УДК 517.93, 517.937

К СУЩЕСТВОВАНИЮ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2021 А.В. Данеев[1], А.В. Лакеев[2], В.А. Русанов[2]

[1] Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия
[2] Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия

Статья поступила в редакцию 28.05.2021

Для непрерывной нелинейной бесконечномерной бихевиористической системы (динамической системы Я. Виллемса) проведено функционально-геометрическое изучение необходимых и достаточных условий су-ществования шести нестационарных коэффициентов-операторов модели билинейной дифференциальной реализации этой системы в классе дифференциальных уравнений второго порядка в сепарабельном гиль-бертовом пространстве. Исследован случай, когда моделируемые операторы обременены условием, обеспечивающим вполне непрерывность интегральной формы уравнений реализации в энтропийной постановке.
Ключевые слова: обратные задачи нелинейного системного анализа, билинейная дифференциальная реализация, энтропийный оператор Релея-Ритца, векторная решетка.
DOI: 10.37313/1990-5378-2021-23-4-116-132

Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект: 121041300056-7), а также РФФИ (проект: 19-01-00301).

ВВЕДЕНИЕ

Одна из важнейших задач математического моделирования динамических процессов связана с задачей реализации/идентификации сложных динамических систем [1–3], в том числе, гиперболических [4, 5]. В этом контексте ниже дано строгое обоснование разрешимости задачи вполне непрерывной билинейной дифференциальной реализации второго порядка для континуального пучка непрерывных динамических процессов (модель бихевиористической системы [1]). При этом необходимо отметить, что потребность в построении геометрической теории дифференциальной реализации ощущалась давно; первый содержательный аналитический шаг в этом направлении сделал Колмогоров[1] в связи с развитием общей теории непрерывных однопараметрических групп движений.

Эффективным инструментом, служащим изучению означенных вопросов, является качественная теория *бесконечномерной* дифференциальной реализации, т.е. теория, развитая в конечномерной постановке [6–9], но расширенная до более абстрактных рамок; например, в некоторых пространствах Фреше [10] или в гильбертовых пространствах, полные системы [11, с. 167] которых являются *базисом*[2], что активно использовалось в работах [12–15]. Серьезные аналитические трудности начинаются при переходе к дифференциальной реализации динамических систем с порядком выше первого, в том числе, учет структур гиперболических моделей [16, 17]. В данном контексте актуализируется фактор учета нелинейности

[1] Статья «Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений» (ДАН СССР 1940, т. 26, с. 6–9) с постановкой задачи реализации вида: каковы условия, при которых пучок кривых в гильбертовом пространстве X образует пучок орбит фазового потока на действительной прямой R, т.е. характеризация кривых как орбит движения динамической системы относительно однопараметрической группы преобразований R, действующей в X. При этом, в связи с тем, что для обратных задач нет единого строгого определения [5], то для рассматриваемой нами ниже обратной задачи системного анализа можно сформулировать следующую компактную универсальную форму: пусть Φ – некоторый фиксированный класс операторов (в нашем положении – дифференциальных моделей), действующих из функционального пространства X в функциональное пространство Y и пусть задано семейство $\{x_\gamma, y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X\times Y$, где индексированное множество Γ может иметь как конечную, так и счетную (и даже континуальную) мощность. В данной постановке нужно найти аналитические условия (желательно необходимые и достаточные) существования некоторого оператора $F\in\Phi$, такого, что $Fx_\gamma = y_\gamma$ для всех $\gamma\in\Gamma$; именно данная теоретико-множественная трактовка обратной задачи (применительно к динамическим системам) имеет место ниже.

[2] Говорят [11, с. 514], что последовательность $\{x_n\}$ элементов банахова пространства X является *базисом* в X, если каждый элемент $x\in X$ *однозначно* раскладывается в ряд $x=\Sigma_{n=1,...} r_n x_n$, $r_n\in R$, сходящийся по норме пространства X; существуют [11, с. 514] сепарабельные рефлексивные банаховы пространства без *свойства аппроксимации* (когда любой компактный оператор есть равномерный предел операторов конечного ранга), а следовательно, и без базиса.

Данеев Алексей Васильевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Информационные системы и защита информации». E-mail: daneev@mail.ru
Лакеев Анатолий Валентинович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник. E-mail: lakeyev@mail.ru
Русанов Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник. E-mail: v.rusanov@mail.ru

моделируемой динамики, в частности, учет билинейных структур [18] в *неавтономных* уравнениях дифференциальной реализации, на чем и акцентируется основное внимание в данной статье, попутно развивая энтропийный аспект [6] данной теории.

1. ТЕРМИНОЛОГИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Далее $(X,\|\cdot\|_X)$, $(Y,\|\cdot\|_Y)$, $(Z,\|\cdot\|_Z)$ – вещественные сепарабельные гильбертовы пространства (предгильбертовость задают нормы $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$, $\|\cdot\|_X$), $U=X\times X\times Y\times Z\times Z\times Z$ – декартово произведение с нормой $\|\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot\|_U=(\|\cdot\|_X^2+\|\cdot\|_X^2+\|\cdot\|_Y^2+\|\cdot\|_Z^2+\|\cdot\|_Z^2+\|\cdot\|_Z^2)^{1/2}$ (превращающей $(U,\|\cdot\|_U)$ в гильбертово пространство [11, с. 162]), $L(Y,X)$ – банахово пространство (с операторной нормой) всех линейных непрерывных операторов, действующих из пространства Y в X (аналогично будем вводить $L(\cdot,\cdot)$ для любых двух фиксированных банаховых пространств), $\mathfrak{L}(X^2,Z)$ – пространство всех непрерывных билинейных отображений [11, с. 646] из декартова квадрата $X\times X$ в Z.

Обозначим через T отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ, через $\wp_\mu$ – σ-алгебру всех μ-измеримых подмножеств из T; далее понадобятся μ-отношения на T, поэтому введем для них спецсимволы $\cdot=\cdot,\ \cdot\neq\cdot,\ \cdot\geq\cdot,\cdot\leq\cdot$ для равенства, неравенства и упорядочений μ-почти всюду в T, запись $S\cdot\subseteq\cdot Q$ для $S,\ Q\in\wp_\mu$ означает $\mu(S\setminus Q)=0$. Сверх того примем, что $AC^1(T,X)$ – линейное множество всех функций $\varphi:T\to X$, первая производная которых является абсолютно непрерывной на интервале T функцией (относительно меры μ). Далее, пусть $(\mathbf{B},\|\cdot\|_{\mathbf{B}})$ – некоторое банахово пространство. Через $\mathrm{L}_p(T,\mathbf{B}), 1\leq p\leq\infty$ будем обозначать фактор-пространства Лебега [19, с. 52] всех классов μ-эквивалентности отображений $f:T\to\mathbf{B}$ с нормой $\int_T\|f(\tau)\|_{\mathbf{B}}^p\mu(d\tau))^{1/p}<\infty$, если $1\leq p<\infty$, и $\operatorname{ess\,sup}_T\|f(t)\|_{\mathbf{B}}<\infty$ при $p=\infty$. В данном контексте примем вспомогательные обозначения:

$$\mathbf{\Pi}:=AC^1(T,X)\times\mathrm{L}_2(T,Y)\times\mathrm{L}_2(T,Z)\times\mathrm{L}_2(T,Z)\times\mathrm{L}_2(T,Z),$$

$$\mathbf{L}_2:=\mathrm{L}_2(T,L(X,X))\times\mathrm{L}_2(T,L(X,X))\times\mathrm{L}_2(T,L(Y,X))\times$$
$$\times\mathrm{L}_2(T,L(Z,X))\times\mathrm{L}_2(T,L(Z,X))\times\mathrm{L}_2(T,L(Z,X));$$

ясно, что пространство $\mathbf{L}_2$ (с топологий произведения) изоморфно $\mathrm{L}_2(T,L(U,X))$; условимся любой вектор из $\mathbf{L}_2$ в контексте задачи реализации называть $(A_1,A_0,B_0,B_1,B_2,B_3)_2$-моделью.

Впредь считаем, что фиксированы билинейные отображения $\mathbb{B}_i\in\mathfrak{L}(X^2,Z)$, $i=1,2,3$ и

$$N\subset\{(x,u,\mathbb{B}_1(x,x),\mathbb{B}_2(x,dx/dt),\mathbb{B}_3(dx/dt,dx/dt))\in\mathbf{\Pi}\},\ \mathrm{Card}\,N\leq\exp\aleph_0,\tag{1}$$

поведение исследуемой динамической системы с программным управлением u и позиционными связями $\mathbb{B}_i$, $i=1,2,3$; здесь и далее $\aleph_0$ – алеф нуль, $\exp\aleph_0$ – континуум. При этом для бихевиористической N-системы согласно (1) для любого динамического процесса из N имеет место

$$\mathbb{B}_1(x,x),\ \mathbb{B}_2(x,dx/dt),\ \mathbb{B}_3(dx/dt,dx/dt)\in\mathrm{L}_2(T,Z).$$

Рассмотрим задачу: для бихевиористической N-системы (1) определить необходимые и достаточные условия существования $(A_1,A_0,B_0,B_1,B_2,B_3)_2$-модели, представленной кортежем

$$(A_1,A_0,B_0,B_1,B_2,B_3)\in\mathbf{L}_2,$$

для которого осуществима билинейная дифференциальная реализация (БДР) вида:

$$d^2x/dt^2+A_1dx/dt+A_0x=$$
$$=B_0u+B_1\mathbb{B}_1(x,x)+B_2\mathbb{B}_2(x,dx/dt)+B_3\mathbb{B}_3(dx/dt,dx/dt)\tag{2}$$

$$\forall(x,u,\mathbb{B}_1(x,x),\mathbb{B}_2(x,dx/dt),\mathbb{B}_3(dx/dt,dx/dt))\in N;$$

с учетом леммы 1 [12] в конструкции x-решения следуем [19, с. 418], т.е. равенство в (2) рассматривается как тождество в $\mathrm{L}_1(T,X)$. Ниже данную постановку обременим условием, обеспечивающим вполне непрерывность (см. определение 3) интегральной формы БДР-модели (2).

