УДК 517.9 : 62-50

УПРАВЛЯЕМОСТЬ, НАБЛЮДАЕМОСТЬ, СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

© 2021 М.М. Семенова

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 18.10.2021

В статье излагается метод декомпозиции нелинейных разнотемповых систем, основанный на теории интегральных многообразий быстрых и медленных движений. Исследуется управляемость, наблюдаемость, стабилизируемость системы вблизи начала координат. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: декомпозиция многотемповых систем, интегральное многообразие, управляемость, наблюдаемость, устойчивость, стабилизируемость, асимптотические разложения.

DOI: 10.37313/1990-5378-2021-23-6-111-115

ВВЕДЕНИЕ

В связи с интенсивным развитием промышленности, электроэнергетики, теории нелинейных колебаний, автоматического регулирования, оптимальных процессов развивается теория сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и ее методы активно применяются для решения задач из различных областей естествознания и техники. Для анализа нелинейных разнотемповых систем применяется метод декомпозиции, основанный на теории интегральных многообразий быстрых и медленных движений. Декомпозиция подразумевает частотное разделение движений на быстрые и медленные. Данная работа посвящена изучению свойств управляемости, наблюдаемости, стабилизируемости трехтемповой нелинейной автономной системы.

Цель работы:

- Понижение размерности задачи управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости нелинейной трехтемповой автономной системы так, чтобы модель меньшей размерности с большой степенью точности отражала все свойства исходной системы.
- Получение достаточных условий, управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости сингулярно возмущенных систем.

РАСЩЕПЛЯЮЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Рассмотрим модель трехтемповой системы вида:

$$\varepsilon\ddot{y} - a_1(y,z,\dot{y},\dot{z},\varepsilon,\mu) = b_1(y,z,\varepsilon,\mu)u,$$
$$\varepsilon\mu\ddot{z} - a_2(y,z,\dot{y},\dot{z},\varepsilon,\mu) = b_2(y,z,\varepsilon,\mu)u,$$
$$w = \phi(y,z,\varepsilon,\mu), \qquad (1)$$

Семенова Марина Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. E-mail: semenova73@bk.ru

где $y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_1}, z \in Z \subset \mathbb{R}^{n_2}$ – переменные состояния, $u \in U \subset \mathbb{R}^r$ – управляющие воздействия, $w \in V \subset \mathbb{R}^p$ – измеряемая координата, $a_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, a_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, \phi \in \mathbb{R}^p$ – векторные функции, b_1, b_2 – матричные функции соответствующих размерностей, равномерно непрерывные и ограниченные с достаточным числом частных производных по всем аргументам, ε, μ – малые положительные параметры, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0], \mu \in (0,\mu_0], t \in \mathbb{R}$.

Введем обозначения, $x_1 = \dot{y}, x_2 = \dot{z}$. Получим трехтемповую систему:

$$\dot{y} = x_1, \dot{z} = x_2, \varepsilon\dot{x}_1 = a_1(y,z,x_1,x_2,\varepsilon,\mu)$$
$$+b_1(y,z,\varepsilon,\mu)u, \varepsilon\mu\dot{x}_2 = a_2(y,z,x_1,x_2,\varepsilon,\mu)$$
$$+b_2(y,z,\varepsilon,\mu)u, w = \phi(y,z,\varepsilon,\mu). \qquad (2)$$

Пусть для системы (2) выполняются следующие условия [1,2]:

Уравнение $a_2(y,z,x_1,x_2,0,0) = 0$ имеет изолированное решение $x_2 = h_2^{(0,0)}(y,z,x_1)$.

В области $\Omega = \{(y,z,x_1,x_2,\varepsilon,\mu): \left\|x_2 - h_2^{(0,0)}(y,z,x_1)\right\| \le \rho_2, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0], \mu \in (0,\mu_0]\}$ функции $h_2^{(0,0)}$, a_1, a_2 имеют достаточное число равномерно непрерывных и ограниченных частных производных по всем переменным.

