УДК 519.876.2:658.5

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ДОСТИЖЕНИИ ЦЕЛЕЙ В ОБЛАСТИ КАЧЕСТВА ПРОМЫШЛЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

© 2021 А.Г. Ивахненко, О.В. Аникеева

Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Россия

Статья поступила в редакцию 24.07.2021

Назначение обоснованных значений целей в области качества отнесено к одной из основных функций на тактическом уровне управления. Рассмотрена математическая модель при целевом управлении в области качества, являющаяся системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Дана характеристика параметров классического квадратичного функционала, соответствующего функции потерь качества Тагути. Эти параметры определяют затраты, связанные с отклонениями каждой цели в области качества на конец планового периода и в течение него, а также затраты связанные с отклонениями величин управляющих воздействий от статических значений, для достижения поставленных целей в переходных процессах. Приведены решения этой системы для наиболее распространенных на практике ступенчатого и линейного законов управления. Наличие такого решения позволило применить стандартный метод поиска экстремумов функции многих переменных при оптимизации без использования вариационного исчисления. Рассмотрен пример поиска минимума составляющих и самого классического квадратичного функционала, с использованием фактических данных по результатам деятельности промышленного предприятия при различных значениях параметров.

Ключевые слова: оптимальное управление, цели в области качества, математическая модель, функционал.

DOI: 10.37313/1990-5378-2021-23-4-18-26

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00015.

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Назначение обоснованных значений целей в области качества является одной из основных функций на тактическом уровне управления качеством [1]. Наименования целей и их значений определяют содержание документа «Цели в области качества», как правило, со сроком выполнения на один год. Вопросы, связанные с достижимостью поставленных целей при наиболее распространенных ступенчатом и линейном законах управления, рассмотрены в работах [2, 3]. В данной работе рассмотрен характер поведения составляющих функционала, предложенного при постановке общей задачи оптимизации для линейной модели системы менеджмента качества (СМК) [4] с акцентами на безусловную достижимость поставленных целей и/или минимизацией затрат.

Задачей данной работы является исследование классического квадратичного функционала и его составляющих при ступенчатом и линейном законах управления для линейной модели СМК.

Ивахненко Александр Геннадьевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры машиностроительных технологий и оборудования.
E-mail: ivakhnenko2002@mail.ru
Аникеева Олеся Владимировна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры дизайна и индустрии моды. E-mail: olesya-anikeeva@yandex.ru

ПОСТАНОВКА ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ СМК

Сама математическая модель при целевом управлении СМК имеет вид:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(t), \qquad (1)$$

где составляющие вектора (переменные состояния) $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_{(1)}, \boldsymbol{X}_{(2)})^{\mathrm{т}}$ являются текущими значениями целей в области качества $\boldsymbol{X}_{(1)}$ и скоростями их изменения $\boldsymbol{X}_{(2)}$, каждый из которых имеет размерность n; n – количество целей; $\boldsymbol{A}$ – системная матрица ($2n\times2n$); $\boldsymbol{B}$ – матрица параметров управления; $\boldsymbol{U}(t)$ – вектор управляющих воздействий.

Система уравнений (1) совместно с заданными начальными условиями для переменных состояния $\boldsymbol{X}(0)$ представляет собой задачу Коши. Решение этой системы для произвольного управляющего воздействия имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{X}(t) = \exp^{\boldsymbol{A}t}\, \boldsymbol{X}(0) + \int_0^t \exp^{\boldsymbol{A}t}\, \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(\tau)\mathrm{d}\tau\,, \qquad (2)$$

где выражение $\exp^{At}$ – матричная экспонента, вычисление которой связано с преобразованием матрицы $\boldsymbol{A}$, для представления ее в виде произведения жордановых матриц, или же разложением в ряд по степеням данной матрицы [6].

Рассмотрим второе слагаемое в правой части системы (1). В практике управления для достижения значений поставленных целей в области качества наибольшее распространение получили ступенчатый и линейный законы управления. Ступенчатый закон управления отражается в указанном выше документе только требуемыми значениями целей на конец планируемого периода $[\boldsymbol{X}_{(1)}]$, при этом явно не учитываются скорости их изменения. Линейный закон управления отражается в документе не только конечными значениями $[\boldsymbol{X}_{(1)}]$, но и их промежуточными значениями в течение планируемого периода, то есть неявно задает скорости изменения значений поставленных целей. Составляющие матрицы $\boldsymbol{B}$ для этих законов управления определяются в два этапа. На первом этапе рассматривается решение уравнения (1) после завершения переходных процессов в СМК, то есть при выполнении условия $d\boldsymbol{X}/dt = 0$. Определенные таким образом компоненты матрицы $\boldsymbol{B}$ обеспечивают потенциальную достижимость целей в области качества. На втором этапе в матрицу $\boldsymbol{B}$ вводятся коэффициенты усиления для обеспечения фактической достижимости требуемых значений целей в течение планового периода времени, то есть задаются более высокие значения целей в области качества по сравнению со статической задачей.

Тогда математическая модель целевого управления СМК из (1) преобразуется к виду:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{U}(t)\,, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{B}^*$ – матрица, включающая элементы матрицы $\boldsymbol{B}$ и коэффициенты усиления k_i, $i = 1 \ldots n$.

При ступенчатом законе $\boldsymbol{U}(t) = 1(t)$ (где $1(t) = 0$ при $t < 0$, $1(t) = 1$ при $t \geqslant 0$) правую часть выражения (3) представим так:

$$\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{U}(t) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{B}_1)^{\mathrm{T}} 1(t)\,, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{0}$ – нулевой вектор размерностью n, $\boldsymbol{B}_1$ – вектор размерностью n, компоненты которого содержат введенные коэффициенты усиления k_i.