2. РЕДУКЦИЯ БДР-ПРОБЛЕМЫ К ЗАДАЧЕ M_2-ПРОДОЛЖИМОСТИ

Переобозначим (в целях удобства) гильбертово пространство $\mathrm{L}_2(T,U)$ через H_2; ясно, что, в соответствии с ранее введенными конструкциями, норма в пространстве H_2 имеет вид:

$$\|(g,w,v,q,s,h)\|_H :=$$
$$=(\int_T(\|g(\tau)\|_X^2+\|w(\tau)\|_X^2+\|v(\tau)\|_Y^2+\|q(\tau)\|_Z^2+\|s(\tau)\|_Z^2+\|h(\tau)\|_Z^2)\mu(d\tau))^{1/2}.$$

Пусть $L(H_2,X)$ – пространство всех линейных непрерывных операторов с операторной нормой $\|\cdot\|_{L(H,X)}$, действующих из пространства H_2 в пространство X. Теперь для фиксированной (некоторым образом) упорядоченной системы оператор-функций $(D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6)\in\mathbf{L}_2$ введем в рассмотрение линейный оператор $\xi\in L(H_2,X)$, имеющий аналитическое представление

$$\xi(g,w,v,q,s,h):=$$
$$=\int_T(D_1(\tau)g(\tau)+D_2(\tau)w(\tau)+D_3(\tau)v(\tau)+D_4(\tau)q(\tau)+D_5(\tau)s(\tau)+D_6(\tau)h(\tau))\mu(d\tau). \quad (3)$$

Далее пространство $(X,\|\cdot\|_X)$ является локально выпуклым, следовательно (поскольку сопряженное пространство для X разделяет точки в X), линейный оператор $\mathbf{\Gamma}:\mathbf{L}_2\to L(H_2,X)$, осуществляющий согласно формулы (3) соответствие, определяемое как

$$(D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6)\mapsto\mathbf{\Gamma}(D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6)=\xi,$$

является взаимно-однозначным ($\operatorname{Ker}\mathbf{\Gamma}=\{0\}$), что позволяет относительно свойств оператора $\mathbf{\Gamma}$ утверждать значительно больше (см. ниже предложение 1) в предположении, что линейное многообразие оператор-функций $\mathbf{L}_2$ наделено структурой топологии, индуцированной нормой

$$\|(D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6)\|_{\mathrm{L}}:=$$
$$=(\int_T(\|D_1(\tau)\|_{L(X,X)}^2+\|D_2(\tau)\|_{L(X,X)}^2+\|D_3(\tau)\|_{L(Y,X)}^2+\|D_4(\tau)\|_{L(Z,X)}^2+\|D_5(\tau)\|_{L(Z,X)}^2+\|D_6(\tau)\|_{L(Z,X)}^2)\mu(d\tau))^{1/2};$$

ясно, что пара $(\mathbf{L}_2,\|\cdot\|_{\mathrm{L}})$ образует банахово пространство.

Следующий важный результат понадобится позднее при доказательстве теоремы 1.

Предложение 1. *Оператор* $\mathbf{\Gamma}$ *– суть линейный гомеоморфизм.*

Доказательство. Пусть $(D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6)\in\mathbf{L}_2$, тогда нетрудно обнаружить, что

$$\|\mathbf{\Gamma}(D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6)\|_{L(H,X)}=$$
$$=\sup\{\|\int_T(D_1(\tau)g(\tau)+D_2(\tau)w(\tau)+D_3(\tau)v(\tau)+D_4(\tau)q(\tau)+D_5(\tau)s(\tau)+D_6(\tau)h(\tau))\mu(d\tau)\|_X:$$
$$\|(g,w,v,q,s,h)\|_H\le1\}\le\sup\{\int_T(\|D_1(\tau)g(\tau)\|_X+\|D_2(\tau)w(\tau)\|_X+\|D_3(\tau)v(\tau)\|_X+\|D_4(\tau)q(\tau)\|_X+$$
$$+\|D_5(\tau)s(\tau)\|_X+\|D_6(\tau)h(\tau)\|_X)\mu(d\tau):\ \|(g,w,v,q,s,h)\|_H\le1\}\le$$
$$\le\sup\{\int_T(\|D_1(\tau)\|_{L(X,X)}\|g(\tau)\|_X+\|D_2(\tau)\|_{L(X,X)}\|w(\tau)\|_X+\|D_3(\tau)\|_{L(Y,X)}\|v(\tau)\|_Y+$$

$$+\| D_4(\tau)\|_{L(Z,X)}\| q(\tau)\|_Z + \| D_5(\tau)\|_{L(Z,X)}\| s(\tau)\|_Z + \| D_6(\tau)\|_{L(Z,X)}\| h(\tau)\|_Z)\mu(d\tau):$$

$$\|(g,w,v,q,s,h)\|_H \le 1\} \le (\int_T (\|D_1(\tau)\|^2_{L(X,X)}\mu(d\tau))^{1/2} + \|D_2(\tau)\|^2_{L(X,X)}\mu(d\tau))^{1/2} + \|D_3(\tau)\|^2_{L(Y,X)}\mu(d\tau))^{1/2} +$$

$$+\|D_4(\tau)\|^2_{L(Z,X)}\mu(d\tau))^{1/2} + \|D_5(\tau)\|^2_{L(Z,X)}\mu(d\tau))^{1/2} + \|D_6(\tau)\|^2_{L(Z,X)}\mu(d\tau))^{1/2})\mu(d\tau))^{1/2} \le$$

$$\le (1+1+1)^{1/2}\|(D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6)\|_{\mathbf{L}} \Rightarrow \text{ оператор } \mathbf{\Gamma} \text{ непрерывный.}$$

Поскольку $\operatorname{Ker}\mathbf{\Gamma} = \{0\} \subset \mathbf{L}_2$ (см. установление этого геометрического факта выше), то для доказательства гомеоморфизма оператора $\mathbf{\Gamma}$ достаточно (следствие теоремы Банаха об открытом отображении [20, с. 114]) показать, что $\operatorname{Im}\mathbf{\Gamma} = L(H_2, X)$; далее X^*, $L(H_2,X)^*$ – сопряженные пространства, соответственно, для введенных ранее пространств $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(L(H_2,X), \|\cdot\|_{L(H,X)})$.

Вначале покажем, что образ $\operatorname{Im}\mathbf{\Gamma}$ всюду плотен в $L(H_2,X)$. Пусть ξ – оператор из $L(H_2,X)$ такой, что $\xi \notin$ «*замыкание* $\operatorname{Im}\mathbf{\Gamma}$». Покажем, что для оператора ξ справедливо высказывание: *для любого* $f \in L(H_2,X)^*$, *такого, что* $f(\xi) > 0$ *найдется* $\xi \in \operatorname{Im}\mathbf{\Gamma}$, *при котором* $f(\xi) \ne 0$; тогда утверждение «*замыкание* $\operatorname{Im}\mathbf{\Gamma}$ *совпадает с* $L(H_2,X)$» – суть следствие теоремы 3 (Мазур) [20, с. 157].

В самом деле, пусть $l \in X^*$ и $(g',w',v',q',s',h') \in H_2$ выбраны из расчета $l(\xi(g',w',v',q',s',h')) > 0$. Тогда, найдется упорядоченная система оператор-функций $(D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6) \in \mathbf{L}_2$, для которой справедливо следующее суждение, выраженное цепочкой следующих соответствий:

$$l(\int_T (D_1(\tau)g'(\tau) + D_2(\tau)w'(\tau) + D_3(\tau)v'(\tau) + D_4(\tau)q'(\tau) + D_5(\tau)s'(\tau) + D_6(\tau)h'(\tau))\mu(d\tau)) =$$

$$= \int_T (l(D_1(\tau)g'(\tau)) + l(D_2(\tau)w'(\tau)) + l(D_3(\tau)v'(\tau)) + l(D_4(\tau)q'(\tau)) +$$

$$+ l(D_5(\tau)s'(\tau)) + l(D_6(\tau)h'(\tau)))\mu(d\tau) \ne 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f := (l,(g',w',v',q',s',h')) \in L(H_2,X)^*, \;\; f(\xi) > 0, \;\; f(\mathbf{\Gamma}(D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6)) \ne 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \textit{образ } \operatorname{Im}\mathbf{\Gamma} \textit{ всюду плотен в } L(H_2,X).$$

Теперь, возвращаясь к основной линии изложения, для равенства $\operatorname{Im}\mathbf{\Gamma} = L(H_2,X)$ достаточно установить (см. теорему 1 [11, с. 450]) непрерывность левого обратного оператора $\mathbf{\Gamma}^{-1}$, а поскольку линейное многообразие $\operatorname{Im}\mathbf{\Gamma}$ (с топологией, индуцированной из $L(H_2,X)$) – пространство с первой аксиомой счетности, то довольно показать, что оператор $\mathbf{\Gamma}^{-1} : \operatorname{Im}\Gamma \to \mathbf{L}_2$ ограниченный.

Зафиксируем в $\operatorname{Im}\mathbf{\Gamma}$ шар S_r радиуса r (с центром в нуле). Тогда для любой пары

$$(\Lambda,(g,w,v,q,s,h)) \in \mathrm{L}_1(T,X)^* \times H_2,$$

где $(g,w,v,q,s,h) \ne 0$, учтя факт $\mathrm{L}_1(T,X)^* = \mathrm{L}_\infty(T,X^*)$ (теорема 22.N [19, с. 70]) и следствие 1 [20, с. 191], несложно установить, что будет выполняться цепочка следующих отношений

$$(D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6) \in \mathbf{\Gamma}^{-1}(S_r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(\int_T \langle \Lambda(\tau),(D_1(\tau)g(\tau) + D_2(\tau)w(\tau) + D_3(\tau)v(\tau) + D_4(\tau)q(\tau) + D_5(\tau)s(\tau) + D_6(\tau)h(\tau))\rangle \mu(d\tau))| \le$$

$$\le \|\Lambda\|_\infty \int_T \|D_1(\tau)g(\tau) + D_2(\tau)w(\tau) + D_3(\tau)v(\tau) + D_4(\tau)q(\tau) + D_5(\tau)s(\tau) + D_6(\tau)h(\tau)\|_X \,\mu(d\tau) \le$$

$$\le \|\Lambda\|_\infty \|(g,w,v,q,s,h)\|_H^{-1} \sup\{\|\int_T (D_1(\tau)g(\tau) + D_2(\tau)w(\tau) + D_3(\tau)v(\tau) + D_4(\tau)q(\tau) + D_5(\tau)s(\tau) +$$

$$+ D_6(\tau)h(\tau))\mu(d\tau)\|_X : \|(g,w,v)\|_H \le 1\} = \|\Lambda\|_\infty \|(g,w,v,q,s,h)\|_H^{-1} \|\mathbf{\Gamma}(D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6)\|_{L(H,X)} \le$$

$$\le r\|\Lambda\|_\infty \left\|(g,w,v,q,s,h)\right\|_H^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \textit{множество } \mathbf{\Gamma}^{-1}(S_r) \textit{ слабо ограничено в пространстве } \mathbf{L}_2;$$

здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – каноническая билинейная форма, устанавливающая двойственность между X и X^*, $\|\cdot\|_\infty$ – норма в $\mathrm{L}_\infty(T,X^*)$. В силу теоремы 4 [11, с. 288] множество $\mathbf{\Gamma}^{-1}(S_r)$ ограничено по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{L}}$. ■

Определение 1. *Линейное отображение $M: H_2 \to \mathrm{L}_1(T,X)$ назовем M_2-оператором, если*

$$\exists (D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6)\in \mathbf{L}_2 : M(g,w,v,q,s,h) :=$$
$$= D_1g + D_2w + D_3v + D_4q + D_5s + D_6h \quad \forall (g,w,v,q,s,h)\in H_2.$$

Предложение 2. *Класс всех M_2-операторов является собственным в $L(H_2,\mathrm{L}_1(T,X))$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть на интервале T следующие μ-отношения:

$$\|M(g,w,v,q,s,h)(t)\|_X \cdot\le\cdot$$
$$\cdot\le\cdot \|D_1(t)\|_{L(X,X)}\|g(t)\|_X + \|D_2(t)\|_{L(X,X)}\|w(t)\|_X + \|D_3(t)\|_{L(Y,X)}\|v(t)\|_Y +$$
$$+\|D_4(t)\|_{L(Z,X)}\|q(t)\|_Z + \|D_5(t)\|_{L(Z,X)}\|s(t)\|_Z + \|D_6(t)\|_{L(Z,X)}\|h(t)\|_Z \cdot\le\cdot$$
$$\cdot\le\cdot (\|D_1(t)\|^2_{L(X,X)} + \|D_2(t)\|^2_{L(X,X)} + \|D_3(t)\|^2_{L(Y,X)} + \|D_4(t)\|^2_{L(Z,X)} + \|D_5(t)\|^2_{L(Z,X)} + \|D_6(t)\|^2_{L(Z,X)})^{1/2}\times$$
$$\times(\|g(t)\|^2_X + \|w(t)\|^2_X + \|v(t)\|^2_Y + \|q(t)\|^2_Z + \|s(t)\|^2_Z + \|h(t)\|^2_Z)^{1/2};$$

здесь воспользовались неравенством Коши–Буняковского. Теперь проинтегрируем на T данные μ-отношения, после чего применим интегральное неравенство Коши–Буняковского.

