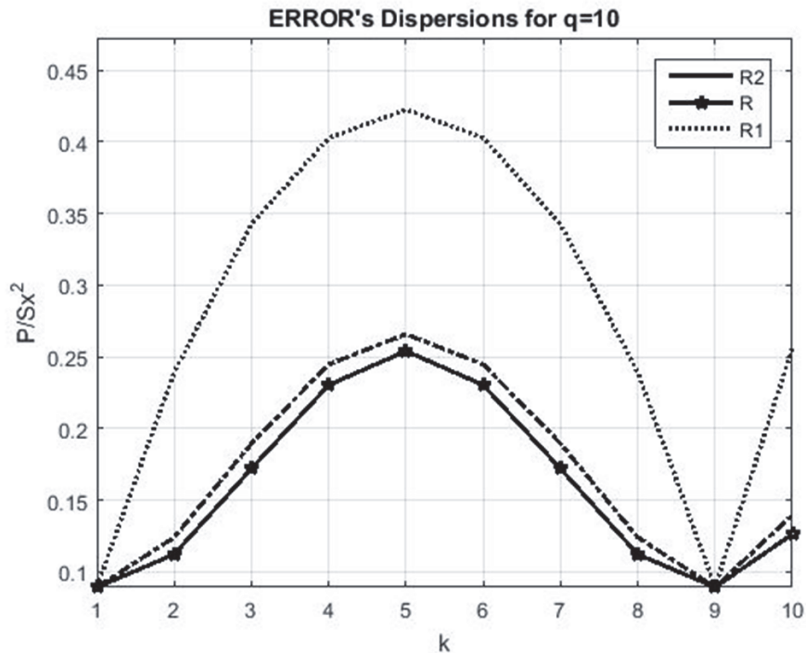
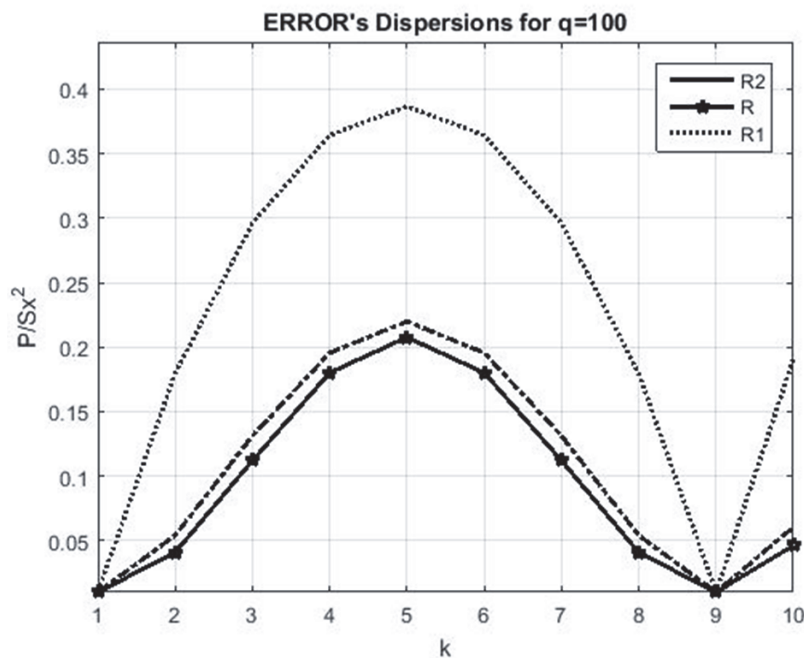


Рис. 2. Расположение двух пилот-сигналов

Рис. 3. Относительная дисперсия ошибки при $\rho = const, q = 10$ Рис. 4. Относительная дисперсия ошибки при $\rho = const, q = 100$

При анализе эффективности восстановления значений квадратурных составляющих по частоте произведено сравнение алгоритмов Калмана, авторегрессионных процессов с корнями характеристического уравнения. Установ-

лен существенный (в 2 - 3 раза) проигрыш по величине дисперсии ошибки восстановления при использовании классической калмановской фильтрации с экспоненциальной аппроксимацией $R_1(k)$. Вместе с тем, авторегрессионные мо-

дели обеспечивают возможности применения восстановления квадратурных составляющих по пилот-сигналам в реальном масштабе времени.

ДИСПЕРСИЯ ОШИБКИ ДЛЯ ЧЕТЫРЁХ ПИЛОТ-СИГНАЛОВ

Представленное на рис. 5 рассмотрим восстановление квадратурных составляющих на 10 частотных позициях с четырьмя пилот-сигналами, расположенными на первой-второй и восьмой-девятой позициях.