При линейном законе управления $\boldsymbol{U}(t) = (1(t), t)^{\mathrm{т}}$, правую часть (3) представим таким образом:

$$\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{U}(t) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{B}_1)^{\mathrm{T}} 1(t) + (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{B}_2)^{\mathrm{T}} t\,, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{B}_2$ – вектор размерностью n, компоненты которого также содержат введенные коэффициенты усиления k_i.

Необходимость введения коэффициентов усиления обоснована тем, что действующая СМК не находится в стабильном состоянии, наоборот, ей присущи постоянные переходные процессы обусловленные изменением целей в области качества. В связи с этим, для фактического достижения требуемых значений целевых показателей необходимо задавать в планах их повышенные значения. Отметим, что действующие СМК являются устойчивыми, то есть собственные значения матрицы $\boldsymbol{A}$, входящей в выражения (1) и (3), имеют отрицательные действительные части.

Хотя векторы $\boldsymbol{B}_1$ различаются в выражениях (4) и (5), однако схожая структура этих выражений позволяет представить систему (2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(\mathrm{t}) = \exp^{\boldsymbol{A}\mathrm{t}}(\boldsymbol{X}(0) + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}^{-2}\boldsymbol{B}_2) - \\ - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{A}^{-2}\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}_2\mathrm{t} \end{aligned}\,. \tag{6}$$

Решения (6) системы уравнений (3) для каждой составляющей вектора $\boldsymbol{X}$ являются функциями не только времени t, но и введенных коэффициентов усиления $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(t, k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Это позволяет использовать стандартный метод поиска экстремумов функции многих переменных для нахождения оптимальных решений.

В работе [4] при постановке задачи оптимизации с использованием функции потерь качества Тагути [5] было предложено определять минимум функционала I ($I \rightarrow \min$) $I = V_t + L_1 + L_2$ следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathrm{I} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \rho_{\mathrm{i}}(\mathrm{x}_{(1),\mathrm{i}}(\mathrm{T}) - [\mathrm{x}_{(1),\mathrm{i}}])^2 + \\ + \int_0^{\mathrm{T}} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \beta_{\mathrm{i}}(\mathrm{x}_{(1),\mathrm{i}}(\theta) - [\mathrm{x}_{(1),\mathrm{i}}])^2 \mathrm{d}(\theta) + \\ + \int_0^{\mathrm{T}} \sum_{\mathrm{i}=\mathrm{n}+1}^{2\mathrm{n}} \mathrm{K}_{\mathrm{i}}(\mathrm{u}(\theta)_{\mathrm{i}} - \mathrm{u}_{\mathrm{st},\mathrm{i}})^2 \mathrm{d}(\theta) \end{aligned}\,, \tag{7}$$

где ρ_i и β_i – параметры, определяющие затраты, связанные с отклонениями каждой цели в области качества на конец планового периода, и в течение него, соответственно ($i = 1 \ldots n$); K_i – параметры, определяющие затраты, связанные с отклонениями величин управляющих воздействий от статических управляющих воздействий, для достижения поставленных целей в переходных процессах ($i = n + 1 \ldots 2n$); $\boldsymbol{U}_{st}$ – вектор управляющих воздействий, определенный при решении задач статики и квазистатики качества из (1) из условия достижения значений поставленных целей $[\boldsymbol{X}_{(1)}]$ при $d\boldsymbol{X}(t)/dt = 0$.

ИССЛЕДОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА И ЕГО СОСТАВЛЯЮЩИХ ПРИ СТУПЕНЧАТОМ ЗАКОНЕ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим на примере характер поведения этого функционала, являющегося суммой составляющих, определенных выражением (7). При анализе фактических результатов деятельности предприятия ЗАО «Салют» [7] в работе [2] были выделены две цели в области качества ($n = 2$).

Начальные значения в 2017 году составили: для целей в области качества предприятия $x_1(0) = 0.206$, $x_2(0) = 0.90$; для скоростей их достижения $x_3(0) = 0.008$, $x_4(0) = 0.02$. Фактические значения целей в области качества, которые были достигнуты к концу 2017 года: $[x_1] = 0.233$; $[x_2] = 0.93$. Плановый период времени $T = 1$ год. Подход к определению составляющих матрицы $\boldsymbol{A}$ представлен в [3], а сама матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.815 & 0.090 & -0.889 & 0.094 \\ 0.750 & -0.896 & 0.818 & -0.938 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

При ступенчатом законе управления коэффициенты матрицы управляющих воздействий $\boldsymbol{B}^*$, обеспечивающие фактическую достижимость поставленных целей x_1 и x_2 для выражения (4), определяются так:

$$b_{1,31} = 0.190k_1 - 0.084k_2,\ b_{1,41} = = -0.175k_1 + 0.883k_2, \quad (9)$$

где k_1 и k_2 – коэффициенты усиления управляющих воздействий для целей x_1 и x_2, соответственно.

Часть системы уравнений (6) для поставленных целей представляет собой выражения:

$$\begin{aligned} x_1(t) = [&0.530F_1{\cdot}\sin(0.873t + 1.021) - \\ &- 0.208F_2{\cdot}\sin(0.873t + 0.977) + \\ &+ 0.374{\cdot}10^{-3}{\cdot}\sin(0.873t + 1.103)]e^{-0.596t} + \\ &+ [0.619F_1{\cdot}\sin(0.701t + 1.088) + \\ &+ 0.189F_2{\cdot}\sin(0.701t + 1.152) + \\ &+ 0.011{\cdot}\sin(0.701t - 0.029)]e^{-0.318t} - F_1 + 0.206; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = [&-1.737F_1{\cdot}\sin(0.873t + 0.979) + \\ &+ 0.682F_2{\cdot}\sin(0.873t + 0.935) - \\ &- 0.123{\cdot}10^{-2}{\cdot}\sin(0.873t + 1.061)]\, e^{-0.596t} + \\ &+ [1.575F_1{\cdot}\sin(0.701t + 1.155) + \\ &+ 0.481F_2{\cdot}\sin(0.701t + 1.219) + \\ &+ 0.029{\cdot}\sin(0.701t + 0.037)]\, e^{-0.318t} - F_2 + 0.900, \end{aligned} \quad (11)$$