Само собой разумеется, далеко не всякий $L(H_2,\mathrm{L}_1(T,X))$-оператор является M_2-оператором (см. ниже поясняющую сноску 3), доказательство на этом завершается. ■

Определение 2. *Пусть фиксировано подмножество $V\subset H_2$. Тогда заданный линейный оператор $M^\#:\mathrm{Span}\,V\to \mathrm{L}_1(T,X)$ назовем M_2-продолжимым, если $M^\#$ допускает линейное распространение до некоторого M_2-оператора M, т.е.*

$$\exists (D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6)\in \mathbf{L}_2 : M(g,w,v,q,s,h) =$$
$$= D_1g + D_2w + D_3v + D_4q + D_5s + D_6h \quad \forall (g,w,v,q,s,h)\in H_2,\ M\,|\,\mathrm{Span}\,V = M^\#.$$

(В силу предложения 2 M_2-продолжимость влечет непрерывное распространение оператора $M^\#$.)

Лемма 1. *БДР-задача* (2) *разрешима в том и только том случае, если оператор*

$$(g,w,v,q,s,h)\mapsto M^\#(g,w,v,q,s,h) := d^2w/dt^2,$$
$$(g,w,v,q,s,h)\in \mathrm{Span}\{(dw/dt,w,v,q,s,h):(w,v,q,s,h)\in N\}$$

является M_2-продолжимым.

Доказательство. Лемма прозрачна, если в определениях 1, 2 принять

$$(D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6) = (A_1,A_0,B_0,B_1,B_2,B_3),\ V = N,$$

а также в силу леммы 1 [12] (т.е. $M^\#(g,w,v,q,s,h)\in \mathrm{L}_1(T,X)$) и того очевидного факта, что знак = в дифференциальном уравнении (2) допускает установку (при соответствующей смене знаков ± перед оператор-функциями $(A_1,A_0,B_0,B_1,B_2,B_3)\in \mathbf{L}_2$ в любое место «внутри» этой формулы.

3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПРИЗНАК M_2-ПРОДОЛЖИМОСТИ

В этом разделе продолжим изучение M_2-операторов, начав с разработки необходимого аппарата. С этой целью для $S\in \wp_\mu$ рассмотрим оператор $P_{S,\mathrm{L}}:\mathrm{L}_1(T,X)\to \mathrm{L}_1(T,X)$, задаваемый

$$t\in S \Rightarrow P_{S,\mathrm{L}}(y)(t) := y(t)\in X,$$

$$t \in T \setminus S \Rightarrow P_{S,\mathrm{L}}(y)(t) := 0 \in X.$$

Замечание 1. Оператор $P_{S,\mathrm{L}}$ по существу есть линейный проектор $P_{S,\mathrm{L}}{}^2 = P_{S,\mathrm{L}}$, при этом пространство $\mathrm{L}_2(T,X) \subset \mathrm{L}_1(T,X)$ инвариантно относительно действий проектора $P_{S,\mathrm{L}}$. Подобное построение делает корректным рассмотрение аналогичного линейного оператора $P_{S,H} : H_2 \to H_2$, построенного по описанному выше функциональному правилу как «шаблону-образцу».

Теорема 1. *Пусть* $E \subset H_2$ *– некоторое линейное многообразие, инвариантное относительно проекторов* $\{P_{S,H} : S \in \wp_\mu\}$ *и* $M^* : E \to \mathrm{L}_1(T,X)$ *– линейный непрерывный оператор. Тогда* M^* *будет* M_2*-продолжимым, если и только если для всех подмножеств* $S \in \wp_\mu$ *и каждого* $y \in E$ *будет*

$$M^* \circ P_{S,H}(y) = P_{S,\mathrm{L}} \circ M^*(y), \tag{4}$$

что означает для всех подмножеств $S \in \wp_\mu$ *коммутативность следующей диаграммы*:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{M^*} & \mathrm{L}_1(T,X) \\ \downarrow P_{S,H} & & \downarrow P_{S,\mathrm{L}} \\ E & \xrightarrow[M^*]{} & \mathrm{L}_1(T,X) \end{array}$$

Доказательство. (Необходимость.) Если M – M_2-оператор, продолжающий M^*, то условие «коммутативности» (4) получаем непосредственно (для любых $y = (g,w,v,q,s,h) \in E$ и $S \in \wp_\mu$):

$$D_1\chi_s g + D_2\chi_s w + D_3\chi_s v + D_4\chi_s q + D_5\chi_s s + D_6\chi_s h =$$
$$= \chi_s(D_1 g + D_2 w + D_3 v + D_4 q + D_5 s + D_6 h),$$

где $(D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6) \in \mathbf{L}_2$ определяет конструкцию M_2-оператора M, χ_s – характеристическая функция подмножества S. Покажем обратное (установление свойства (4), как достаточных).

Пусть условие (4) выполнено. Рассмотрим линейный оператор $\xi^* : E \to X$ вида:

$$\xi^*(y) := \int_T M^*(y)(\tau)\mu(d\tau), \ y \in E.$$

Так как оператор M^* непрерывный, то непрерывным будет и ξ^*. Далее, пусть $\xi : H_2 \to X$ – непрерывное продолжение ξ^* на H_2; действительно, существует продолжение ξ_+ на замыкание $[E]$ (теорема 2 [11, с. 245]), тогда $\xi = \xi_+ \circ \mathrm{P}_{[E]}$, где $\mathrm{P}_{[E]}$ – непрерывный проектор из H_2 в $[E]$. Здесь учли, что подпространства в H_2 дополняемы (в данном контексте см. ниже уточняющее замечание 3), и при этом любой проектор является ограниченным оператором (в силу теоремы 2 [20, с. 122]).

На основании предложения 1 найдется набор $(D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6) \in \mathbf{L}_2$, для которого

$$\xi(g,w,v,q,s,h) = \int_T (D_1(\tau)g(\tau) + D_2(\tau)w(\tau) + D_3(\tau)v(\tau) + D_4(\tau)q(\tau) + D_5(\tau)s(\tau) + D_6(\tau)h(\tau))\,\mu(d\tau)$$
$$\forall (g,w,v,q,s,h) \in H_2.$$

В итоге, используя условие (4), для каждой вектор-функции $y = (g,w,v,q,s,h) \in E$ и любого подмножества $S \in \wp_\mu$ получаем следующее «$\Rightarrow$»-утверждение:

$$\int_S M^*(y)(\tau)\mu(d\tau) = \int_T P_{S,\mathrm{L}} \circ M^*(y)(\tau)\mu(d\tau) = \int_T M^* \circ P_{S,H}(y)(\tau)\mu(d\tau) =$$
$$= \xi^* \circ P_{S,H}(y) = \xi \circ P_{S,H}(y) =$$
$$= \int_T (D_1(\tau)\chi_s(\tau)g(\tau) + D_2(\tau)\chi_s(\tau)w(\tau) + D_3(\tau)\chi_s(\tau)v(\tau) +$$
$$+ D_4(\tau)\chi_s(\tau)q(\tau) + D_5(\tau)\chi_s(\tau)s(\tau) + D_6(\tau)\chi_s(\tau)h(\tau))\mu(d\tau) =$$

$$=\int_S (D_1(\tau)\chi_s(\tau)g(\tau)+D_2(\tau)\chi_s(\tau)w(\tau)+D_3(\tau)\chi_s(\tau)v(\tau)+$$

$$+D_4(\tau)\chi_s(\tau)q(\tau)+D_5(\tau)\chi_s(\tau)s(\tau)+D_6(\tau)\chi_s(\tau)h(\tau))\mu(d\tau)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_S (M^*(y)(\tau)-D_1(\tau)\chi_s(\tau)g(\tau)+D_2(\tau)\chi_s(\tau)w(\tau)+D_3(\tau)\chi_s(\tau)v(\tau)+$$

$$+D_4(\tau)\chi_s(\tau)q(\tau)+D_5(\tau)\chi_s(\tau)s(\tau)+D_6(\tau)\chi_s(\tau)h(\tau))\mu(d\tau)=0.$$

Известно (см. (3) [20, с. 32] и теорему 1 [20, с. 190]), что если интеграл Бохнера от суммируемой на T вектор-функции равен нулю (нулевому вектору) на любом подмножестве $S\in\wp_\mu$, то она сама равна нулю μ-почти всюду на интервале T. Следовательно, имеет место

$$M^*(y)(t)\cdot=\cdot D_1(t)\,g(t)+D_2(t)\,w(t)+D_3(t)v(t)+D_4(t)\,q(t)+D_5(t)s(t)+D_6(t)\,h(t)$$

и, таким образом, приходим к окончательному равенству:

$$M^*(g,w,v,q,s,h)=D_1\,g+D_2\,w+D_3\,v+D_4\,q+D_5\,s+D_6\,h\ \ \forall(g,w,v,q,s,h)\in E. \ \blacksquare$$

С учетом предложения 2 по существу получаем новую редакцию[3] определения 1.