Собственные значения

$$\lambda_i = \lambda_i(y,z,x_1), i = \overline{1,m}$$

матрицы

$$\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\left(y,z,x_1,h_2^{(0,0)}(y,z,x_1),0,0\right)$$

удовлетворяют неравенству

$$Re\,\lambda_i \le -\beta_1 < 0.$$

При выполнении таких условий система $\dot{y} = x_1, \dot{z} = x_2, \varepsilon\dot{x}_1 = a_1(y,z,x_1,x_2,\varepsilon,\mu)$, $\varepsilon\mu\dot{x}_2 = a_2(y,z,x_1,x_2,\varepsilon,\mu)$, имеет интегральное многообразие медленных движений

$x_2 = h_2(y, z, x_1, \varepsilon, \mu)$ [3], движение по которому описывается системой

$$\dot{y} = x_1, \dot{z} = h_2(y, z, x_1, \varepsilon, \mu), \varepsilon\dot{x}_1 = = a_1(y, z, x_1, h_2(y, z, x_1, \varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu). \quad (3)$$

Пусть для системы (3) выполняются следующие условия:

1') Уравнение $a_1\left(y, z, x_1, h_2^{(0,0)}(y, z, x_1), 0{,}0\right) = 0$ имеет изолированное решение $x_1 = h_1^{(0,0)}(y, z)$.

2') В области $\Omega_1 = \{(y, z, x_1, \varepsilon, \mu): \left\|x_1 - h_1^{(0,0)}(y, z)\right\| \le \rho_1, \varepsilon \in (0, \varepsilon_1], \mu \in (0, \mu_1], \varepsilon_1 \le \varepsilon_0, \mu_1 \le \mu_0\}$ функции $a_1, h_1^{(0,0)}, h_2$ имеют достаточное число равномерно непрерывных и ограниченных частных производных по всем переменным.

3') Собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(y, z)$, $i = \overline{1, n}$ матрицы $\frac{\partial a_1}{\partial x_1}(y, z, h_1^{(0,0)}(y, z), h_2^{(0,0)}(y, z, h_1^{(0,0)}(y, z), 0{,}0)$ удовлетворяет неравенству $Re\ \lambda_i \le -\beta_2 < 0$.

При выполнении таких условий система (3) имеет интегральное многообразие медленных движений $x_1 = h_1(y, z, \varepsilon, \mu)$. Функции h_1, h_2 определяют интегральное многообразие самых медленных движений $x_1 = h_1(v_0^1, v_0^2, \varepsilon, \mu), x_2 = h_2(v_0^1, v_0^2, h_1(v_0^1, v_0^2, \varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu)$, движение по которому описывается системой $\dot{y} = h_1(v_0^1, v_0^2, \varepsilon, \mu), \dot{z} = h_2(v_0^1, v_0^2, h_1(v_0^1, v_0^2, \varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu)$. Используя метод декомпозиции [4], основанный на теории интегральных многообразий, произведем расщепление управляемой системы (2). Произведем замену переменных вида $y = v_0^1 + \varepsilon H_{0(1)}^1 + \varepsilon\mu H_{0(1)}^2, z = v_0^2 + \varepsilon H_{0(2)}^1 + \varepsilon\mu H_{0(2)}^2$,

$$x_1 = v_1 + h_1 + \mu H_1^2, x_2 = v_2 + h_2.$$

В результате такой замены, получим систему блочно-треугольного вида:

$$\dot{v}_0^1 = h_1(v_0^1, v_0^2, \varepsilon, \mu) - \frac{\partial H_{0(1)}^2}{\partial v_2} B_2(v_0^1, v_0^2, \varepsilon, \mu)u, \dot{v}_0^2 = h_2(v_0^1, v_0^2, h_1(v_0^1, v_0^1, v_0^2, \varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu) - \frac{\partial H_{0(2)}^2}{\partial v_2} B_2(v_0^1, v_0^2, \varepsilon, \mu)u, \varepsilon\dot{v}_1 = A_1(v_0^1, v_0^2, v_1, \varepsilon, \mu) + B_1(v_0^1, v_0^2, v_1, v_2, \varepsilon, \mu)u, \varepsilon\mu\dot{v}_2 = A_2(v_0^1, v_0^2, v_1, v_2, \varepsilon, \mu) + B_2(v_0^1, v_0^2, \varepsilon, \mu)u, w = = \phi_1(v_0^1, v_0^2, v_1, v_2, \varepsilon, \mu), \quad (4)$$