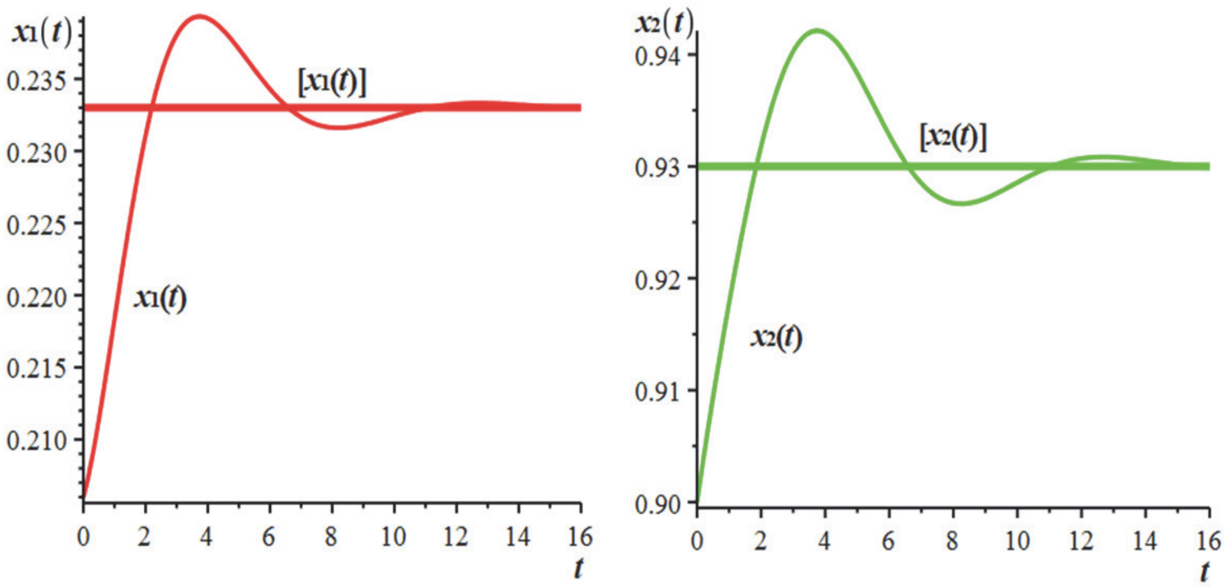
где $F_1 = 0.206 - 0.233k_1$, $F_2 = 0.9 - 0.930k_2$.

На рис. 1 представлено изменение целей x_1 и x_2 во времени при коэффициентах усиления управляющих воздействий $k_1 = k_2 = 1$ для ступенчатого закона управления.

Как видно из рис. 1, обе цели в течение планового периода времени не достигаются. Первый момент достижения плановых значений показателей соответствует $t \approx 2.2$ года для первой цели, и $t \approx 1.9$ года – для второй цели. Минимальные значения коэффициентов $k_1 = 1.25$ и $k_2 = 1.1$, обеспечивают достижение требуемых значений целей в области качества при $t = 1$ год, что связано не с выходом на установившийся режим, а с первым достижением значений поставленных целей при затухающих колебаниях, происходящих от начальных значений переменных x_1 и x_2 к их плановым значениям.

На рис. 2 представлены графики зависимостей всех частей функционала $I = I(k_1, k_2)$ – при принятых значениях весовых коэффициентов затрат: $\rho_1 = \rho_2 = \beta_1 = \beta_2 = K_1 = K_2 = 1$, т.е. при условии равных удельных затрат на потери качества и управление, вызванные их отклонениями от номинальных значений.

Составляющие функционала I при приведенном выше равенстве единице значений весовых



а) б)

Рис. 1. Результаты моделирования целей в области качества при ступенчатом законе управления ($k_1 = k_2 = 1$): а) цель x_1; б) цель x_2

Fig. 1. The results of modeling quality goals with a step-by-step control law ($k_1 = k_2 = 1$): a) goal x_1; b) goal x x_2

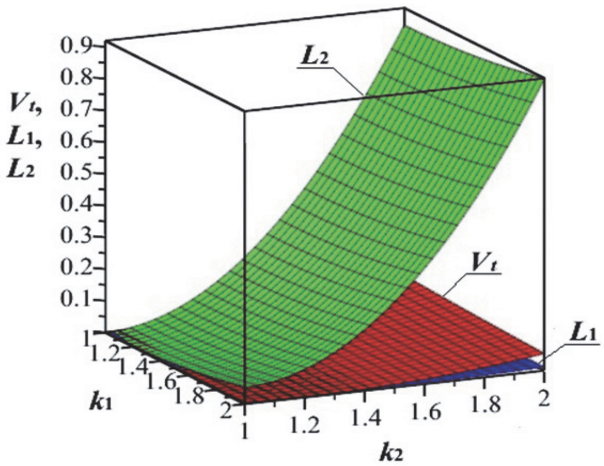


Рис. 2. Графики зависимостей составляющих функционала I при ступенчатом законе управления и условии равных удельных затрат на потери качества и управление: $\rho_1 = \rho_2 = \beta_1 = \beta_2 = K_1 = K_2 = 1$

Fig. 2. Graphs of the dependencies of the components of functional I with a stepwise control law and the condition of equal unit costs for quality loss and management: $\rho_1 = \rho_2 = \beta_1 = \beta_2 = K_1 = K_2 = 1$

