УДК 517.9:62-50

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ ДВУХТЕМПОВЫХ СИСТЕМ

© 2021 М.М. Семенова

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 18.10.2021

В статье излагается метод декомпозиции нелинейных двухтемповых систем, основанный на теории интегральных многообразий быстрых и медленных движений. Исследуется управляемость, наблюдаемость, стабилизируемость системы. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: декомпозиция двухтемповых систем, интегральное многообразие, управляемость, наблюдаемость, устойчивость, стабилизируемость, асимптотические разложения.
DOI: 10.37313/1990-5378-2021-23-6-116-118

ВВЕДЕНИЕ

Исследование нелинейных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений приводит к решению широкого класса прикладных задач. Использование быстрых и медленных интегральных многообразий позволяет построить преобразование, осуществляющее декомпозицию системы на независимую медленную подсистему и быструю подсистему, описывающую затухающие колебания, что дает понижение размерности моделей и избавляет от вычислительной жесткости. С помощью невырожденного преобразования система сводится к эквивалентной сингулярно возмущенной системе с разделенными переменными, – к системе блочно-диагонального вида, в случае линейных систем, – к системе блочно-треугольного вида, если исходная система нелинейная. С задачами управляемости и наблюдаемости тесно связаны задачи идентифицируемости и стабилизируемости. Данная работа посвящена изучению свойств управляемости, наблюдаемости, стабилизируемости двухтемповой нелинейной неавтономной системы.

Цель работы:

- Понижение размерности задачи управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости нелинейной двухтемповой неавтономной системы так, чтобы модель меньшей размерности с большой степенью точности отражала все свойства исходной системы.
- Получение достаточных условий, управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости сингулярно возмущенных систем.

Семенова Марина Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. E-mail: semenova73@bk.ru

РАСЩЕПЛЯЮЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Рассмотрим модель сингулярно возмущенной системы вида

$$\varepsilon\ddot{x} - a(t,x,\dot{x},\varepsilon) = b(t,x,\varepsilon)u, w = \phi(t,x,\dot{x},\varepsilon), \quad (1)$$

где $x \in X \subset \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^r$ – управляющие воздействия, $w \in V \subset \mathbb{R}^p$ – измеряемая координата, $a, \phi \in \mathbb{R}^n, b$ – матричная функция размерности $n \times r$. Функции a, b, ϕ равномерно непрерывные и ограниченные вместе с достаточным числом частных производных по всем аргументам, $t \in \mathbb{R}$. Обозначим $y = \dot{x}$. Модель (1) примет вид

$$\dot{x} = y, \varepsilon\dot{y} = a(t,x,y,\varepsilon) + b(t,x,\varepsilon)u, w = \phi(t,x,y,\varepsilon). \quad (2)$$

Пусть система (2) удовлетворяет следующим условиям [1]:

Уравнение $a(t,x,y,0) = 0$ имеет изолированное решение $y = h_0(t,x)$.

В области $\Omega = \{(t,x,y,\varepsilon): \|y - h_0(t,x)\| \le \rho, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]\}$ функции a, h_0 имеют достаточное число равномерно непрерывных и ограниченных частных производных по всем переменным.

Собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(t,x), i = \overline{1,n}$ матрицы $\frac{\partial a}{\partial y}(t,x,h_0(t,x),0)$ удовлетворяют неравенству $Re\ \lambda_i \le -\beta < 0$.

В системе (2) произведем замену переменной $x(t) = v(t) + \varepsilon H(t,v(t),z(t),\varepsilon), H(t,v,0,\varepsilon) \equiv 0, y(t) = z(t) + h(t,x(t),\varepsilon)$. В результате получим систему блочно-треугольного вида

$$\begin{gathered}\dot{v} = h(t,v,\varepsilon) + \tilde{b}(t,v,\varepsilon H,\varepsilon)u,\\ \varepsilon\dot{z} = Z(t,v,z,\varepsilon) + b(t,v,\varepsilon H,\varepsilon)u,\\ w = \phi_1(t,v,z,\varepsilon),\end{gathered} \quad (3)$$

где $\tilde{b}(t,v,\varepsilon H,\varepsilon) = -\frac{\partial H}{\partial z} b(t,v,\varepsilon H,\varepsilon), Z(t,v,\varepsilon H,z,\varepsilon) = a(t,v+\varepsilon H,z+h,\varepsilon) - a(t,v+\varepsilon H,h,\varepsilon) - \varepsilon\frac{\partial h}{\partial x}(t,v+\varepsilon H,\varepsilon)z, \phi_1(t,v,z,\varepsilon) = \phi(t,v+\varepsilon H,z+h,\varepsilon)$. Функции $h(t,\ x,\varepsilon), H(t,v,z,\varepsilon)$ можно искать в виде асимптотического разложения [2] $h(t,x,\varepsilon) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k h_k(t,x)$, из уравнения $\varepsilon\frac{\partial h}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial h}{\partial x}h(t,x,\varepsilon) = a(t,x,h(t,x,\varepsilon),\varepsilon)$, и $H(t,v,z,\varepsilon) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k H_k(t,v,z)$ из уравнения

$$\varepsilon\frac{\partial H}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial H}{\partial v}h(t,v,\varepsilon) + \frac{\partial H}{\partial z}Z(t,v,z,\varepsilon) =$$
$$= z + h(t,v+\varepsilon H,\varepsilon) - h(t,v,\varepsilon).$$