где $A_1 = a_1(y_0^1, y_0^2, v_1 + h_1(y_0^1, y_0^2, \varepsilon, \mu), h_2(y_0^1, y_0^2, v_1 + h_1, \varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu) - a_1(y_0^1, y_0^2, h_1(y_0^1, y_0^2, \varepsilon, \mu), h_2(y_0^1, y_0^2, h_1, \varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu) - \varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial y_0^1} v_1 - \varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial y_0^2} [h_2(y_0^1, y_0^2, v_1 + h_1(y_0^1, y_0^2, \varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu) - h_2(y_0^1, y_0^2, h_1(y_0^1, y_0^2, \varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu)], A_1(v_0^1, v_0^2, 0, \varepsilon, \mu) \equiv 0, A_2(v_0^1, v_0^2, v_1, v_2, \varepsilon, \mu) = a_2(v_0^1 + \varepsilon H_{0(1)}^1 + \varepsilon\mu H_{0(1)}^2, v_0^2 + \varepsilon \cdot H_{0(2)}^1 + \varepsilon\mu H_{0(2)}^2, v_1 + h_1 + \mu H_1^2, v_2 + h_2, \varepsilon, \mu) - a_2(v_0^1 + \varepsilon H_{0(1)}^1 + \varepsilon\mu H_{0(1)}^2, v_0^2 + \varepsilon H_{0(2)}^1 + \varepsilon\mu H_{0(2)}^2, v_1 + h_1 + \mu H_1^2, h_2, \varepsilon, \mu) - \varepsilon\mu \frac{\partial h_2}{\partial z} \cdot v_2 - \mu \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(a_1(v_0^1 + \varepsilon H_{0(1)}^1 + \varepsilon\mu H_{0(1)}^2, v_0^2 + \varepsilon H_{0(2)}^1 + \varepsilon\mu H_{0(2)}^2, v_1 + h_1 + \mu H_1^2, v_2 + h_2, \varepsilon, \mu) - a_1(v_0^1 + \varepsilon H_{0(1)}^1 + \varepsilon\mu H_{0(1)}^2, v_0^2 + \varepsilon H_{0(2)}^1 + \varepsilon\mu H_{0(2)}^2, v_1 + h_1 + \mu H_1^2, h_2, \varepsilon, \mu)$, $A_2(v_0^1, v_0^2, v_1, 0, \varepsilon, \mu) \equiv 0, B_2(v_0^1, v_0^2, \varepsilon, \mu) = = b_2(v_0^1 + \varepsilon H_{0(1)}^1 + \varepsilon\mu H_{0(1)}^2, v_0^2 + \varepsilon H_{0(2)}^1 + \varepsilon\mu H_{0(2)}^2, \varepsilon, \mu) - \mu \frac{\partial h_2}{\partial x_1} b_1(v_0^1 + \varepsilon H_{0(1)}^1 + \varepsilon \cdot \mu H_{0(1)}^2, v_0^2 + \varepsilon H_{0(2)}^1 + \varepsilon\mu H_{0(2)}^2, \varepsilon, \mu), B_1 = = b_1(v_0^1, v_0^2, \varepsilon, \mu) - \frac{\partial H_1^2}{\partial v_2} B_2(v_0^1, v_0^2, \varepsilon, \mu), y_0^1 = v_0^1 + \varepsilon H_{0(1)}^1, y_0^2 = v_0^2 + \varepsilon H_{0(2)}^1$.

Функции $H_{0(j)}^2, j = 1{,}2$; H_1^2 равномерно непрерывны и ограничены с достаточным числом частных производных по всем аргументам. Функции $H_{0(j)}^2, h_j, j = 1{,}2$; H_1^2 можно искать в виде асимптотических разложений [5]

$$h_2(y, z, x_1, \varepsilon, \mu) = \sum_{k\ge 0} \mu^k h_{2k}(y, z, x_1, \varepsilon),$$
$$h_1(y_0^1, y_0^2, \varepsilon, \mu) = \sum_{k\ge 0} \varepsilon^k h_{1k}(y_0^1, y_0^2, \mu),$$
$$H_{0(j)}^1(v_0^1, v_0^2, v_1, \varepsilon, \mu) = \sum_{k\ge 0} \varepsilon^k H_{0(j)k}^1(v_0^1, v_0^2, v_1, \mu), H_1^2(y_0^1, y_0^2, y_1, v_2, \varepsilon, \mu) = \sum_{k\ge 0} \mu^k H_{1k}^2(y_0^1, y_0^2, y_1, v_2, \varepsilon),$$
$$H_{0(j)}^2(y_0^1, y_0^2, y_1, v_2, \varepsilon, \mu) = = \sum_{k\ge 0} \mu^k H_{0(j)k}^2(y_0^1, y_0^2, y_1, v_2, \varepsilon), i = 0{,}1;$$