При этом в формуле:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

относительные дисперсии ошибок оценивания будут диагональными элементами матрицы.

$$\frac{P}{\sigma_x^2} = V_x (E + qC^T C V_x)^{-1}, \quad (6)$$

где $q = \frac{\sigma_x^2}{\sigma^2}$ – отношение сигнал/шум. Структура матрицы $\frac{P}{\sigma_x^2}$ имеет следующий вид:

имеет следующий вид:

$$\frac{P}{\sigma_x^2} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & P_{12}/\sigma_x^2 & P_{13}/\sigma_x^2 & \dots & P_{1M}/\sigma_x^2 \\ P_{21}/\sigma_x^2 & \sigma_2^2 & P_{23}/\sigma_x^2 & \dots & P_{2M}/\sigma_x^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{M1}/\sigma_x^2 & P_{M2}/\sigma_x^2 & P_{M3}/\sigma_x^2 & \dots & \sigma_M^2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $\sigma_1^2 = \sigma_{\epsilon 1}^2 / \sigma_x^2, \sigma_2^2 = \sigma_{\epsilon 2}^2 / \sigma_x^2, \dots,$

$\sigma_M^2 = \frac{\sigma_{\epsilon M}^2}{\sigma_x^2}$ – относительные дисперсии ошибок

оценивания квадратурных составляющих.

$$\sigma_x^2 = \text{sigma}_x^2 = S_x^2.$$

Представлены графики при $\rho = const$, как для $q=10$, так и для $q=100$, (рисунки 6, 7).

Как следует из анализа кривых на рис. 6 и рис. 7, применение АР моделей с кратными корнями характеристических уравнений и КФ $R_2(k)$ практически не приводит к проигрышу по дисперсии ошибки по отношению к фильтрации с КФ $R(k)$. Заметим, что использование классической калмановской фильтрации с экспоненциальной аппроксимацией $R_1(k)$ реальных КФ проигрывает предложенному подходу в 2-3 раза по дисперсии ошибки восстановления при незначительном уменьшении вычислительных затрат. Вместе с тем, АР модели обеспечивают возможности применения калмановского восстановления квадратурных составляющих по пилот-сигналам в реальном масштабе времени.