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

Для исследования свойств управляемости и наблюдаемости блочно-треугольной системы (3), $h(t,0,0,\varepsilon) = 0, Z(t,0,0,\varepsilon) = 0$, линеаризуем ее по переменным состояния вдоль

$$v \equiv 0, z \equiv 0: \dot{v} = \frac{\partial h}{\partial v}(t,0,\varepsilon)v + \tilde{b}(t,0,0,\varepsilon)u + h(t,0,\varepsilon) + a_1(t,v,z,u,\varepsilon),$$
$$\varepsilon\dot{z} = \frac{\partial Z}{\partial v}(t,0,0,\varepsilon)v + \frac{\partial Z}{\partial z}(t,0,0,\varepsilon)z + b(t,0,0,\varepsilon)u + Z(t,0,0,\varepsilon) + a_2(t,v,z,u,\varepsilon),$$
$$w = \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(t,0,0,\varepsilon)v + \frac{\partial \phi_1}{\partial z}(t,0,0,\varepsilon)z + a_3(t,v,z,\varepsilon).$$

Обозначим,

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial v}(t,0,\varepsilon) & O \\ \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial Z}{\partial v}(t,0,0,\varepsilon) & \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial Z}{\partial z}(t,0,0,\varepsilon) \end{pmatrix},$$
$$b(u,t) = \begin{pmatrix} h(t,0,\varepsilon) + \tilde{b}(t,0,0,\varepsilon)u \\ \frac{1}{\varepsilon}(Z(t,0,0,\varepsilon) + b(t,0,0,\varepsilon)u) \end{pmatrix},$$
$$C(t) = (C_1(t) \quad C_2(t)), C_1(t) = \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(t,0,0,\varepsilon), C_2(t) = \frac{\partial \phi_1}{\partial z}(t,0,0,\varepsilon), p(t,u,\varepsilon) =$$
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v}(\tilde{b}(t,0,0,\varepsilon)u) & \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{b}(t,0,0,\varepsilon)u) \\ \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial v}(b(t,0,0,\varepsilon)u) & \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}(b(t,0,0,\varepsilon)u) \end{pmatrix}.$$

Запишем линеаризованную систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} + b(u,t) + p(t,u,\varepsilon)\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} + o(\|(v \quad z)'\|)p_1(t,u,\varepsilon), w =$$
$$= C(t)\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} + a_3(t,v,z,\varepsilon).$$

Используя теоремы об управляемости и наблюдаемости динамических систем по линейному приближению [3], получаем условия управляемости и наблюдаемости системы (3). Так как система (1) получена из системы (3) с помощью невырожденной замены переменных, то исходная система (1) вполне управляема и вполне наблюдаема.

Пример. Рассмотрим модель системы математических маятников с трением [4], подвешенных к несущему телу P, перемещающемуся горизонтально с ускорением u:

$$\varepsilon\ddot{\varphi}_i + 2\gamma_i\dot{\varphi}_i + \left(\omega_i^2 - \frac{a_i}{l_i}\omega_i^2\cos\omega_i t\right)\sin\varphi_i$$
$$= \alpha_i u, \omega_i = \sqrt{\frac{g}{l_i}}, i = \overline{1,n}; p = \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i,$$

где l_i – длина i маятника, $\varepsilon > 0$ – малый положительный параметр, $\gamma_i > 0, \omega_i$ – частота малых колебаний i маятника, a_i, α_i – коэффициенты, отличные от нуля, $|u| \leq 1$. Обозначим, $\psi_i = \dot{\varphi}_i$, тогда система примет вид:

$$\dot{\varphi}_i = \psi_i, \varepsilon\dot{\psi}_i = (\frac{a_i}{l_i}\omega_i^2\cos\omega_i t - \varepsilon\omega_i^2)\sin\varphi_i -$$
$$- 2\gamma_i\psi_i + \alpha_i u, i = \overline{1,n}; p = \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i.$$

Произведем замену переменных следующего вида:

$$\psi_i = z_i + \frac{a_i\omega_i^2\cos\omega_i t - g}{2\gamma_i l_i}$$
$$\cdot\sin\varphi_i + \varepsilon(a_i\omega_i^3\sin\omega_i t - \frac{(a_i\omega_i^2\cos\omega_i t - g)^2}{2\gamma_i l_i}$$
$$\cos\varphi_i)\frac{\sin\varphi_i}{4\gamma_i^2 l_i} + O(\varepsilon^2), \varphi_i = v_i - \varepsilon\frac{z_i}{2\gamma_i} + O(\varepsilon^2),$$