$y_0^j = v_0^j + \varepsilon H_{0(j)}^1, j = 1{,}2$, из соответствующих уравнений

$$\varepsilon\mu \frac{\partial h_2}{\partial y} x_1 + \varepsilon\mu \frac{\partial h_2}{\partial z} h_2(y, z, x_1, \varepsilon, \mu) + \mu \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \cdot a_1(y, z, x_1, \varepsilon, \mu) = a_2(y, z, x_1, h_2, \varepsilon, \mu);$$
$$\varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial y_0^1} h_1(y_0^1, y_0^2, \varepsilon, \mu) + \varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial y_0^2} h_2(y_0^1, y_0^2, h_1(y_0^1, y_0^2, \varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu) = a_1(y_0^1, y_0^2, h_1(y_0^1, y_0^2,$$

$$\varepsilon,\mu),h_2(y_0^1,y_0^2,h_1(y_0^1,y_0^2,\varepsilon,\mu),\varepsilon,\mu),\varepsilon,\mu);$$
$$\varepsilon\frac{\partial H_{0(j)}^1}{\partial v_0^1}h_1(v_0^1,v_0^2,\varepsilon,\mu)+\varepsilon\frac{\partial H_{0(j)}^1}{\partial v_0^2}h_2(v_0^1,v_0^2,$$
$$h_1(v_0^1,v_0^2,\varepsilon,\mu),\varepsilon,\mu)+\frac{\partial H_{0(j)}^1}{\partial v_1}A_1(v_0^1,v_0^2,v_1,$$
$$\varepsilon,\mu)=\Delta h_j^1, j=1,2;\ \Delta h_1^1=h_1(y_0^1,y_0^2,\varepsilon,\mu)$$
$$-h_1(v_0^1,v_0^2,\varepsilon,\mu), \Delta h_2^1=h_2(y_0^1,y_0^2,h_1(y_0^1,$$
$$y_0^2,\varepsilon,\mu),\varepsilon,\mu)-h_2(v_0^1,v_0^2,h_1(v_0^1,v_0^2,\varepsilon,\mu),$$
$$\varepsilon,\mu);\ \varepsilon\mu\frac{\partial H_{0(j)}^2}{\partial y_0^1}h_1(y_0^1,y_0^2,\varepsilon,\mu)+\varepsilon\mu\frac{\partial H_{0(j)}^2}{\partial y_0^2}\cdot$$
$$h_2(y_0^1,y_0^2,v_1+h_1(y_0^1,y_0^2,\varepsilon,\mu),\varepsilon,\mu)+\mu\cdot$$
$$\frac{\partial H_{0(j)}^2}{\partial y_1}a_1(y_0^1,y_0^2,v_1+h_1(y_0^1,y_0^2,\varepsilon,\mu),h_2(y_0^1,$$
$$y_0^2,v_1+h_1(y_0^1,y_0^2,\varepsilon,\mu),\varepsilon,\mu),\varepsilon,\mu)+\frac{\partial H_{0(j)}^2}{\partial v_2}\cdot$$
$$A_2(v_0^1,v_0^2,v_1,v_2,\varepsilon,\mu)=\Delta h_j^2, j=1,2;\ \Delta h_1^2$$
$$=h_1(v_0^1+\varepsilon H_{0(1)}^1+\varepsilon\mu H_{0(1)}^2,v_0^2+\varepsilon H_{0(2)}^1+$$
$$\varepsilon\mu H_{0(2)}^2,\varepsilon,\mu)-h_1(y_0^1,y_0^2,\varepsilon,\mu);\ \Delta h_2^2=$$
$$h_2(v_0^1+\varepsilon H_{0(1)}^1+\varepsilon\mu H_{0(1)}^2,v_0^2+\varepsilon H_{0(2)}^1+\varepsilon\cdot$$
$$\mu H_{0(2)}^2,v_1+h_1(v_0^1+\varepsilon H_{0(1)}^1+\varepsilon\mu H_{0(1)}^2,v_0^2$$
$$+\varepsilon H_{0(2)}^1+\varepsilon\mu H_{0(2)}^2,\varepsilon,\mu),\varepsilon,\mu)-h_2(y_0^1,y_0^2,$$
$$v_1+h_1(y_0^1,y_0^2,\varepsilon,\mu),\varepsilon,\mu);\varepsilon\mu\frac{\partial H_1^2}{\partial y_0^1}h_1(y_0^1,y_0^2,$$
$$\varepsilon,\mu)+\varepsilon\mu\frac{\partial H_1^2}{\partial y_0^2}h_2(y_0^1,y_0^2,v_1+h_1(y_0^1,y_0^2,\varepsilon,$$
$$\mu),\varepsilon,\mu)+\mu\frac{\partial H_1^2}{\partial y_1}a_1(y_0^1,y_0^2,v_1+h_1(y_0^1,y_0^2,$$
$$\varepsilon,\mu),h_2(y_0^1,y_0^2,v_1+h_1(y_0^1,y_0^2,\varepsilon,\mu),\varepsilon,\mu),\varepsilon,$$
$$\mu)+\frac{\partial H_1^2}{\partial v_2}A_2(v_0^1,v_0^2,v_1,v_2,\varepsilon,\mu)=a_1(v_0^1+$$
$$\varepsilon H_{0(1)}^1+\varepsilon\mu H_{0(1)}^2,v_0^2+\varepsilon H_{0(2)}^1+\varepsilon\mu H_{0(2)}^2,v_1$$
$$+h_1(y_0^1,y_0^2,\varepsilon,\mu)+\mu H_1^2,v_2+h_2(v_0^1+\varepsilon\cdot$$
$$H_{0(1)}^1+\varepsilon\mu H_{0(1)}^2,v_0^2+\varepsilon H_{0(2)}^1+\varepsilon\mu H_{0(2)}^2,v_1+$$
$$+h_1(y_0^1,y_0^2,\varepsilon,\mu)+\mu H_1^2,\varepsilon,\mu),\varepsilon,\mu)-a_1(y_0^1,$$
$$y_0^2,v_1+h_1(y_0^1,y_0^2,\varepsilon,\mu),\varepsilon,\mu),h_2(y_0^1,y_0^2,v_1$$
$$+h_1(y_0^1,y_0^2,\varepsilon,\mu),\varepsilon,\mu),\varepsilon,\mu).$$