Рис. 5. Расположение четырёх пилот-сигналов

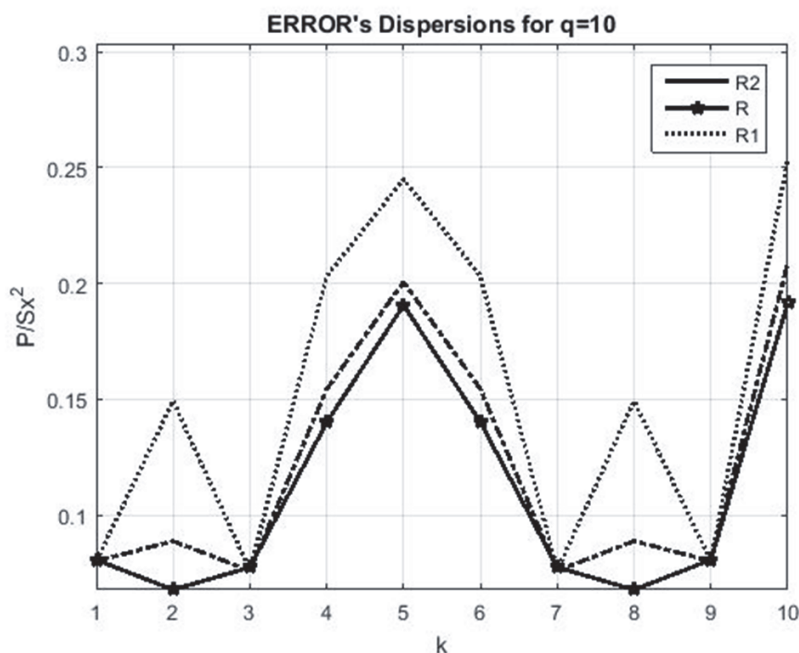


Рис. 6. Относительная дисперсия ошибки при $\rho = const, q = 10$

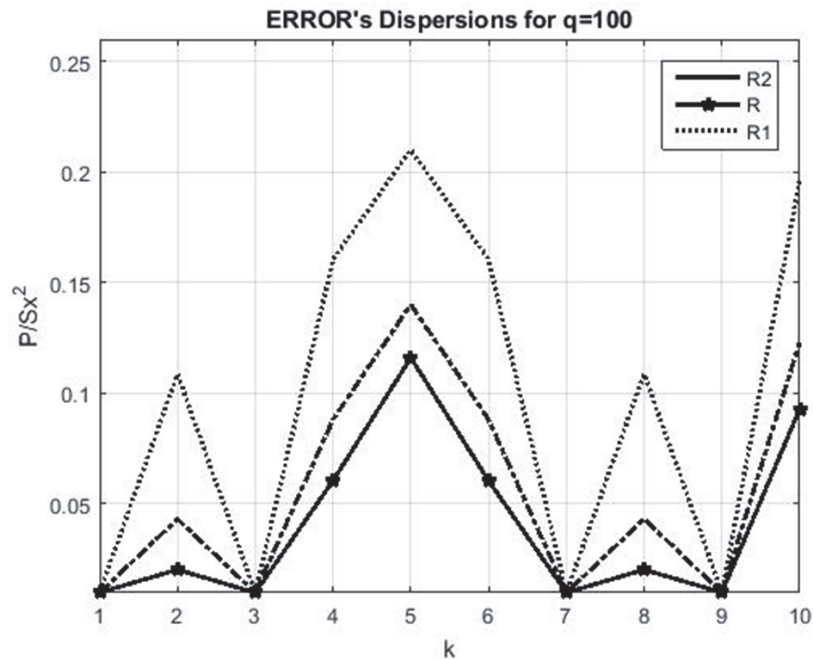


Рис. 7. Относительная дисперсия ошибки при $\rho = const, q = 100$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен анализ эффективности алгоритмов восстановления случайных полей квадратурных составляющих в системах мобильной связи на основе известных и предложенных методов представления случайных полей с помощью авторегрессий с кратными корнями характеристических уравнений. Предложено осуществлять восстановление полей канала связи в реальном масштабе времени на основе калмановской фильтрации с применением AP моделей с кратными корнями характеристических уравнений. Установлено, что использование классической калмановской фильтрации с экспоненциальной аппроксимацией $R_1(k)$ реальных КФ проигрывает предложенному подходу в 2-3 раза по дисперсии ошибки восстановления при незначительном уменьшении вычислительных затрат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чердынцев В. А. Оптимальные алгоритмы приема цифровых сигналов в каналах с помехами. [Электронный ресурс] – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/optimalnye-algoritmy-priema-tsifrovyyh-signalov-v-kanalah-s-pomehami/viewer>
2. Каюков И.В., Манелис В.Б. Квазикогерентный прием многолучевого сигнала с прерывистым пилот-сигналом в мобильных системах связи // Цифровая обработка сигналов. 2003. № 1. С. 11-16.
3. Камаев Д.Ш. Оценивание квадратурных составляющих в системах мобильной связи с пилот-сигналами // 60-я Научная сессия, посвященная Дню радио, г. Москва РНТОРЭС им. А.С. Попова, 2005. С. 65-69.
4. Белянчиков А. В. Корреляционные функции авторегрессионных случайных полей с кратными корнями характеристических уравнений // Современные проблемы проектирования, производства и эксплуатации радиотехнических систем. 2018. С. 158
5. Джеймс У.К. Связь с подвижными объектами в диапазоне СВЧ [пер. с англ. – Под ред. М.С. Ярлыкова, М.В.Чернякова]. – М.: Связь, 1979. – 520 с.
6. Васильев К.К. Оптимальная обработка сигналов в дискретном времени: учеб. пособие. - М.: Радиотехника, 2016. - 288 с.

ANALYSIS OF RECOVERY OF SQUARE COMPONENTS FROM PILOT SIGNALS

© 2021 K.V. Komarova

Mordovia State University named after N.P. Ogarev, Saransk, Russia

The problem of restoring quadrature components from pilot signals in multi-frequency communication systems is considered. To find the variance of the error in estimating quadrature components, the Kalman filtering methods and autoregressive processes of the 1st and 2nd order are used.

Keywords: correlation function, quadrature components, pilot signals, multi-frequency communication systems, relative error variance.

DOI: 10.37313/1990-5378-2021-23-4-111-115

Ksenia Komarova, Postgraduate Student of the Department of Information and Communication Technologies and Communication Systems, Institute of Electronics and Lighting Engineering. E-mail: kvkomarova10@mail.ru