коэффициентов удельных затрат на управление имеют вид:

$$V_t = 0.613\cdot10^{-2}k_1^2 + 0.081k_2^2 - (0.027k_2 - 0.013)k_1 - 0.142k_2 + 0.068, \quad (12)$$

$$L_1 = 0.148\cdot10^{-2}k_1^2 + 0.019k_2^2 - (0.663k_2 - 0.337)10^{-2}k_1 - 0.034k_2 + 0.018, \quad (13)$$

$$L_2 = 0.054(1 - k_1)^2 + 0.865(1 - k_2)^2. \quad (14)$$

Минимальные значения терминальной части V_t функционала определялись из решения системы уравнений $\partial V_t/\partial k_1 = 0$ и $\partial V_t/\partial k_2 = 0$, при соответствующих условиях определяемых вторыми производными, в области действительных чисел и условия $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ для $\rho_1, \rho_2 \in (0..2]$. Полученные минимальные значения $V_{t\min}$, которым соответствуют значения коэффициентов $k_1 = 1.246$ и $k_2 = 1.079$ при достигнутых требуемых значениях целей $[x_1] = 0.233$ и $[x_2] = 0.93$, представлены в табл. 1.

Минимальные значения составляющей L_1 функционала I определялись из решения системы уравнений $\partial L_1/\partial k_1 = 0$ и $\partial L_1/\partial k_2 = 0$ в области действительных чисел и условия $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ для $\beta_1, \beta_2 \in (0..2]$. Полученные минимальные зна-

Таблица 1. Минимальные значения составляющей $V_{t\min}$ функционала I при ступенчатом законе управления

	ρ_2=0.1	ρ_2=0.5	ρ_2=1	ρ_2=1.5	ρ_2=2
ρ_1=0.1	$1.96\cdot10^{-21}$	$9.61\cdot10^{-21}$	$1.121\cdot10^{-20}$	$7.764\cdot10^{-20}$	$1.289\cdot10^{-20}$
ρ_1=0.5	10^{-21}	$2.04\cdot10^{-20}$	$1.55\cdot10^{-20}$	$3.36\cdot10^{-20}$	$2.36\cdot10^{-20}$
ρ_1=1	$4.4\cdot10^{-21}$	$2.04\cdot10^{-20}$	$1.96\cdot10^{-20}$	$2\cdot10^{-20}$	$1.49\cdot10^{-20}$
ρ_1=1.5	10^{-21}	$8\cdot10^{-22}$	10^{-20}	$2\cdot10^{-20}$	$2\cdot10^{-20}$
ρ_1=2	10^{-21}	$2\cdot10^{-20}$	$1.84\cdot10^{-20}$	$2\cdot10^{-20}$	$3.84\cdot10^{-20}$

Таблица 2. Минимальные значения составляющей $L_{1\min}$ функционала I при ступенчатом законе управления

	β_2=0.1	β_2=0.5	β_2=1	β_2=1.5	β_2=2
β_1=0.1	$0.580\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.486$ $k_2 = 1.171$	$1.807\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.422$ $k_2 = 1.161$	$3.329\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.343$ $k_2 = 1.148$	$4.841\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.266$ $k_2 = 1.136$	$6.342\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.190$ $k_2 = 1.124$
β_1=0.5	$1.669\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.499$ $k_2 = 1.171$	$2.9\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.486$ $k_2 = 1.171$	$4.437\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.470$ $k_2 = 1.168$	$5.971\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.454$ $k_2 = 1.166$	$7.503\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.438$ $k_2 = 1.163$
β_1=1	$3.030\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.500$ $k_2 = 1.169$	$4.262\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.494$ $k_2 = 1.172$	$5.8\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.486$ $k_2 = 1.171$	$7.338\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.478$ $k_2 = 1.170$	$8.874\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.470$ $k_2 = 1.168$
β_1=1.5	$4.391\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.500$ $k_2 = 1.167$	$5.623\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.497$ $k_2 = 1.172$	$7.162\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.492$ $k_2 = 1.171$	$8.701\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.486$ $k_2 = 1.171$	$10.238\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.481$ $k_2 = 1.170$
β_1=2	$5.752\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.499$ $k_2 = 1.165$	$6.984\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.498$ $k_2 = 1.171$	$8.524\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.494$ $k_2 = 1.172$	$10.063\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.490$ $k_2 = 1.171$	$11.601\cdot10^{-4}$ при $k_1 = 1.486$ $k_2 = 1.171$

чения $L_{1\min}$, которым соответствуют значения коэффициентов k_1 и k_2 , представлены в табл. 2. При этом только при $\beta_1 = 0.1$ и $\beta_2 = 2$ на конец года первая цель не достигается: $[x_1] = 0.228$. В остальных случаях $0.233 \leqslant [x_1] \leqslant 0.248$. Вторая цель достижима при всех рассматриваемых значениях β_1 и β_2: $0.944 \leqslant [x_2] \leqslant 0.946$.

Минимальные значения составляющей L_2 функционала I определялись из решения системы уравнений $\partial L_2/\partial k_1 = 0$ и $\partial L_2/\partial k_2 = 0$ в области действительных чисел и условия $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ для $K_1, K_2 \in (0..2]$. Полученные минимальные значения $L_{2\min}$ совпадают при всех $K_1, K_2 \in (0..2]$, и равны нулю. При этом им соответствуют одинаковые значения коэффициентов $k_1 = k_2 = 1$, т.е. обе цели на конец года недостижимы: для всех случаев $[x_1] = 0.218$, $[x_2] = 0.918$.

Сам функционал $I(k_1,k_2)$ при принятых значениях весовых коэффициентов удельных затрат: $\rho_1 = \rho_2 = \beta_1 = \beta_2 = K_1 = K_2 = 1$, имеет вид:

$$I = 0.062k_1^2 + 0.965k_2^2 - (0.092 + 0.033k_2)k_1 - 1.906k_2 + 1.006. \qquad (15)$$

Минимальное значение функционала $I_{\min} = 0.126 \cdot 10^{-2}$ соответствует значениям коэффициентов усиления $k_1 = 1.011$, $k_2 = 1.005$, при которых обе цели в области качества не достижимы на конец года.