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

Рассмотрим задачу о приведении системы (4) из некоторой окрестности начала координат в начало координат с помощью гладкого управления. Пусть $v_0^i(0)=0, v_i(0)=0, i=1,2.$ Линейная модель для системы (4) в окрестности начала координат имеет вид:

$$\dot{v}_0=\bar{A}_0v_0+\bar{B}_0u, v_0=(v_0^1,v_0^2)';$$
$$\varepsilon\dot{v}_1=\bar{A}_1v_1+\bar{B}_1u;\ \varepsilon\mu\dot{v}_2=\bar{A}_2v_2+\bar{B}_2u;$$
$$\mathrm{w}=\textstyle\sum_{i=0}^2\bar{C}_iv_i, \bar{C}_j=\frac{\partial\phi_1}{\partial v_j}(0,0,0,0,\varepsilon,\mu);$$
$$\bar{A}_0=\left.\begin{pmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial v_0^1} & \frac{\partial h_1}{\partial v_0^2}\\ \frac{\partial h_2}{\partial v_0^1} & \frac{\partial h_2}{\partial v_0^2}\end{pmatrix}\right|_{v_0^1=0,v_0^2=0}, \bar{B}_0=\begin{pmatrix}b_0^1\\ b_0^2\end{pmatrix},$$
$$b_0^i=-\frac{\partial H_{0(i)}^2}{\partial v_2}(0,0,0,0,\varepsilon,\mu)B_2(0,0,\varepsilon,\mu), i=$$
$$1,2;\ \bar{B}_1=B_1(0,0,0,0,\varepsilon,\mu),\bar{B}_2=B_2(0,0,\varepsilon,$$
$$\mu),\bar{A}_1=\frac{\partial A_1}{\partial v_1}(0,0,0,\varepsilon,\mu),\bar{A}_2=\frac{\partial A_2}{\partial v_2}(0,0,0,0,$$
$$\varepsilon,\mu), j=0,1,2.$$

Используя подход, предложенный в работе [6], можно доказать следующие утверждения.