Следствие 1. *Линейный оператор* $M:H_2\to \mathrm{L}_1(T,X)$ *является* M_2*-оператором в том и только в том случае, если* $M\in L(H_2,\mathrm{L}_1(T,X))$ *и при любом* $S\in\wp_\mu$ *имеет место*

$$M\circ P_{S,H}=P_{S,\mathrm{L}}\circ M.$$

Пусть $V\subset H_2$ и $M^{\#}:\ \mathrm{Span}\,V\to \mathrm{L}_1(T,X)$ – некоторый линейный оператор. Для того, чтобы с помощью теоремы 1 получить компактный и действенный (конструктивный) характеристический критерий линейно-непрерывной продолжимости оператора $M^{\#}$ до некоторого M_2-оператора, необходимо, как нетрудно понять, последовательно решить следующие аналитические задачи:

– расширить линейную оболочку $\mathrm{Span}\,V$ до минимального объемлющего линейного многообразия $E\subset H_2$, инвариантного относительно семейства проекторов $\{P_{S,H}:S\in\wp_\mu\}$;

– построить для оператора $M^{\#}$ его линейное расширение M^* на многообразие E (см. предыдущую задачу) и показать непрерывность оператора $M^*:E\to \mathrm{L}_1(T,X)$;

– проверить для линейного расширения M^* выполнение условия (4).

Условия разрешимости двух последних задач ниже покажет (и прояснит) теорема 2, тогда как геометрическое решение первой задачи – это предмет анализа следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть* $V\subset H_2$ *и* $E=\mathrm{Span}\{P_{S,H}(y):S\in\wp_\mu,\,y\in\mathrm{Span}\,V\}$, *тогда*

(i) E *– наименьшее линейное множество в* H_2, *содержащее* $\mathrm{Span}\,V$ *и инвариантное относительно семейства проекторов* $\{P_{S,H}:S\in\wp_\mu\}$;

[3] Данная редакция определения M_2-операторов позволяет построить оператор $M\in L(H_2,\mathrm{L}_1(T,X))$, не являющегося M_2-оператором. Для этого выберем $\varphi\in \mathrm{L}_1(T,R)$ с $\mathrm{supp}\,\varphi=T$ ($\mathrm{supp}\,\varphi$ – носитель функции φ [11, с. 137]), и пусть ξ – некоторый ненулевой оператор из $L(H_2,X)$. Далее, пусть $(h,t)\mapsto M(h)(t):=\varphi(t)\xi(h)$, $(h,t)\in H_2\times T$. Теперь рассмотрим вектор-функцию $h\in H_2$, для которой $\xi(h)\neq 0$, $\mu(\mathrm{supp}\,h)<\mu(T)$. Тогда для $S=T\setminus\mathrm{supp}\,h$ имеет место

$$0=M\circ P_{S,H}(h)\neq P_{S,\mathrm{L}}\circ M(h)\neq 0,$$

где $P_{S,H}$, $P_{S,\mathrm{L}}$ – проекторы из формулы (4), индуцированные подмножеством S. Таким образом, приходим к заключению, что оператор $M\in L(H_2,\mathrm{L}_1(T,X))$ не удовлетворяет следствию 1; этот результат актуализирует предложение 2.

(ii) *для любого* $y\in E$ *найдется такое натуральное число* k, *что для него и вектора* y *можно определить такое семейство множеств* $\{S_i\}_{i=1,\dots,k}\subset\wp_\mu$ *и набор векторов* $\{y_i\}_{i=1,\dots,k}\subset \mathrm{Span}\,V$, *что*

$$S_i\cap S_j=\varnothing,\ i\neq j\ (i,j=1,\dots,k),$$

$$y=\sum\nolimits_{i=1,\dots,k}P_{S_i,H}(y_i).$$

Замечание 2. В геометрическом разложении $y=\sum_{i=1,\dots,k}P_{S_i,H}(y_i)$ можно считать, что объединение $\cup_{i=1,\dots,k}S_i$ исчерпывает весь интервал T, поскольку, если $\cup_{i=1,\dots,k}S_i$ – собственное подмножество в T, то, обозначив через S_{k+1} множество $T\setminus\cup_{i=1,\dots,k}S_i$ и приняв $y_{k+1}=0$, получаем разложение $y=\sum_{i=1,\dots,k+1}P_{S_i,H}(y_i)$, $\cup_{i=1,\dots,k+1}S_i=T$; т.е. в представлении вектора y суммой $\sum_{i=1\dots,k}P_{S_i,H}(y_i)$ конечный набор подмножеств $S_1,\dots,S_k$ образует дизъюнктное разбиение промежутка времени T.

Доказательство леммы 2. (i) Инвариантность (а с ней и минимальность, как линейного множества) E следует из вполне прозрачного равенства для композиций

$$P_{S^*,H}\circ P_{S^{**},H}=P_{S^*\cap S^{**},H}.$$

(ii) Доказательство этого утверждения проведем индукцией по числу k в следующем представлении $y\in E$, $y=\sum_{i=1,\dots,k}P_{S_i,H}(y_i)$, $S_i\in\wp_\mu$, $y_i\in\mathrm{Span}\,V$.

Индуктивный шаг. Рассмотрим сумму

$$\sum\nolimits_{i=1,\dots,k}P_{S_i,H}(y_i)+P_{S^*,H}(y^*),$$

$$S_i\cap S_j=\varnothing,\ i\neq j\ (i,j=1,\dots,k),\ y_i,y^*\in\mathrm{Span}\,V.$$

Положим $S_i':=S^*\cap S_i$, $S_i'':=S_i\setminus S^*$, $S''':=S^*\setminus\cup_{i=1,\dots,k}S_i$. Тогда множества S_i',S_i'',S''' попарно дизъюнктные и $S_i=S_i'\cup S_i''$, $S^*=S'''\cup(\cup_{i=1,\dots,k}S_i')$. Поэтому

$$P_{S_i,H}(y_i)=P_{S_i',H}(y_i)+P_{S_i'',H}(y_i),\ \ P_{S^*,H}(y^*)=\sum\nolimits_{i=1,\dots,k}P_{S_i',H}(y^*)+P_{S''',H}(y^*).$$

Последние соотношения позволяют завершить доказательство. Итак, окончательно имеем

$$\sum\nolimits_{i=1,\dots,k}P_{S_i,H}(y_i)+P_{S^*,H}(y^*)=$$
$$=\sum\nolimits_{i=1,\dots,k}(P_{S_i',H}(y_i)+P_{S_i'',H}(y_i)+P_{S_i',H}(y^*))+P_{S''',H}(y^*)=$$
$$=\sum\nolimits_{i=1,\dots,k}(P_{S_i',H}(y_i+y^*)+P_{S_i'',H}(y_i))+P_{S''',H}(y^*).\ \blacksquare$$

Хотя это и не было явно сказано, но доказательство леммы 2 по существу опиралось исключительно на структуру линейной оболочки, натянутой на $\{P_{S,H}(y):S\in\wp_\mu,\ y\in\mathrm{Span}V\}$. Это любопытно, хотя и не очень важно, важно другое, – предшествующая лемма совместно с теоремой 1 позволяют дать весьма компактную формулировку характеризации условий M_2-продолжимости.

Теорема 2. *Пусть* $V\subset H_2$ *и* $M^\#:\mathrm{Span}\,V\to \mathrm{L}_1(T,X)$ *– некоторый линейный оператор. Тогда для* M_2*-продолжимости* $M^\#$ *необходимо и достаточно, чтобы в* $\mathrm{L}_2(T,R)$ *нашлась такая функция* $t\mapsto\varphi(t)\cdot\geq\cdot 0$, *что на интервале* T *для всех* $y\in\mathrm{Span}\,V$ *имеем* μ*-отношение*

$$\|M^\#(y)(t)\|_X\cdot\leq\cdot\varphi(t)\|y(t)\|_U. \tag{5}$$

Доказательство. (*необходимо*, $\Rightarrow$). Если линейный оператор

$$(g,w,v,q,s,h)\mapsto M(g,w,v,q,s,h):=D_1\,g+D_2\,w+D_3\,v+D_4\,q+D_5\,s+D_6\,h$$

представляет некоторый M_2-оператор, продолжающий $M^\#$, то для любой вектор-функции

$$y=(g,w,v,q,s,h)\in\mathrm{Span}\,V$$

на интервале T выполняются соотношения

$$\| M^{\#}(y)(t) \|_X = \| M(t) y(t) \|_X \le \varphi(t) \| y(t) \|_U ,$$

$$t \mapsto \varphi(t) = 3^{1/2} (\| D_1(t) \|^2_{L(X,X)} | + \| D_2(t) \|^2_{L(X,X)} + \| D_3(t) \|^2_{L(Y,X)} +$$

$$+ \| D_4(t) \|^2_{L(Z,X)} + \| D_5(t) \|^2_{L(Z,X)} + \| D_6(t) \|^2_{L(Z,X)})^{1/2};$$

ясно, что неотрицательная функция $\varphi(\cdot)$ принадлежит классу $\mathrm{L}_2(T,R)$.

(*достаточно*, $\Leftarrow$). Пусть $E \subset H$ – линейное многообразие из формулировки леммы 2. Рассмотрим линейный оператор $M^* : E \to \mathrm{L}_1(T,X)$, действующий в соответствии с представлением

$$M^*(y) := \sum\nolimits_{i=1,\dots,k} P_{S_i,\mathrm{L}} \circ M^{\#}(y_i),$$

где вектор-функции $y, y_i \in E$ и подмножества $S_i \in \wp_\mu$, $i = 1,\dots,k$ в силу леммы 2 и замечания 2 связаны следующими конструкциями:

$$y = \sum\nolimits_{i=1,\dots,k} P_{S_i,H}(y_i),\ y_i \in \operatorname{Span} V,$$

$$\cup_{i=1,\dots,k} S_i = T,\ \ S_i \cap S_j = \varnothing,\ i \ne j\ (i,j = 1,\dots,k).$$

Остается показать, что линейный оператор M^* определен корректно, т.е. его значение от любой вектор-функции $y \in E$ не зависит от представления $y = \sum\nolimits_{i=1,\dots,k} P_{S_i,H}(y_i)$.

Пусть $y \in E$ и $y = \sum\nolimits_{i=1,\dots,k} P_{S_i,H}(y_i) = \sum\nolimits_{j=1,\dots,r} P_{S_j,H}(y_j)$, где $\{S_i\}_{i=1,\dots,k}$ и $\{S_j\}_{j=1,\dots,r}$ – некоторые фиксированные дизъюнктные разбиения интервала T, а $y_i, y_j \in \operatorname{Span} V$, $1 \le i \le k$, $1 \le j \le r$. Тогда семейство подмножеств $\{S_{ij} : S_{ij} = S_i \cap S_j, 1 \le i \le k, 1 \le j \le r\}$ также образует разбиение отрезка T. Далее положим $y_{ij} := y_i - y_j$. Так как $y(t) = y_i(t) = y_j(t), t \in T$, то $y_{ij}(t) = 0$ на каждом подмножестве S_{ij}, поэтому в силу условия (5) будет

$$\| M^{\#}(y_{ij})(t) \|_X \le \varphi(t) \| y_{ij}(t) \|_U = 0,\ t \in S_{ij}$$

и, таким образом, $M^{\#}(y_{ij})(t) = 0, t \in S_{ij}$. Следовательно, $M^{\#}(y_i)(t) = M^{\#}(y_j)(t),\ t \in S_{ij}$. Но в этом случае, обозначив через $t \mapsto z'(t) := \sum\nolimits_{i=1,\dots,k} P_{S_i,\mathrm{L}} \circ M^{\#}(y_i)$ и $t \mapsto z''(t) := \sum\nolimits_{j=1,\dots,r} P_{S_j,\mathrm{L}} \circ M^{\#}(y_j)$, для означенных функций получаем вполне очевидную цепочку равенств

$$z'(t) = M^{\#}(y_i)(t) = M^{\#}(y_j)(t) = z''(t),\ t \in S_{ij}.$$

Учитывая, что система подмножеств $\{S_{ij}\}_{1\le i \le k,\ 1 \le j \le r}$ образует дизъюнктное разбиение интервала T, приходим к заключению, что имеет место соответствие $z'(t) = z''(t),\ t \in T$ и, значит, линейный оператор M^* определен корректно (как искомое расширение оператора $M^{\#}$).