В определенной ранее области достижимости целей (ОДЦ) для значений коэффициентов $k_1 = 1.25$ и $k_2 = 1.1$, минимальное значение функционала составляет $I_{\min} = 0.127 \cdot 10^{-1}$.

ИССЛЕДОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА И ЕГО СОСТАВЛЯЮЩИХ ПРИ ЛИНЕЙНОМ ЗАКОНЕ УПРАВЛЕНИЯ

При линейном законе управления коэффициенты матрицы управляющих воздействий $\boldsymbol{B}^*$, обеспечивающие фактическую достижимость поставленных целей x_1 и x_2 для выражения (5) определяются так:

$$b_{2,31} = 0.190k_1 - 0.084k_2 - 0.087,$$
$$b_{2,41} = -0.175k_1 + 0.883k_2 - 0.652, \qquad (16)$$

а система (3) при линейном законе управления имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.815 & 0.090 & -0.889 & 0.094 \\ 0.750 & -0.896 & 0.818 & -0.938 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.087 \\ 0.652 \end{pmatrix} 1(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{2,31} \\ b_{2,41} \end{pmatrix} t. \qquad (17)$$

Соответствующая часть системы (6) для рассматриваемых целей представляет собой:

$$\begin{aligned} x_1(t) = {} & [0.530 \cdot H_1 \cdot \sin(0.873t + 1.021) - \\ & - 0.208 \cdot H_2 \cdot \sin(0.873t + 0.977) + \\ & + 0.509 \cdot H_3 \cdot \sin(0.873t + 0.070) - \\ & 0.195 \cdot H_4 \cdot \sin(0.873t - 0.013)]\, e^{-0.596t} + \\ & + [0.619 \cdot H_1 \cdot \sin(0.701t + 1.088) + \\ & + 0.189 \cdot H_2 \cdot \sin(0.701t + 1.152) + \qquad (18) \\ & + 0.808 \cdot H_3 \cdot \sin(0.701t - 0.044) + \\ & + 0.243 \cdot H_4 \cdot \sin(0.701t - 0.010)]\, e^{-0.318t} - \\ & - t \cdot (H_3 - 0.008) - H_1 + 0.206; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = {} & [-1.737 \cdot H_1 \cdot \sin(0.873t + 0.979) + \\ & + 0.682 \cdot H_2 \cdot \sin(0.873t + 0.935) - \\ & - 1.668 \cdot H_3 \cdot \sin(0.873t + 0.028) + \\ & + 0.638 \cdot H_4 \cdot \sin(0.873t - 0.055)]\, e^{-0.596t} + \\ & + [1.575 \cdot H_1 \cdot \sin(0.701t + 1.155) + \qquad (19) \\ & + 0.481 \cdot H_2 \cdot \sin(0.701t + 1.219) + \\ & + 2.058 \cdot H_3 \cdot \sin(0.701t + 0.022) + \\ & + 0.620 \cdot H_4 \cdot \sin(0.701t + 0.056)]\, e^{-0.318t} - \\ & - t \cdot (H_4 - 0.02) - H_2 + 0.900, \end{aligned}$$

где $H_1 = -0.225 + 0.254k_1 + 0.0003k_2$, $H_2 = -0.942 + 0.00003k_1 + 0.974k_2$, $H_3 = 0.214 - 0.233k_1$, $H_4 = 0.920 - 0.930k_2$.

На рис. 3 представлено изменение целей x_1 и x_2 во времени при коэффициентах усиления управляющих воздействий $k_1 = k_2 = 1$ при линейном законе управления.

Из рис. 3 видно, что обе цели в течение планового периода также не достигаются. Оба плановых значения показателей достигаются лишь при $t > 2.2$ года.

На рис. 4 представлены графики зависимостей всех частей функционала $I^* = I^*(k_1, k_2)$ при принятых значениях весовых коэффициентов удельных затрат: $\rho_1 = \rho_2 = \beta_1 = \beta_2 = K_1 = K_2 = 1$ для линейного закона управления.

В аналитическом виде для линейного закона управления составляющие функционала I^* при приведенном выше равенстве единице значений весовых коэффициентов удельных затрат на управление имеют вид:

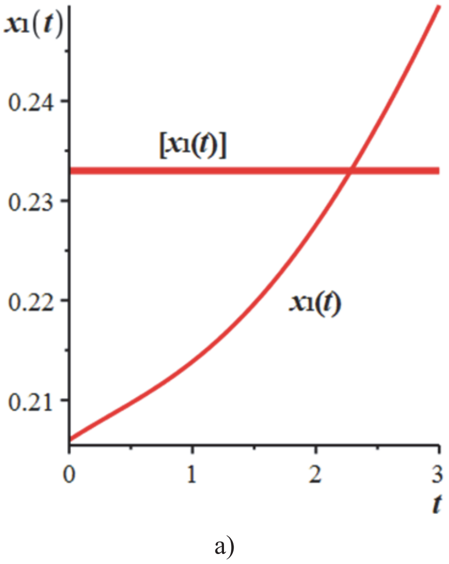
$$V_t^* = 0.892 \cdot 10^{-3}k_1^2 + 0.011k_2^2 - (0.406k_2 - 0.187)10^{-2}k_1 - 0.021k_2 + 0.118, \qquad (20)$$

$$L_1^* = 0.141 \cdot 10^{-3}k_1^2 + 0.172 \cdot 10^{-2}k_2^2 - (0.648k_2 - 0.271)10^{-3}k_1 - 0.367 \cdot 10^{-2}k_2 + 0.323 \cdot 10^{-2}, \qquad (21)$$

$$L_2^* = L_2. \qquad (22)$$

Минимальные значения терминальной части V_t^* функционала также определялись из решения системы уравнений $\partial V_t^*/\partial k_1 = 0$ и $\partial V_t^*/\partial k_2 = 0$ в области действительных чисел и условия $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ для $\rho_1, \rho_2 \in (0..2]$. Полученные минимальные значения $V^*_{t\min}$, которым соответствуют значения коэффициентов $k_1 = 1.887$ и $k_2 = 1.290$, а также достигнутые требуемые значения целей $[x_1] = 0.233$ и $[x_2] = 0.93$, представлены в табл. 3.