в результате которой получим систему блочно-треугольного вида

$$\dot{v}_i = \frac{a_i\omega_i^2\cos\omega_i t - g}{2\gamma_i l_i}\sin v_i + \varepsilon\frac{\sin v_i}{4\gamma_i^2 l_i}(a_i\omega_i^3\cdot$$
$$\sin\omega_i t - \frac{(a_i\omega_i^2\cos\omega_i t - g)^2}{2\gamma_i l_i}\cos v_i) + \alpha_i(\frac{1}{2\gamma_i} -$$
$$\varepsilon(\frac{\cos v_i}{4\gamma_i^2} - \frac{(a_i\omega_i^2\cos\omega_i t - g)z_i\sin v_i}{16\gamma_i^4 l_i} - \sin v_i\cdot$$
$$\frac{(a_i\omega_i^2\cos\omega_i t - g)^2}{16\gamma_i^5 l_i z_i}(1 - \cos 2v_i))u + O(\varepsilon^2);$$
$$\varepsilon\dot{z}_i = \left(-2\gamma_i + \varepsilon\frac{g - a_i\omega_i^2\cos\omega_i t}{2\gamma_i l_i}\cos v_i\right)z_i +$$
$$\alpha_i u + O(\varepsilon^2); p = \sum_{i=1}^n c_i\left(v_i - \varepsilon\frac{z_i}{2\gamma_i}\right) + O(\varepsilon^2).$$

Используя теоремы об управляемости и наблюдаемости динамических систем по линейному приближению, получим, что система блочно-треугольного вида вполне управляемая и вполне наблюдаемая, так как система нулевого приближения вполне управляема, а система первого приближения вполне наблюдаема. Так как система блочно-треугольного вида получена из данной с помощью обратимой замены переменных, то данная система является вполне управляемой и вполне наблюдаемой.

СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ

Выберем управление

$$u = u(t, x, z, \varepsilon)$$

следующим образом [5]:

$b(t, v, \varepsilon H, \varepsilon)u = -Z(t, v, z, \varepsilon) + Az$, где A – произвольная гурвицева матрица, которой соответствует уравнение Ляпунова $A'P + PA = -I$, с положительно определенным решением P; тогда $\tilde{b}(t, v, \varepsilon H, \varepsilon)u = -\frac{\partial H}{\partial z} b(t, v, \varepsilon H, \varepsilon)u = \frac{\partial H}{\partial z}(Z(t, v, z, \varepsilon) - Az)$. Подставим выбранное управление в систему:

$$\dot{v} = h(t, v, \varepsilon H, \varepsilon) + \frac{\partial H}{\partial z}(Z(t, v, z, \varepsilon) - Az), \ \ \varepsilon\dot{z} = Az. \quad (4)$$

Исследуем устойчивость системы (4). Для системы (4) выполняются следующие условия: 1) уравнение $Az = 0$ имеет решение $z = 0$; 2) функция h имеет достаточное число равномерно непрерывных и ограниченных производных; 3) собственные значения $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то есть удовлетворяют неравенствам $Re\,\lambda_i \le -\beta < 0$. Значит, система (4) имеет интегральное многообразие медленных движений $z = 0$, движение по которому описывается моделью $\dot{v} = h(t, v, \varepsilon)$. Система (4) приводится к системе блочно-диагонального вида $\dot{v} = h(t, v, \varepsilon), \varepsilon\dot{z} = Az$, быстрая подсистема которой асимптотически устойчива. Следовательно, задача устойчивости системы (4) сведена к задаче устойчивости системы на интегральном многообразии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено исследование моделей систем, описываемых сингулярно возмущенными системами дифференциальных уравнений и изучены свойства управляемости, наблюдаемости, стабилизируемости. Проведена декомпозиция моделей управляемых и наблюдаемых нелинейных неавтономных двухтемповых систем. Изучены свойства управляемости и наблюдаемости неавтономной двухтемповой системы маятников с трением.

Автор выражает глубокую признательность профессору В.А. Соболеву за полезные обсуждения и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева, А.Б.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. - М.: Высшая школа, 1990. - 208 с.
2. *Воропаева, Н.В.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем / Н.В. Воропаева, В.А. Соболев. - М.: Физматлит, 2009. - 256 с.
3. *Габасов, Р.* Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова М.: Наука, 1971. - 508 с.
4. *Богаевский, В.Н.* Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений / В.Н. Богаевский, А.Я. Повзнер. - М.: Наука, 1987. - 256 с.
5. *Chen, C.C.* Criterion for global exponential stabilisability of a class of nonlinear control systems via integral manifold approach / C.C. Chen // IEE Proc.-Control Theory Appl. V. 147. № 3. May 2000. P. 330–336.

DECOMPOSITION OF TWORATE MODELS OF CONTROLLABLE AND OBSERVABLE SYSTEMS

© 2021 M.M. Semenova

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara

A method of integral manifolds is applied to study of twotempo nonlinear systems. The use of this method permits us to solve a problem of decomposition of two-rate controllable and observable systems. Controllability, observability and stabilisability of these systems is investigated. The application of the method is illustrated on example.

Keywords: the decomposition of tworate models, integral manifold, controllability, observability, stability, stabilisability, asymptotic expansions.

DOI: 10.37313/1990-5378-2021-23-6-116-118

Marina Semenova, Candidate of Mathematics and Physics, Associate Professor at the Higher Mathematics Department.
E-mail: semenova73@bk.ru