Для того, чтобы доказать непрерывность линейного отображения M^*, очевидно, достаточно проверить, что для оператора M^* справедливо соотношение (5), в этом случае непрерывность оператора M^* следует из интегрального неравенства Коши–Буняковского.

В самом деле, пусть, как и прежде, $y = \sum\nolimits_{i=1,\dots,k} P_{S_i,H}(y_i),\ y_i \in \operatorname{Span} V$, где $\{S_i\}_{i=1,\dots,k}$ – разбиение отрезка T. Тогда из представления $M^*(y) = \sum\nolimits_{i=1,\dots,k} P_{S_i,\mathrm{L}} \circ M^{\#}(y_i)$ следует $M^*(y)(t) = M^{\#}(y_i)(t),\ t \in S_i$. Откуда в силу (5) для функции y_i будет $\| M^*(y)(t) \|_X = \| M^{\#}(y_i)(t) \|_X \le \varphi(t) \| y_i(t) \|_U \le \varphi(t) \| y(t) \|_U$ μ-почти всюду в S_i. А значит это утверждение будет справедливо и μ-почти всюду для интервала T.

Далее, чтобы завершить доказательство, остается подтвердить для оператора M^* свойство (4). Итак, пусть $y \in E$, $y = \sum\nolimits_{i=1,\dots,k} P_{S_i,H}(y_i)$, $y_i \in \operatorname{Span} V$, $S_i \cap S_j = \varnothing$, $i \ne j$, $\cup_{i=1,\dots,k} S_i = T$, $i,j = 1,\dots,k$ и $S \subset T$. Тогда $P_{S,H}(y) = \sum\nolimits_{i=1,\dots,k} P_{S,H} \circ P_{S_i,H}(y_i) = \sum\nolimits_{i=1,\dots,k} P_{S \cap S_i,H}(y_i)$, откуда в соответствии с определением конструкции оператора M^*, введенной выше, можно подвести итог:

$$M^* \circ P_{S,H}(y) = \sum\nolimits_{i=1,\dots,k} P_{S \cap S_i,\mathrm{L}} \circ M^{\#}(y_i) = \sum\nolimits_{i=1,\dots,k} P_{S,\mathrm{L}} \circ P_{S_i,\mathrm{L}} \circ M^{\#}(y_i) =$$

$$= P_{S,\mathrm{L}} \circ \sum\nolimits_{i=1,\dots,k} P_{S_i,\mathrm{L}} \circ M^{\#}(y_i) = P_{S,\mathrm{L}} \circ M^{*}(y). \ \blacksquare$$

Замечание 3. Оценивая (в целом) перспективу развития БДР-теории в геометрических конструкциях M_2-продолжимости, отметим, что случай, когда N-семейство (1) лежит в равномерно выпуклом банаховом пространстве [20, с. 182], и при этом $\mathrm{Card}\, N \geq \aleph_0$, является аналитически значительно сложнее; включая вариант моделирования *билинейной структуры* дифференциальной модели реализации [18]. В качестве отдельной подзадачи данная качественная теория содержит геометрические конструкции замкнутых расчленяемых диэдров [19], которые в контексте аналитического обоснования (см. доказательство теоремы 1) M-продолжимости[4] еще недостаточно разработаны. При этом необходимо учесть, что в подобной математической постановке не продуктивно делать изначальное допущение, что *любое* замкнутое подпространство исследуемого банахова пространства дополняемо, поскольку тогда это пространство будет изоморфно некоторому *гильбертову* пространству (см. теорему 3 [11, с. 203]), что в итоге (увы) не расширяет функциональный класс операторных коэффициентов обратной задачи, обозначенной выше в БДР-постановке (2).

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ БДР-МОДЕЛИ В КОНСТРУКЦИЯХ ОПЕРАТОРА РЕЛЕЯ–РИТЦА

Пусть $V \subset H_2$. Линейному оператору $M^{\#} : \mathrm{Span}\, V \to \mathrm{L}_1(T, X)$ из теоремы 2 сопоставим на многообразии $\mathrm{Span}\, V$ нелинейный оператор Релея–Ритца [7], построенный по следующему правилу:

$$\Psi(y)(t) := \begin{cases} \| M^{\#}(y)(t) \|_X \| y(t) \|_U^{-1}, \text{ если } y(t) \neq 0 \in U, \\ 0 \in R, \text{ если } y(t) = 0 \in U. \end{cases}$$

Далее, в геометрии *поглощающего множества* следуем [20, с. 42]: множество Q в векторном пространстве L является *поглощающим*, если для любого $y \in L$ можно указать такое действительное число $r \in (0, \infty)$, что $ry \in Q$; если L – нормированное пространство, то не только каждая ограниченная окрестность нуля, но и ее граница совместно с нулем, – суть поглощающие множества. Через $\mathrm{supp}\, f(\cdot) := \{t \in T : f(t) \cdot \neq \cdot 0\}$ обозначим носитель [11, с. 137] измеримой на T вещественной функции $f(\cdot)$. Такая геометрическая постановка обнаруживает важное уточнение теоремы 2.

Лемма 3. *Пусть* $V \subset H_2$, $M^{\#} : \mathrm{Span}\, V \to \mathrm{L}_1(T, X)$ *– линейный оператор и* Q *– некоторое поглощающее множество в* $\mathrm{Span}\, V$. *Тогда* M_2*-продолжимость оператора* $M^{\#}$ *эквивалентна совместному выполнению двух условий*

$$\mathrm{supp} \| M^{\#}(y)(\cdot) \|_X \cdot \subseteq \cdot\, \mathrm{supp} \| (y)(\cdot) \|_U \ \ \forall y \in Q,$$
$$\exists \varphi \in \mathrm{L}_2(T, R) : \Psi(y)(t) \cdot \leq \cdot \varphi(t) \ \ \forall y \in Q.$$

Отметим еще такой полезный факт.

Лемма 4. *Пусть* $(x, u, \mathbb{B}_1(x, x), \mathbb{B}_2(x, dx/dt), \mathbb{B}_3(dx/dt, dx/dt)) \in \mathbf{\Pi}$. *Тогда*

$$\mathrm{supp} \| d^2 x(\cdot)/dt^2 \|_X \cdot \subseteq \cdot$$
$$\cdot \subseteq \cdot\, \mathrm{supp} \| (dx(\cdot)/dt, x(\cdot), u(\cdot), \mathbb{B}_1(x(\cdot), x(\cdot)), \mathbb{B}_2(x(\cdot), dx(\cdot)/dt), \mathbb{B}_3(dx(\cdot)/dt, dx(\cdot)/dt)) \|_U .$$

Доказательство сводится к компиляции лемм 1, 3 [12].

Если ввести в рассмотрение пространство (векторную решетку [11, с. 363]) измеримых функций $\mathrm{L}(T, R)$ и в нем $\leq_{\mathrm{L}}$ – квазиупорядочение $f_1 \leq_{\mathrm{L}} f_2 \Leftrightarrow f_1(t) \cdot \leq \cdot f_2(t)$ с наименьшей нижней гранью $\sup_{\mathrm{L}}$ для подмножеств из $\mathrm{L}(T, R)$, то в контексте пункта *а*) теоремы 17 [11, с. 68] и лемм 1–4 для БДР-задачи (2) получаем следующий ключевой аналитический результат.

---

[4] Вопрос о том, когда такое *M*-продолжение осуществимо в постановке для гильбертова пространства непрерывно вложенного в банахово пространство (образуя всюду плотное множество в структуре «правильной тройки пространств» [21, с. 175]), и когда некоторые (выделенные) операторы должны иметь представление в классе строго положительно определенных [21, с. 176] самосопряженных операторов, тоже довольно сложен и аналитически привлекателен. Именно в этот вопрос упирается проблема разрешимости задачи дифференциальной реализации в классе *гиперболических* моделей (см, например, [21, с. 456]), составляя предмет отдельного, весьма перспективного, исследования.

Теорема 3. *Пусть* N *– семейство процессов* (1), Q *– некоторое поглощающее множество в* $\mathrm{Span}\{(dw/dt,w,v,q,s,h):(w,v,q,s,h)\in N\}$ *и* $(g,w,v,q,s,h)\mapsto M^{\#}(g,w,v,q,s,h):=d^2w/dt^2$. *Тогда БДР-задача*

$$\exists(A_1,A_0,B_0,B_1,B_2,B_3)\in\mathbf{L}_2:$$

$$d^2x/dt^2+A_1dx/dt+A_0x=B_0u+B_1\mathbb{B}_1(x,x)+B_2\mathbb{B}_2(x,dx/dt)+B_3\mathbb{B}_3(dx/dt,dx/dt)$$

$$\forall(x,u,\mathbb{B}_1(x,x),\mathbb{B}_2(x,dx/dt),\mathbb{B}_3(dx/dt,dx/dt))\in N$$

разрешима в том и только в том случае, если имеет место любое из следующих двух условий

$$\exists\varphi\in \mathrm{L}_2(T,R):\Psi(g,w,v,q,s,h)\le_{\mathrm{L}}\varphi\ \ \forall(g,w,v,q,s,h)\in Q;$$

$$\exists\ \sup\nolimits_{\mathrm{L}}\Psi(Q):\ \sup\nolimits_{\mathrm{L}}\Psi(Q)\in \mathrm{L}_2(T,R).$$

Замечание 4. Существует (согласно пункта *б*) теоремы 17 [11, с. 68]) счетное множество $Q^*\subset Q$ ($1<\mathrm{Card}\,N<\aleph_0\Rightarrow\mathrm{Card}\,Q$ – мощность континуума) такое, что, если в пространстве $\mathrm{L}(T,R)$ лежит $\sup_{\mathrm{L}}\Psi(Q)$, то функцию $\varphi:=\sup_{\mathrm{L}}\Psi(Q)$ осуществляет следующая sup-конструкция:

$$t\mapsto\varphi(t)=\sup\{\Psi(g,w,v,q,s,h)(t)\in R:\ (g,w,v,q,s,h)\in Q^*\}.$$

Замечание 5. Из структуры уравнения (2) следует, что БДР-разрешимость осуществляется для оператор-функций $(A_1,A_0,B_0,B_1,B_2,B_3)\in\mathbf{L}_2$, с точностью до линейного многообразия

$$\mathbf{L}^0=\{(D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6)\in\mathbf{L}_2:D_1g+D_2w-D_3v-D_4q-D_5s-D_6h=0$$
$$\forall(g,w,v,q,s,h)\in G_N\},$$

где G_N – базис Гамеля (алгебраический базас [11, с. 74]) в $\mathrm{Span}\{(dw/dt,w,v,q,s,h):(w,v,q,s,h)\in N\}$, при этом случай $\mathbf{L}_0=\{0\}\subset\mathbf{L}_2$ характеризует единственность БДР-модели (2).