Минимальные значения составляющей L_1^* функционала I^* определялись из решения системы уравнений $\partial L_1^*/\partial k_1 = 0$ и $\partial L_1^*/\partial k_2 = 0$ в области действительных чисел и условия $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ для $\beta_1, \beta_2 \in (0..2]$. Полученные минимальные значения $L_1^*{}_{\min}$, которым соответствуют значения коэффициентов k_1 и k_2, представлены в табл. 4. Обе цели достижимы при любых β_1, β_2 из указанного интервала: $0.237 \leqslant [x_1] \leqslant 0.250$, $0.945 \leqslant [x_2] \leqslant 0.946$. Однако следует отметить, что здесь, по сравне-



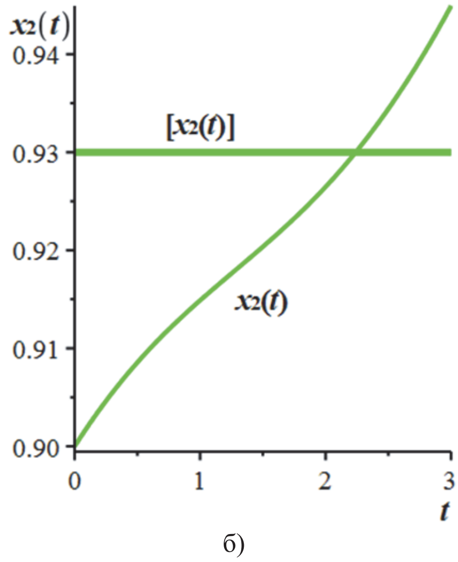


Рис. 3. Результаты моделирования целей в области качества при линейном законе управления ($k_1 = k_2 = 1$): а) цель x_1; б) цель x_2

Fig. 3. The results of modeling quality goals with a linear control law ($k_1 = k_2 = 1$): a) goal x_1; b) goal x_2

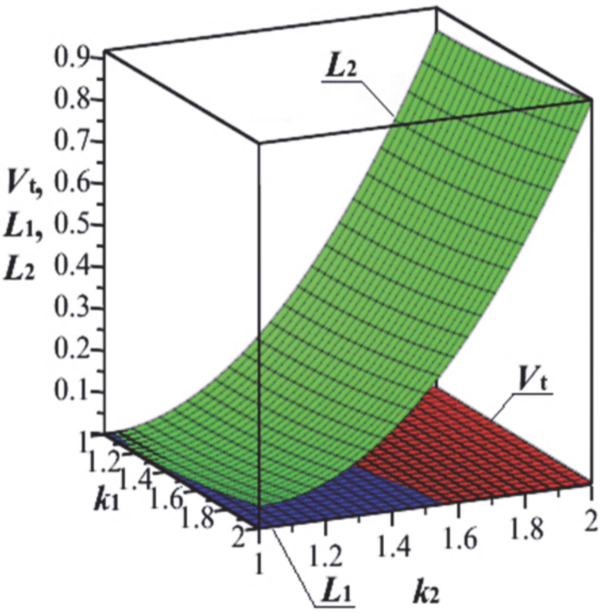


Рис. 4. Графики зависимостей составляющих функционала I^* при линейном законе управления

Fig. 4. Graphs of the dependencies of the components of the functional I^* with a linear control law

нию со ступенчатым законом управления, значения коэффициентов усиления намного выше: так, если при ступенчатом законе максимальное значение коэффициента $k_1 = 1.5$ и $k_2 = 1.172$, то для линейного закона и приведенных β_1 и β_2 они составляют: $k_1 = 1.683$ и $k_2 = 1.573$.

Минимальные значения составляющей L_2^* функционала I^* определялись из решения системы уравнений $\partial L_2^*/\partial k_1 = 0$ и $\partial L_2^*/\partial k_2 = 0$ в области действительных чисел и условия $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ для $K_1, K_2 \in (0..2]$. Полученные минимальные значения $L^*_{2\ min}$, также, как и при ступенчатом законе управления, совпадают при всех $K_1, K_2 \in (0..2]$, и равны нулю. При этом им соответствуют одинаковые значения коэффициентов $k_1 = k_2 = 1$, т.е. обе цели на конец года недостижимы: для всех случаев $[x_1] = 0.214$, $[x_2] = 0.915$.

Общий функционал $I^*(k_1,k_2)$ при принятых значениях весовых коэффициентов удельных затрат на управление, равных единице, имеет вид:

$$I^* = 0.055k_1^2 + 0.878k_2^2 - (0.106 + 0.471 \cdot 10^{-2}k_2)k_1 - 1.755k_2 + 0.934. \quad (23)$$

Минимальное значение функционала $I^*_{min} = 0.163 \cdot 10^{-2}$ достигается при значениях коэффициентов усиления $k_1 = 1.005$, $k_2 = 1.002$, при которых обе цели в области качества не достижимы на конец года. В определенной ранее ОДЦ для значе-

Таблица 3. Минимальные значения составляющей V^*_{tmin} функционала I^* при линейном законе управления