Теорема 1. *Рассмотрим модель управляемого процесса (4) с ограничивающим множеством* $\Omega\subset\mathbb{R}^r$, *содержащим внутри себя точку* $u=0$. *Предположим, что:* 1) $h_1(0,0,\varepsilon,\mu)=0, h_2(0,0,h_1(0,0,\varepsilon,\mu),\varepsilon,\mu)=0$; 2) $rank\ (B_0,A_0B_0,\dots,A_0^{n_1+n_2-1}B_0)=n_1+n_2$; 3) $rank\ (\bar{B}_i,\bar{A}_i\bar{B}_i,\dots,\bar{A}_i^{n_i-1}\bar{B}_i)=n_i, i=1,2.$ *Тогда существуют такие* $\varepsilon^*>0,\mu^*>0$, *что при всех* $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*],\varepsilon^*\le\varepsilon_0,\mu\in(0,\mu^*],\mu^*\le\mu_0$, *область* $\mathcal{B}$ *нуль-управляемости открыта в* $\mathbb{R}^{2(n_1+n_2)}$ *(т.е. система (4) локально управляема вблизи нуля).*

Теорема 2. *Рассмотрим модель наблюдаемого процесса (4) в* $\mathbb{R}^{2(n_1+n_2)}$. *Пусть функции системы (4) непрерывно дифференцируемые в окрестности точки* $v_0^1=0,v_0^2=0,v_1=0,v_2=0,u=0$ *с входными сигналами* $u(t,\varepsilon,\mu), 0\le t\le 1$ *в* $\mathbb{R}^r$ *и выходными сигналами* $\phi_1(v_0^1(t,\varepsilon,\mu), v_0^2(t,\varepsilon,\mu),v_1(t,\varepsilon,\mu),v_2(t,\varepsilon,\mu),\varepsilon,\mu)$ *в* $\mathbb{R}^p$. *Предположим, что* 1) $h_1(0,0,\varepsilon,\mu)=0, h_2(0,0,h_1(0,0,\varepsilon,\mu),\varepsilon,\mu)=0$; 2) $rank\ (\bar{C}_0',\bar{A}_0'\bar{C}_0',\dots,(\bar{A}_0')^{n_1+n_2-1}\bar{C}_0')=n_1+n_2$; 3) $rank\ (\bar{C}_i',\bar{A}_i'\bar{C}_i',\dots,(\bar{A}_i')^{n_i-1}\bar{C}_i')=n_i, i=1,2.$ *Тогда существуют такие* $\varepsilon^*>0,\mu^*>0$, *что при всех* $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*],\varepsilon^*\le\varepsilon_0,\mu\in(0,\mu^*],\mu^*\le\mu_0$, *система (4) локально вполне наблюдаема вблизи начала координат.*

СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ

В системе (4) выберем управление следующим образом: $B_1(v_0^1,v_0^2,v_1,v_2,\varepsilon,\mu)u=-A_1(v_0^1,v_0^2,v_1,\varepsilon,\mu)+A_{11}v_1, B_2(v_0^1,v_0^2,\varepsilon,\mu)u=-A_2(v_0^1,v_0^2,v_1,v_2,\varepsilon,\mu)+A_{22}v_2,$ где матрицы $A_{ii}, i=1,2$ произвольные гурвицевы матрицы [7], соответствующие уравнениям Ляпунова с положительно определенным решением P_i, т.е. $A_{ii}'P_i + P_iA_{ii} = -I, i = 1,2$. Следовательно, собственные значения $\lambda_k, k = \overline{1, n_i}$ матриц A_{ii} имеют отрицательные вещественные части, т.е. удовлетворяют неравенствам $Re\,\lambda_k \le -\beta_k < 0$. Подставим выбранное управление в результирующую систему (4):

$$\dot{v}_0^1 = h_1(v_0^1, v_0^2, \varepsilon, \mu) - \frac{\partial H_{0(1)}^2}{\partial v_2}(-A_2(v_0^1, v_0^2, v_1, v_2, \varepsilon, \mu) + A_{22}v_2), \dot{v}_0^2 = h_2(v_0^1, v_0^2, h_1(v_0^1, v_0^2, \varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu) - \frac{\partial H_{0(2)}^2}{\partial v_2}(-A_2(v_0^1, v_0^2, v_1, v_2, \varepsilon, \mu) + A_{22}v_2), \varepsilon\dot{v}_1 = A_{11}v_1, \ \varepsilon\mu\dot{v}_2 = A_{22}v_2. \quad (5)$$