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНОЙ БДР-МОДЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этом разделе обратимся к характеристикам билинейных реализаций, уточняющих их свойства в контексте моделирования *a posteriori* дифференциальных уравнений динамики систем.

Для системы, представленной произвольным семейством процессов (1), построение уравнений ее дифференциальной реализации (2) довольно сложно (даже для линейной модели [10]). Правда оно становится вполне обозримым в одном важном случае (в контексте проблемы аппроксимации [11, с. 513]; см. также сноску 2), когда для билинейной реализации (2) ее интегральный ξ-оператор (3) нагружен дополнительными условиями, приближающими БДР-задачу к положению $\dim X<\infty$ [6–9]. Это построение формализует следующая конструкция $(A_1,A_0,B_0,B_1,B_2,B_3)_2$-модели.

Определение 3. *Билинейную дифференциальную реализацию* (2) *будем называть вполне непрерывной, если ее интегральный оператор* (3) *компактный.*

Для удобства подкласс $(A_1,A_0,B_0,B_1,B_2,B_3)_2$-моделей, отвечающих в силу конструкции (2) вполне непрерывным квазилинейным дифференциальным реализациям, обозначим через $\mathbf{L}_2^{\mathrm{com}}$, а, следуя определению 1, подкласс из $L(H_2,\mathrm{L}_1(T,X))$ всех M_2-операторов «отождествим» с банаховым пространством $(\mathbf{L}_2,\|\cdot\|_{\mathrm{L}})$ всех $(A_1,A_0,B_0,B_1,B_2,B_3)_2$-моделей; ниже используем стандартные обозначения l_r, $1\le r\le\infty$ банаховых пространств числовых последовательностей [11, с. 147].

Предложение 3. *Линейное многообразие* $\mathbf{L}_2^{\mathrm{com}}$ *замкнуто в пространстве* $\mathbf{L}_2$ *и является (гомеоморфно) фактор-пространством* l_1.

Доказательство. Компилируя предложение 1 и теорему 3 [11, с. 326], приходим к заключению, что $\mathbf{L}_2^{\mathrm{com}}$ замкнуто в $\mathbf{L}_2$, при этом (согласно сепарабельности пространств $L(X,X)$, $L(Y,X)$, $L(Z,X)$ и теоремы 1.5.18 [22, с. 150]) банахово пространство $\mathbf{L}_2^{\mathrm{com}}$ сепарабельно.

Далее, рассмотрим линейный оператор $E : l_1 \to \mathbf{L}_2^{\mathrm{com}}$, полагая

$$E : \{a_i\} \to \Sigma_{i=1,2,\ldots}\, a_i x_i,\ \{a_i\} \in l_1,$$

где $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \subset \mathbf{L}_2^{\mathrm{com}}$ – счетное всюду плотное множество в единичном шаре S_{L} (с центром в нуле) из $\mathbf{L}_2^{\mathrm{com}}$. Оператор E – непрерывный; компиляция теоремы 5.1 [23, с. 132], теоремы 3 [11, с. 260] и положения $(f(x_1), \ldots, f(x_n), \ldots) \in l_\infty \quad \forall f \in \mathbf{L}_2^{\mathrm{com}}$. Далее, пусть S_l – единичный шар (с центром в нуле) в l_1, и поскольку $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \subset E(S_l)$, то образ $E(S_l)$ плотен в шаре S_{L}, откуда заключаем: пространства $\mathbf{L}_2^{\mathrm{com}}$ и $l_1 / \mathrm{Ker}\, E$ линейно гомеоморфные (лемма 1 [11, с. 451]).

Определение 4. *Пусть V, W, U – некоторые банаховы пространства, $D \in L(V,W)$, $J \in L(W,U)$, $G := \mathrm{Ker}\, J$ и $\pi : W \to W/G$ – фактор-отображение. Будем говорить, что оператор D является J-факторкомпактным, если $J^* \circ \pi \circ D = J \circ D$, где $J^* : W/G \to U$ «замыкает» диаграмму*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "D"] & W \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "J"] & W/G \arrow[dl, "J^*"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

и при этом композиция $\pi \circ D : V \to W/G$ – компактный оператор.

Пусть $J : \mathrm{L}_1(T,X) \to X$ – оператор, осуществляющий конструкт интеграла Бохнера [20]; везде далее $[\cdot]$ – операция замыкания (по контексту в пространствах H_2, $\mathrm{L}_1(T,X)/\mathrm{Ker}\, J$, или X).

Теорема 4. *Для разрешимой БДР-задачи* (2) *справедливо положение*:

$$(A_1, A_0, B_0, B_1, B_2, B_3) \in \mathbf{L}_2^{\mathrm{com}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \textit{оператор } (g,w,v,q,s,h) \mapsto M^{\#}(g,w,v,q,s,h) := d^2 w / dt^2,$$
$$(g,w,v,q,h) \in \mathrm{Span}\{(dw/dt, w, v, q, s, h) : (w,v,q,s,h) \in N\}$$

продолжим до J-факторкомпактного M_2-оператора $M : H_2 \to \mathrm{L}_1(T,X)$.

Доказательство. Пусть M – J-факторкомпактный оператор реализации (2). Тогда оператор (3) равен $\xi = J \circ M$ и, таким образом, достаточные условия суть факт пункта b) теоремы 2 [11, с. 325] и теоремы 1.41 [23, с. 39]. Подтвердим необходимые условия.

Пусть в (2) $(A_1, A_0, B_0, B_1, B_2, B_3) \in \mathbf{L}_2^{\mathrm{com}}$. Возьмем в H_2 шар S_r r-радиуса (с центром в нуле), и пусть $\{E_w\}$ – некоторое открытое покрытие $[\pi \circ M(S_r)]$, где $\pi : \mathrm{L}_1(T,X) \to \mathrm{L}_1(T,X)/\mathrm{Ker}\, J$ – фактор-отображение. То, что покрытие $\{E_w\}$ имеет конечное подпокрытие $\{E_i\}_{i=1,\ldots,n}$ определяют, с одной стороны, факт гомеоморфизма $J^* : \mathrm{L}_1(T,X)/\mathrm{Ker} J \to X$ (теорема 1.41 [23, с. 39]), а с другой, что в силу (3) $[\xi(S_r)]$ – компактное подмножество в пространстве X, доказательство на этом завершается. ■

При построении дифференциальной реализации для семейства динамических процессов (1), как правило (см. выше замечание 5), имеем дело не с одной системой уравнений реализации (2), а с целым семейством подобных систем, что выдвигает задачи построения «оптимальных реализаций» по некоторым формальным критериям «минимизации» (в данном случае речь не идет о реализациях [4, 9] по критерию «минимальной размерности»). Данные постановки допускают несколько формальных математических трактовок [24], а именно, – можно исходить из задачи «оптимальной реализации» в структуре банахова пространства $\|\xi\|_{L(E,X)}$ по критерию нормы $\|\cdot\|_{L(H,X)}$, или пространства $\mathbf{L}_2$ по критерию нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{L}}$. Ниже ограничимся задачей исследования существования реализации с *минимальной операторной нормой* в пространстве $(L(H_2, X), \|\cdot\|_{L(H,X)})$.

Определение 5. *Дифференциальную реализацию* (2) *с* M_2*-оператором* M, *для которого*

$$\|J\circ M\|_{L(H,X)} = \min\{\|\xi\|_{L(H,X)}:\ \xi \text{ – оператор (3) БДР-реализации (2) } N\text{-семейства (1)}\},$$

назовем реализацией оптимальной по критерию операторной нормы $\|\cdot\|_{L(H,X)}$.

Теорема 5. *Если реализация* (2) *разрешима, то существует ее* M_2*-оператор* M, *при котором данная реализация будет* «$\|\cdot\|_{L(H,X)}$*-оптимальной*» *с* $\|\cdot\|_{L(H,X)}$*-нормой*

$$\|J\circ M\|_{L(H,X)}=\|\xi\|_{L(E,X)},\ \xi = J\circ M^*: E\to X,\ E\subset H_2,$$

где E *– минимальное линейное многообразие, содержащее линейную оболочку*

$$\mathcal{L} := \mathrm{Span}\{(dw/dt, w, v, q, s, h):\ \ (w, v, q, s, h)\in N\}$$

и инвариантное относительно проекторов $\{P_{S,H} : S\in\wp_\mu\}$, *при этом оператор* $M^*\in L(E,X)$ *обладает сужением* $M^* \mid \mathcal{L} = d^2w/dt^2$, $(dw/dt, w, v, q, s, h)\in\mathcal{L}$ *и свойством* (4).

Доказательство. Вначале отметим, что при наличии реализации (означенной в теореме) конструкции E и M^* существуют в силу леммы 2 и теорем 1–3, при этом, очевидно, $[E]$ – гильбертово пространство в себе. Доказательство теоремы 5 проведем в два шага, соответственно, для установления оценки $\|J\circ M\|_{L(H,X)}\le\|\xi\|_{L(E,X)}$ и оценки $\|J\circ M\|_{L(H,X)}\ge\|\xi\|_{L(E,X)}$.

(Установление $\|J\circ M\|_{L(H,X)}\le\|\xi\|_{L(E,X)}$). Рассмотрим операторы $J\circ M_+ : [E]\to X$ и $\xi : H_2\to X$, первый из которых является линейным непрерывным (и единственным) продолжением $J\circ M^*$ на замыкание $[E]$ с сохранением нормы (теорема 2 [11, с. 245]), а второй строится как линейное непрерывное представление $\xi := J\circ M_+\circ\mathrm{Pr}$, где Pr – проектор в H_2 с ядром $E^\perp$ (ортогональное дополнение $[E]$; теорема 5.16 [23, с. 151]). Ясно, что в такой постановке будет реализоваться

$$\|\xi\|_{L(H,X)}=\|J\circ M_+\circ\mathrm{Pr}\|_{L(H,X)}=\|\xi\|_{L(E,X)}.$$

Примем (возвращаясь к предложению 1) в качестве «претендента на роль» оператора M, оператор

$$M^+ : H_2\to \mathrm{L}_1(T, X),\quad M^+ := \mathbf{\Gamma}^{-1}(\xi) = M_+\circ\mathrm{Pr}\in\mathbf{L}_2,$$

и, таким образом, для «ξ-модели» (3) дифференциальной реализации (2) оценка по критерию операторной нормы $\|\cdot\|_{L(H,X)}$, очевидно, не больше чем $\|\xi\|_{L(E,X)}$.