	ρ_2=0.1	ρ_2=0.5	ρ_2=1	ρ_2=1.5	ρ_2=2
ρ_1=0.1	$1.16 \cdot 10^{-21}$	$2.26 \cdot 10^{-20}$	$3.97 \cdot 10^{-20}$	$7.29 \cdot 10^{-21}$	10^{-23}
ρ_1=0.5	$8.6 \cdot 10^{-22}$	$5.97 \cdot 10^{-21}$	$1.16 \cdot 10^{-20}$	$3.33 \cdot 10^{-21}$	$6.8 \cdot 10^{-22}$
ρ_1=1	10^{-22}	10^{-22}	$1.16 \cdot 10^{-20}$	$9 \cdot 10^{-22}$	$9 \cdot 10^{-22}$
ρ_1=1.5	0	$6.1 \cdot 10^{-21}$	$1.28 \cdot 10^{-20}$	0	0
ρ_1=2	$1.2 \cdot 10^{-21}$	0	$8 \cdot 10^{-22}$	$6 \cdot 10^{-22}$	$1.5 \cdot 10^{-21}$

Таблица 4. Минимальные значения составляющей $L_{1\ \min}^{*}$ функционала I^{*} при линейном законе управления

	β_2=0.1	β_2=0.5	β_2=1	β_2=1.5	β_2=2
β_1=0.1	$7.049\cdot10^{-5}$ при k_1 = 2.661 k_2 = 1.572	$2.141\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.549 k_2 = 1.553	$3.933\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.410 k_2 = 1.530	$5.722\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.272 k_2 = 1.506	$7.508\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.135 k_2 = 1.483
β_1=0.5	$2.087\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.682 k_2 = 1.572	$3.524\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.661 k_2 = 1.572	$5.320\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.633 k_2 = 1.567	$7.115\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.605 k_2 = 1.563	$8.910\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.577 k_2 = 1.558
β_1=1	$3.815\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.683 k_2 = 1.569	$5.253\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.674 k_2 = 1.573	$7.049\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.661 k_2 = 1.572	$8.845\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.647 k_2 = 1.570	$10.640\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.633 k_2 = 1.567
β_1=1.5	$5.543\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.683 k_2 = 1.565	$6.981\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.679 k_2 = 1.573	$8.777\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.670 k_2 = 1.573	$10.573\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.661 k_2 = 1.572	$12.369\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.651 k_2 = 1.570
β_1=2	$7.271\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.682 k_2 = 1.561	$8.709\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.681 k_2 = 1.573	$10.505\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.674 k_2 = 1.573	$12.301\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.668 k_2 = 1.573	$14.098\cdot10^{-4}$ при k_1 = 2.661 k_2 = 1.572

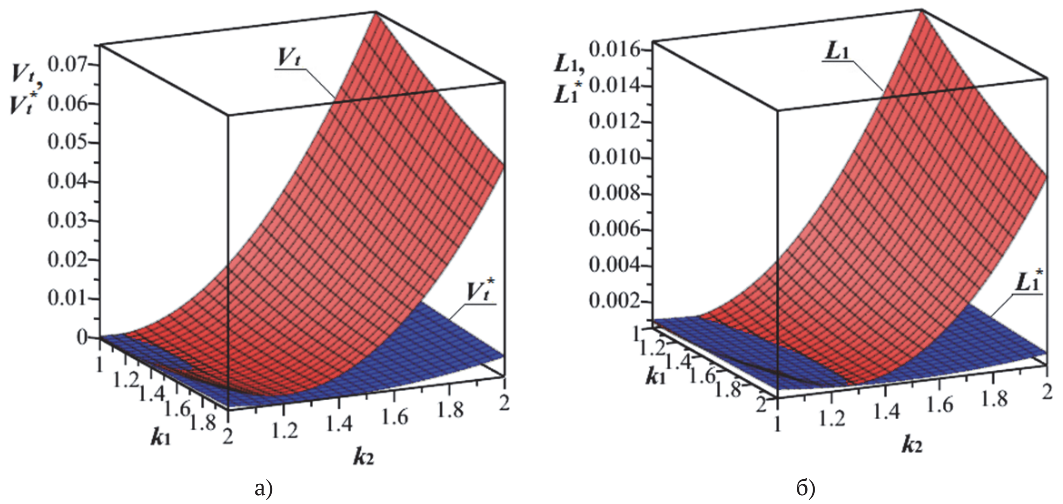
ний коэффициентов k_1 = 1.9 и k_2 = 1.3, минимальное значение функционала составляет $I^{*}_{\min}$ = 0.123.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 5 представлены графики зависимостей составляющих: $V_t(k_1,k_2)$,$V^{*}_t(k_1,k_2)$, $L_1(k_1,k_2)$ и $L_1^{*}(k_1,k_2)$ функционалов I и I^{*} при двух законах управления.

Графики зависимостей $L_2(k_1,k_2)$ и $L_2^{*}(k_1,k_2)$ на рис. 5 не представлены, т.к. полностью совпадают друг с другом.

Итак, для рассмотренной математической модели при целевом управлении в области качества являющейся системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, представлены решения для ступенчатого и линейного законов управления. Это позволило использовать стандартный метод поиска экстремумов функции многих переменных для нахождения оптимальных решений без использования вариационного исчисления. Рассмотрен пример применения классического квадратичного функционала, соответствующего



а) б)

Рис. 5. Графики зависимостей составляющих функционалов I и I^{*} при двух законах управления: а) $V_t(k_1,k_2)$ и $V^{*}_t(k_1,k_2)$ при $\rho_1 = \rho_2 = 1$; б) $L_1(k_1,k_2)$ и $L_1^{*}(k_1,k_2)$ при $\beta_1 = \beta_2 = 1$

Fig. 5. Graphs of the dependencies of the components of the functionals I and I^{*} for two control laws: a) $V_t(k_1,k_2)$ and $V^{*}_t(k_1,k_2)$ for $\rho_1 = \rho_2 = 1$; b) $L_1(k_1,k_2)$ and $L_1^{*}(k_1,k_2)$ for $\beta_1 = \beta_2 = 1$