Исследуем устойчивость системы (5). Движение по интегральному многообразию $v_1 = 0, v_2 = 0$, самых медленных движений системы (5), описывается системой $\dot{v}_0^1 = h_1(v_0^1, v_0^2, \varepsilon, \mu), \dot{v}_0^2 = h_2(v_0^1, v_0^2, h_1(v_0^1, v_0^2, \varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu)$. Следовательно, система (5) сводится к системе блочно-диагонального вида $\dot{v}_0^1 = h_1(v_0^1, v_0^2, \varepsilon, \mu)$, $\dot{v}_0^2 = h_2(v_0^1, v_0^2, h_1(v_0^1, v_0^2, \varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu)$, $\varepsilon\dot{v}_1 = A_{11}v_1, \varepsilon\mu\dot{v}_2 = A_{22}v_2$, две быстрые подсистемы которой асимптотически устойчивы. Итак, задача устойчивости системы (5) сведена к задаче устойчивости на интегральном многообразии.

ПРИМЕР

Рассмотрим систему p нелинейных осцилляторов [8]:

$$\varepsilon\ddot{x}_i + a_ix_i^3 + b_i\dot{x}_i = \gamma_iu, i = \overline{1,n}; \quad \varepsilon\mu\ddot{x}_j + c_j\dot{x}_j(x_j^2 - 1) + d_jx_j = \gamma_ju, j = \overline{n+1,p}; z = \textstyle\sum_{k=1}^p h_kx_k, \quad (6)$$

где коэффициенты

$a_i, b_i, c_j, d_j, \gamma_k, h_k, i = \overline{1,n}, j = \overline{n+1,p}, k = \overline{1,p}$

отличны от нуля, u – скалярное управление, переводящее систему из начального положения в начало координат за минимальное время, $|u| \le 1, \varepsilon, \mu$ – малые положительные параметры. Введем обозначения $\dot{x}_i = y_i, \dot{x}_j = z_j, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{n+1,p}$, тогда система примет вид:

$$\dot{x}_i = y_i, \dot{x}_j = y_j, \varepsilon\dot{y}_i = -a_ix_i^3 - b_iy_i + \gamma_iu, i = \overline{1,n}; \varepsilon\mu\dot{y}_j = c_j(1 - x_j^2)y_j - d_jx_j + \gamma_ju, j = \overline{n+1,p}; z = \textstyle\sum_{k=1}^p h_kx_k.$$

Пусть для системы (6) выполняются условия 1) – 3), 1') – 3'). Произведем замену переменных $x_i = p_i - \varepsilon\frac{v_i}{b_i} + O(\varepsilon^2)$, $x_j = p_j + \varepsilon\mu\frac{v_j}{c_j(1-p_j^2)} + O(\varepsilon^2\mu), y_i = v_i - \frac{a_i}{b_i}p_i^3 + \varepsilon\frac{3a_i}{b_i^2}p_i^2\left(v_i - \frac{a_i}{b_i}p_i^3\right) + O(\varepsilon^2), y_j = v_j + \frac{d_j}{c_j}\cdot\frac{p_j}{1-p_j^2} - \varepsilon\mu\frac{d_j^2}{c_j^3}\cdot\frac{p_j(1+p_j^2)}{(1-p_j^2)^3} + O(\varepsilon^2\mu), i = \overline{1,n};$