(Установление $\|J\circ M\|_{L(H,X)}\ge\|\xi\|_{L(E,X)}$). Поскольку E – минимальное линейное многообразие, содержащее $\mathrm{Span}\,N$ и инвариантное относительно семейства проекторов $\{P_{S_i,H} : S\in\wp_\mu\}$, то сужение на E всякого M_2-оператора (в частности, и M^+), отвечающего дифференциальной реализации (2), совпадает с M^*, следовательно, в любой реализации оценка ее «ξ-модели» (3) по критерию операторной нормы $\|\cdot\|_{L(H,X)}$ не меньше чем $\|\xi\|_{L(E,X)}$, доказательство на этом завершается. ■

Применяя некоторые соображения, связанные с модификацией оператора Ψ, и используя второе характеристическое условие из формулировки теоремы 3, можно получить результат, касающийся «нижней $\|\cdot\|_{\mathbf{L}}$-оценки» для $\|\cdot\|_{L(H,X)}$-оптимального M_2-оператора (в частности M^+).

Перейдем к деталям. Прежде всего, заметим сразу, что поскольку выполняются соотношения

$$\Psi(r(g, w, v, q, s, h)) = \Psi(g, w, v, q, s, h),\ (g, w, v, q, s, h)\in V_N,\ 0\ne r\in R,$$

$$V_N := \{(dw/dt, w, v, q, s, h):\ (w, v, q, s, h) \in N\},$$

то примем (используя геометрические приёмы [25, 26] проективных представлений), что

$$\Phi(\gamma) := \Psi[\gamma],\ \ \gamma \in P_N\ \ (\gamma \subset \mathrm{Span}\, V_N),$$

где P_N – вещественное проективное пространство, ассоциированное с $\mathrm{Span}\, V_N$; т.е. P_N есть множество орбит мультипликативной группы $R^* = R \setminus \{0\}$, действующей на $\mathrm{Span}\ V_N \setminus \{0\}$. В данной трактовке важны топологические свойства пространства P_N, $\mathrm{Card}\, N < \aleph_0$, разумеется, в первую очередь, его компактность; в частности, если $\dim \mathrm{Span}\ V_N = 3$, то 2-многообразие P_N устроено как лист Мёбиуса, к которому по его границе приклеен круг [25, с. 162]. Отметим, что на пространстве P_N, $\mathrm{Card}\, N \le \aleph_0$ можно ввести структуру *CW*-комплекса [25, с. 140], что важно при рассмотрении вопроса о геометрической реализации P_N [25, с. 149], подспудно углубляя теорию векторных полей [26]. В данном контексте согласно теореме 3 [27], теореме 2.3 [25, с. 47] и теореме 3 [28, с. 61], при условии взаимно однозначности оператора Φ можно вычислить фундаментальную группу [25, с. 46] топологического пространства $(\Phi(P_N), \mathfrak{T})$, где $\mathfrak{T}$ – топология сходимости по мере μ [11, с. 58].

Пользуясь этими замечаниями, несложно сформулировать «проективный вариант» теоремы 3 (см. теорему 6), заменив конструкцию поглощающего множества Q на проективное пространство P_N, при этом можно учесть энтропийные свойства [6] оператора Φ, рассмотрев функционал вида:

$$\mathrm{Entrp}(N) := (\int_T (\sup\nolimits_{\mathrm{L}} \Phi(P_N)(\tau))^2\, \mu(d\tau))^{1/2}; \tag{6}$$

не входя в очевидные подробности, укажем, что, если $N \subset N^*$ и $\mathrm{Entrp}(N^*) \ne 0$, то $\mathrm{Entrp}(N^*) \ge \mathrm{Entrp}(N)$.

Теорема 6. *БДР-задача разрешима тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Entrp}(N) \ge 0$. *При этом, если отображение* $(g,w,v,q,s,h) \mapsto M(g,w,v,q,s,h) := A_1 g + A_0 w + B_0 v + B_1 q + B_2 s + B_3 h$ *представляет* M_2*-оператор* $\|\cdot\|_{L(H,X)}$*-оптимальной реализации (2), то* $\|\cdot\|_{\mathrm{L}}$*-норма оператора* M *имеет нижнюю оценку*

$$\|(A_1, A_0, B_0, B_1, B_2, B_3)\|_{\mathrm{L}} \ge \mathrm{Entrp}(N).$$

Доказательство. Согласно теореме 3 $\sup_{\mathrm{L}} \Phi(P_N) \in \mathrm{L}_2(T, R)$ и, если $(A_1, A_0, B_0, B_1, B_2, B_3) \in \mathbf{L}_2$ – упорядоченный набор оператор-функций, характеризующий $\|\cdot\|_{L(H,X)}$-оптимальный M_2-оператор БДР-системы (2), то, используя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$d^2w/dt^2 = A_1 g + A_0 w + B_0 v + B_1 q + B_2 s + B_3 h\ \ \forall (g,w,v,q,s,h) \in V_N \Rightarrow$$

$$\|d^2w/dt^2\|_X = \|A_1\|_{L(X,X)} \|g\|_X + \|A_0\|_{L(X,X)} \|w\|_X + \|B_0\|_{L(Y,X)} \|v\|_Y +$$

$$+\|B_1\|_{L(Z,X)} \|q\|_Z + \|B_2\|_{L(Z,X)} \|s\|_Z + \|B_3\|_{L(Z,X)} \|h\|_Z\ \ \forall (g,w,v,q,s,h) \in V_N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi(g,w,v,q,s,h)(t) \le (\|A_1(t)\|^2_{L(X,X)} + \|A_0(t)\|^2_{L(X,X)} + \|B_0(t)\|^2_{L(Y,X)} +$$

$$+\|B_1(t)\|^2_{L(Z,X)} + \|B_2(t)\|^2_{L(Z,X)} + \|B_3(t)\|^2_{L(Z,X)})^{1/2}\ \ \forall (g,w,v,q,s,h) \in V_N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\int_T (\sup\nolimits_{\mathrm{L}} \Phi(P_N)(\tau))^2\, \mu(d\tau))^{1/2} \le \|(A_1, A_0, B_0, B_1, B_2, B_3)\|_{\mathrm{L}}.\ \blacksquare$$

В завершении приведем примеры, иллюстрирующие в изложенном билинейном дифференциальном моделировании потенциал средств компьютерной алгебры [29, 30], тем самым снимая (отчасти) возможно сложившееся представление, что выше особое внимание уделялось исключительно идейному аспекту качественной теории M_2-продолжимости (с учетом замечания 3).

Пример 1. Пусть $T = [0, 10]$, $Y := X =: Z$, $A_1 = 0 \in L(X,X)$, $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_3 = 0 \in \mathcal{L}(X^2, X)$, $\mathbb{B}_2 = <\cdot,\cdot>_X e$, где $<\cdot,\cdot>_X$ – скалярное произведение в $X, e \in X$, $\|e\|_X = 1$ и $t \mapsto x(t) = (t \sin t)e$, $t \mapsto u(t) = 0 \in \mathrm{L}_2(T, X)$.

Тогда $\mathrm{Entrp}(N) = \mathrm{Entrp}(\{(x, u, \mathbb{B}_1(x, x), \mathbb{B}_2(x, dx/dt), \mathbb{B}_3(dx/dt, dx/dt))\}) = \infty$ (см. рис. 1; функция $f := \sup_{\mathrm{L}} \Phi(P_N) = \|d^2x/dt^2\|_X (\|x\|_X^2 + \|\mathbb{B}_2(x, dx/dt)\|_X^2)^{-1/2}$ не принадлежит классу $\mathrm{L}_2(T, R)$) и, следовательно, согласно теореме 6, реализация (2) для неуправляемого процесса N *не существует*.

Пример 2. Изменим постановку примера 1 тем, что $t \mapsto u(t) = (t\sin^2 t + 2^{-1}t^2 \sin 2t + \cos t)e$. Тогда $\mathrm{Entrp}(N) < \infty$ (см. рис. 2; $f := \sup_{\mathrm{L}} \Phi(P_N) = \|d^2x/dt^2\|_X (\|x\|_X^2 + \|\mathbb{B}_2(x, dx/dt)\|_X^2 + \|u\|_Y^2)^{-1/2} \in \mathrm{L}_2(T, R)$) и значит реализация (2) для управляемого процесса N *существует*; нетрудно установить, что

$$d^2x/dt^2 + x = 2u - 2\mathbb{B}_2(x, dx/dt).$$

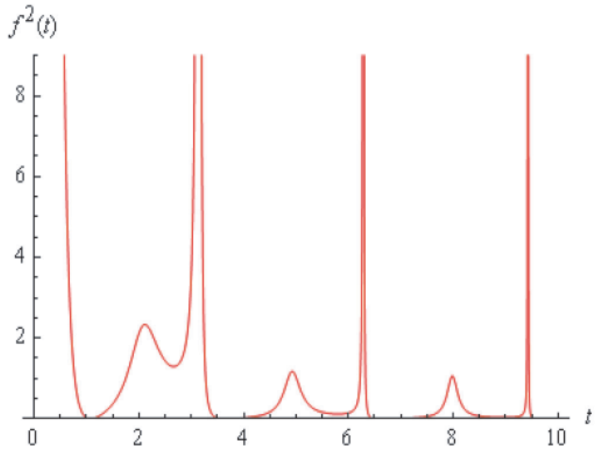

Рис. 1. $f^2(t) = (2\cos t - t\sin t)^2 \times$
$\times((t\sin t)^2 + (t\sin t)^2(\sin t + t\cos t)^2)^{-1}$

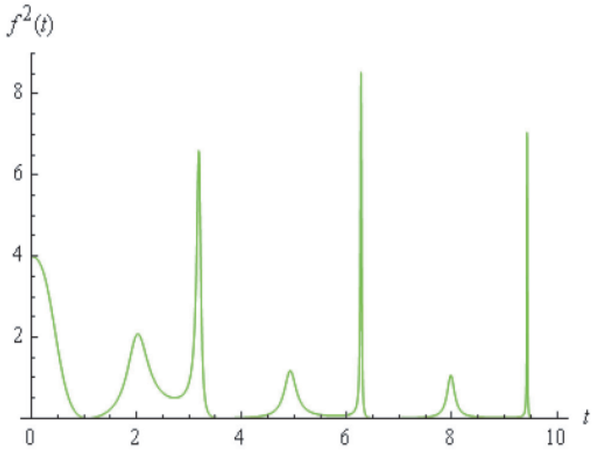

Рис. 2. $f^2(t) = (2\cos t - t\sin t)^2 \times ((t\sin t)^2 +$
$+ (t\sin t)^2(\sin t + t\cos t)^2 + (t\sin^2 t + 2^{-1}t^2 \sin 2t + \cos t)^2)^{-1}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За пределами работы остался прикладной аспект БДР-проблемы, – сама разрешимость задачи дифференциальной реализации подспудно предполагает апостериорное построение моделей [31–35], в том числе, для обратных задач нейродинамики [36] на основе обработки информации современных многоканальных нейроимплантов [37]. Поэтому необходимо отметить, что материал статьи можно рассматривать как начальный (и необходимый) этап в изучении реализации / идентификации дифференциальных билинейных систем (порядка 2 и выше [15]) в гильбертовом пространстве, как раздел теории обратных задач бесконечномерного нелинейного системного анализа[5], в частности, на базе развития (см. примеры 1, 2) методов и средств компьютерной алгебры [29, 30]. В этой связи, для конечномерных систем, сошлемся на работу [38], в которой предложена конструктивная процедура построения билинейных дифференциальных реализаций, позволившая показать, как моделировать уравнения Эйлера в качестве эмпирической экстраполяции реализации наблюдаемого пространственного вращательного движения твердого тела в аспекте постановки задачи структурной идентификации дифференциальных уравнений динамики нелинейных физических процессов.