функции потерь качества Тагути, с использованием фактических данных по результатам деятельности промышленного предприятия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты моделирования подтвердили, что для достижения поставленных целей в течение планового периода времени необходимо задавать их повышенные значения. При этом для линейного закона управления значения коэффициентов усиления (k_1 = 1.683 и k_2 = 1.573) выше, чем для ступенчатого закона управления (k_1 = 1.5 и k_2 = 1.172), хотя линейный закон предполагает более «спокойную» работу по выполнению плановых показателей. Применение этих законов в практике СМК безусловно связано со стилем управления и корпоративной культурой. При ступенчатом законе управления руководство предприятия имеет некоторые основания требовать выполнения плановых показателей уже на следующий день после их утверждения, то есть в течение всего планового периода времени. Использование функции потерь качества Тагути позволило раскрыть различие между двумя подходами, используемыми в практике планирования. При первом походе необходимо безусловное достижение утвержденных показателей, а второй подход допускает некоторое их недовыполнение при снижении затрат. Существенный интерес представляет отдельное исследование составляющей функционала, определяемой способами реализации управляющих воздействий в социально-экономических системах и соответствующими им затратами на управление, в частности взаимосвязи между коэффициентами усиления в матрице параметров управления и элементами системной матрицы, отражающими сопротивление персонала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Анцев В.Ю., Иноземцев А.Н.* Всеобщее управление качеством: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности 220501 Управление качеством. Тула: ТулГУ, 2005. 243 с.
2. Аникеева *О.В., Ивахненко А.Г., Сторублев М.Л.* Моделирование влияния значений параметров взаимодействия потенциала и организационного сопротивления на достижимость целей в области качества при ступенчатом виде управления // Известия ТулГУ. Технические науки. 2020. Вып. 10. С. 3-9.
3. *Аникеева О.В., Ивахненко А.Г.* Обеспечение достижимости целей в области качества с помощью целенаправленного изменения значений показателей подсистем промышленных предприятий при линейном законе управления // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2020. № 6 (344) С. 156-165.
4. *Ивахненко А.Г., Аникеева О.В.* Постановка задачи оптимизации при управлении качеством в пространстве состояний // Избранные научные труды двадцатой Международной научно-практической конференции «Управление качеством». М.: Пробел-2000, 2021. С. 154-159.
5. *Taguchi Genichi, Subir Chowdhury, Yuin Wu.* Taguchi's Quality Engineering Handbook. Wiley-Interscience. 2004. 1696 p.
6. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. 3-е изд. СПб: Лань, 2003. 447 с.
7. *Максимова Н.А.* Разработка методов и моделей принятия оптимальных управленческих решений для обеспечения организационной устойчивости предприятий текстильной и легкой промышленности на базе совершенствования организации складского хозяйства: дисс. … канд. техн. наук. Санкт-Петербург, 2019. 154 с.

REFERENCES

1. *Antsev V.Yu., Inozemtsev A.N.* Vseobshchee upravlenie kachestvom: uchebnoe posobie [Total Quality Management]. Tula, TSU, 243 p. (in Russ.).
2. *Anikeeva O.V., Ivakhnenko A.G., Storublev M.L.* [Modeling the influence of the values of the interaction parameters of potential and organizational resistance on achievement of goals in the area of quality with step-by-step control] // *Izvestiya Tula State University. Technical sciences*, 2020, no. 10, pp. 3-9. (in Russ.).
3. *Anikeeva O.V., Ivakhnenko A.G.* [Ensuring the achievability of quality goals by purposefully changing the values of indicators of industrial enterprises subsystems under the linear management law] // Fundamental and applied problems of engineering and technology, no. 6 (344), 2020, pp. 156-165. (in Russ.).
4. *Ivakhnenko A.G., Anikeeva O.V.* [Setting optimization problem in quality management in the state space] // Izbrannye nauchnye trudy dvadcatoj Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii «Upravlenie kachestvom». Moscow: Probel-2000, 2021, pp. 154-159. (in Russ.).
5. *Taguchi Genichi, Subir Chowdhury, Yuin Wu.* Taguchi's Quality Engineering Handbook. Wiley-Interscience. 2004. 1696 p.
6. *Fedoryuk M.V.* Obyknovennye differencial'nye uravneniya [Ordinary differential equations]. St. Petersburg: Lan', 2003, 447 p. (in Russ.).
7. *Maksimova N.A.* Razrabotka metodov i modelej prinyatiya optimal'nyh upravlencheskih reshenij dlya obespecheniya organizacionnoj ustojchivosti predpriyatij tekstil'noj i legkoj promyshlennosti na baze sovershenstvovaniya organizacii skladskogo hozyajstva [Development of methods and models for making optimal management decisions to ensure the organizational stability of textile and light industry enterprises on the basis of improving the organization of warehouse management]: PhD thesis. St. Petersburg, 2019, 154 p. (in Russ.).

OPTIMUM MANAGEMENT IN ACHIEVING THE INDUSTRIAL QUALITY GOALS

© 2021 A.G. Ivakhnenko, O.V. Anikeeva

Southwest State University, Kursk, Russia

A mathematical model for targeted control in the field of quality, which is a system of ordinary differential equations with constant coefficients, is considered. The solutions of this system are given for the most common stepwise and linear control laws in practice. An example of optimization based on the classical quadratic functional corresponding to the Taguti quality loss function is considered, using actual data based on the results of an industrial enterprise.
Keywords: optimal management, quality goals, mathematical model, functional.

DOI: 10.37313/1990-5378-2021-23-4-18-26

Alexander Ivakhnenko, Doctor of Technical Sciences, Professor at the Department of Mechanical Engineering Technologies and Equipment.
E-mail: ivakhnenko2002@mail.ru
Olesya Anikeeva, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Design and Fashion Industry.
E-mail: olesya-anikeeva@yandex.ru