$j = \overline{n+1,p}.$

В результате получим систему блочно-треугольного вида:

$$\dot{p}_i = -\frac{a_i}{b_i}p_i^3 + \varepsilon\frac{3a_i}{b_i^2}p_i^2\left(v_i - \frac{a_i}{b_i}p_i^3\right) + \frac{\gamma_i}{b_i}u + O(\varepsilon^2), \dot{p}_j = \frac{d_jp_j}{c_j(1-p_j^2)} - \varepsilon\mu\frac{d_j^2p_j(1+p_j^2)}{c_j^3(1-p_j^2)^3} + \frac{\gamma_ju}{c_j(1-p_j^2)} + O(\varepsilon^2), \varepsilon\dot{v}_i = -b_iv_i + \varepsilon\frac{3a_i}{b_i}p_i^2v_i + \gamma_iu + O(\varepsilon^2), \varepsilon\mu\dot{v}_j = c_j(1-p_j^2)v_j - \varepsilon\mu\cdot\left(\frac{2p_jv_j^2}{c_j(1-p_j^2)} + \frac{d_j}{c_j}\cdot\frac{1+p_j^2}{1-p_j^2}v_j\right) + \gamma_ju + O(\varepsilon^2), i = \overline{1,n}; j = \overline{n+1,p}; z = \textstyle\sum_{k=1}^p h_kp_k - \varepsilon\sum_{i=1}^n h_i\frac{v_i}{b_i} + \varepsilon\mu\sum_{j=1}^p\frac{h_jv_j}{c_j(1-p_j^2)} + O(\varepsilon^2).$$

Система блочно-треугольного вида является локально вполне управляемой вблизи начала координат и локально вполне наблюдаемой вблизи начала координат, так как медленная подсистема нулевого приближения, первая быстрая подсистема первого приближения и вторая быстрая подсистема второго приближения локально вполне наблюдаемы вблизи начала координат. Так как блочно-треугольная система получена из системы (6) с помощью обратимой замены переменных, то система (6) локально вполне управляемая и локально вполне наблюдаемая вблизи начала координат.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено исследование моделей систем, описываемых сингулярно возмущенными системами дифференциальных уравнений и изучены свойства управляемости, наблюдаемости, стабилизируемости. Проведена декомпозиция моделей управляемых и наблюдаемых нелинейных автономных трехтемповых систем. Сформулированы достаточные условия управляемости и наблюдаемости нелинейных трехтемповых систем. Изучены свойства управляемости и наблюдаемости автономной трехтемповой системы нелинейных осцилляторов вблизи начала координат.

Автор выражает глубокую признательность профессору В.А. Соболеву за полезные обсуждения и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева, А.Б.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных систем / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
2. *Васильева, А.Б.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Высшая школа, 1990. – 208 с.
3. *Соболев, В.А.* Интегральные многообразия, сингулярные возмущения и оптимальное управление / В.А. Соболев // Украинский математический журнал. Т.39. 1987. № 1. С. 111–116.
4. *Воропаева, Н.В.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем / Н.В. Воропаева, В.А. Соболев. – М.: Физматлит, 2009. – 256 с.
5. *Кононенко, Л.И.* Асимптотические разложения медленных интегральных многообразий / Л.И. Кононенко, В.А. Соболев // Сибирский математический журнал. – 1994. – Т. 35. – № 6. – С. 1264–1268.
6. *Ли, Э.Б.* Основы теории оптимального управления / Э.Б. Ли, Л. Маркус. – М.: Мир, 1972. 576 с.
7. *Chen, C.C.* Criterion for global exponential stabilisability of a class of nonlinear control systems via integral manifold approach / C.C. Chen // IEE Proc.-Control Theory Appl. – V. 147. –№ 3. – May 2000. – P. 330–336.
8. *Богаевский В.Н.* Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений / В.Н. Богаевский, А.Я. Повзнер– М.: Наука, 1987. 256 с.

CONTROLLABILITY, OBSERVABILITY, STABILISABILITY OF THE NONLINEAR SYSTEMS

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia

A method of integral manifolds is applied to study of threetempo nonlinear systems. The use of this method permits us to solve a problem of decomposition of three-rate controllable and observable systems. Local controllability, local observability and stabilisability of these systems is investigated. The application of the method is illustrated on example.
Keywords: the decomposition of threerate models, integral manifold, controllability, observability, stability, stabilisability, asymptotic expansions.

DOI: 10.37313/1990-5378-2021-23-6-113-115

Marina Semenova, Candidate of Mathematics and Physics, Associate Professor at the Higher Mathematics Department. E-mail: semenova73@bk.ru