Если рассматривать методологический аспект статьи в контексте энтропийной постановки [6], то можно заметить, что функционал (6) можно интерпретировать, как характеристику энтропии моделируемой системы, когда в качестве меры её «внутренней неупорядоченности» выступает $\|\cdot\|_{\mathrm{L}}$-оценка величи-

[5] Поскольку тензорное произведение гильбертовых пространств сводит изучение билинейных реализаций [18] к анализу линейных отображений путем введения новой операции на категории линейных пространств, то геометрические конструкции теории M_2-продолжимости могут служить отправными точками развития теории квазилинейных векторных полей [26, 31], попутно создавая этой теории репутацию полезного инструмента в дифференциальном моделировании, сложных динамических систем [39], включая построение БДР-моделей нейроморфных процессов [36, 40, 41].

ны $\mathrm{Entrp}(N)$ для $(A_0, A_1, B_0, B_1, B_2, B_3)_2$-модели $\|\cdot\|_{L(H,X)}$-оптимальной дифференциальной реализации поведения N. Таким образом, для нелинейных динамических процессов (1), происходящих в исследуемой (БДР-моделируемой) системе, энтропия (6) или возрастает (см. постановки работ [16, 35] о реализации общего (инвариантного) регулятора для двух управляемых динамических пучков), или остается постоянной, если остаётся неизменным поведение N. В данной математической парадигме в силу теоремы 6 качественную БДР-теорию концептуально можно строить на основе следующего компактного «*ad hoc*-постулата»: *бихевиористическая* N *-система* (1) *обладает БДР-представлением* (2) *в том и только том случае, если энтропия* $\mathrm{Entrp}(N)$ *конечна.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Willems J.C.* System theoretic models for the analysis of physical systems // Ric. Aut. 1979. N 10. P. 71-106.
2. *Данеев А.В., Русанов В.А.* К методам качественной теории идентификации сложных динамических систем // Доклады АН. 1997. Т. 355, № 2. С. 174-177.
3. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É., Vetrov A.A.* System-theoretical foundation for identification of dynamic systems. II // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 116, N 1. P. 25-68.
4. *Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В.* Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений // Сибирский журнал индустриальной математики. 2011. Т. 14, № 1. С. 27-39; № 2. С. 28-33.
5. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 458 с.
6. *Данеев А.В., Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю.* Принцип максимума энтропии в структурной идентификации динамических систем. Аналитический подход // Известия вузов. Математика. 2005. № 11. С. 16-24.
7. *Данеев А.В., Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю.* Нестационарная реализация Калмана-Месаровича в конструкциях оператора Релея-Ритца // Кибернетика и системный анализ. 2007. № 1. С. 82-90.
8. *Daneev A.V., Lakeev A.V., Rusanov V.A.* On the theory of realization of strong differential models // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2007. Vol. 1, N 3. P. 283-292.
9. *Русанов В.А., Данеев А.В., Линке Ю.Э.* К оптимизации процесса юстировки модели дифференциальной реализации многомерной системы второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 10. С. 1432-1438.
10. *Данеев А.В., Русанов В.А., Русанов М.В.* От реализации Калмана-Месаровича к линейной модели нормально-гиперболического типа // Кибернетика и системный анализ. 2005. № 6. С. 137-157.
11. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. Москва: Наука, 1977. 744 с.
12. *Rusanov V.A., Antonova L.V., Daneev A.V.* Inverse problem of nonlinear systems analysis: A behavioral ap-proach // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2012. Vol. 10, N 2. P. 69-88.
13. *Chen Y.A.* New one-parameter inhomogeneous differential realization of the spl(2,1) superalgebra // Inter-national Journal of Theoretical Physics. 2012. Vol. 51, N 12. P. 3763-3768.
14. *Русанов В.А., Данеев А.В., Линке Ю.Э.* К геометрическим основам дифференциальной реализации динамических процессов в гильбертовом пространстве // Кибернетика и системный анализ. 2017. Т. 53. № 4. С. 71-83.
15. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Sizykh V.N.* Higher-order differential realization of polylinear-controlled dynamic processes in a Hilbert space // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2018. Vol. 19, N 3. P. 263-274.
16. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É.* On solvability of the identification-inverse problem for operator-functions of a nonlinear regulator of a nonstationary hyperbolic system // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2015. Vol. 16, N 2. P. 71-84.
17. *Лакеев А.В., Линке Ю.Э., Русанов В.А.* К структурной идентификации нелинейного регулятора нестационарной гиперболической системы // Доклады РАН. 2016. Т. 468, № 2. С. 143-148.
18. *Лакеев А.В., Русанов В.А., Банщиков А.В.* К тензорному анализу разрешимости задачи реализации билинейной системы второго порядка с запаздыванием // Проблемы управления и информатики. 2021. № 2. С. 82-95.
19. *Массера Х.Л., Шеффер Х.Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. Москва: Мир, 1970. 456 с.
20. *Иосида К.* Функциональный анализ. Москва: Мир, 1967. 624 с.
21. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. Москва: Наука, 1966. 500 с.
22. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. Москва: Наука, 1977. 624 с.
23. *Рудин У.* Функциональный анализ. Москва: Мир, 1975. 445 с.
24. *Rusanov V.A., Antonova L.V., Daneev A.V., Mironov A.S.* Differential realization with a minimum operator norm of a controlled dynamic process // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2013. Vol. 11, N 1. P. 1-40.
25. *Прасолов В.В.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. Москва: МЦНМО, 2014. 360 с.
26. *Новиков С.П., Тайманов И.А.* Современные геометрические структуры и поля. Москва: МЦНМО, 2014. 584 с.
27. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É.*

On the theory of differential realization: Criteria of continuity of the nonlinear Rayleigh-Ritz operator // International Journal of Functional Analysis, Operator Theory and Applications. 2020. Vol. 12, N 1. P. 1-22.

28. *Фоменко А.Т., Фукс Д.Б.* Курс гомотопической топологии. Москва: Наука, 1989. 528 с.
29. *Банщиков А.В., Бурлакова Л.А., Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н.* Символьные вычисления в моделировании и качественном анализе динамических систем // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19, № 6. С. 3-18.
30. *Банщиков А.В., Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н.* Программный комплекс для моделирования в символь-ном виде механических систем и электрических цепей // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. №2016618253 от 25.07.2016. Федеральная служба по интеллектуальной собственности (РОСПАТЕНТ).
31. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É.* To existence of a nonstationary quasi-linear vector field realizing the expansion of a control trajectory bundle in Hilbert space // WSEAS Transactions on Systems. 2020. Vol. 19. P. 115-120.
32. *Ahmed N.U.* Optimization and Identification of Systems Governed by Evolution Equations on Banach Space. New York: John Wiley and Sons, 1988. 187 p.
33. *Daneev A.V., Lakeyev A.V., Rusanov V.A.* On the differential simulation of the second-order bilinear system: a tensor approach // Proceedings the 2nd International Conference on Mathematics and Computers in Science and En-gineering (MACISE). Madrid, Spain. IEEE Catalog Number: CFP20S31-ART. 2020. P. 318-321.
34. *Daneev A.V., Lakeyev A.V., Rusanov V.A.* Existence of a bilinear differential realization in the constructions of tensor product of Hilbert spaces // WSEAS Transactions on Mathematics. 2020. Vol. 19. P. 99-107.
35. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É.* An inverse problems for nonlinear evolution equations: Criteria of existence of an invariant polylinear controller for a second-order differential system in a Hilbert space // International Journal of Differential Equations. 2021. Vol. 16, N 1. P. 1-10.
36. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Linke Yu.É., Plesnyov P.A.* Existence of a bilinear delay differential realization of nonlinear neurodynamic process in the constructions of entropic Rayleigh-Ritz operator // Advances in Dynamical Systems and Applications. 2020. Vol. 15, N 2. P. 199-215.
37. *Valle G.* An integrated brain-machine interface platform with thousands of channels // J. Med. Internet Res. 2019. Vol. 21. N 10: e16194. (doi: 10.2196/16194)
38. *Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю.* К теории структурной идентификации нелинейных многомерных систем // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, вып. 1. С. 119-132.
39. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É.* To precision calibration of a differential-matrix model of resonant oscillations of the cable-stayed bridge // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2021. Vol. 24, N 2. P. 199-216.
40. *Brzychczy S., Poznanski R.* Mathematical Neuroscience. New York: Academic Press, 2013. 208 p.
41. *Данеев А.В., Лакеев А.В., Русанов В.А., Плеснёв П.А.* О дифференциально-неавтономном представлении интегративной активности нейропопуляции билинейной моделью второго порядка с запаздыванием // Известия Самарского научного центра РАН. 2021. Т. 23. № 2. С. 115-126.

TO EXISTENCE OF COMPLETELY CONTINUOUS DIFFERENTIAL REALIZATION SECOND ORDER BILINEAR SYSTEM

© 2021 A.V. Daneev[1], A.V. Lakeev[2], V.A. Rusanov[2]

[1] Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

[2] Institute for System Dynamics and Control Theory named after V.M. Matrosov SB RAS, Irkutsk, Russia

For a continuous nonlinear infinite-dimensional behavioristic system (dynamical system of J. Willems), a functional-geometric study of the necessary and sufficient conditions for the existence of six non-stationary coefficients-operators of the model of bilinear differential realization of this system in the class of second-order differential equations in a separable Hilbert space is carried out. The case is investigated when the simulated operators are burdened with a condition that ensures the complete continuity of the integral form of the equations of realization in the entropy setting.
Keywords: inverse problems of nonlinear system analysis, bilinear differential implementation, Rayleigh-Ritz entropy operator, vector lattice.

DOI: 10.37313 / 1990-5378-2021-23-4-116-132

Aleksey Daneev, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Information Systems and Information Security. E-mail: daneev@mail.ru
Anatoly Lakeev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher. E-mail: lakeyev@mail.ru
Vyacheslav Rusanov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher. E-mail: v.rusanov@mail.ru