

УДК 532.5.032

ПРЯМОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ С УЧЕТОМ СЖИМАЕМОСТИ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

© 2021 В.В. Никонов

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 22.09.2021

В статье моделируется пограничный слой на плоской пластине с учетом сжимаемости воздуха. Учет сжимаемости производился с помощью TVD схемы. Был получен профиль продольной скорости для двух сечений перпендикулярных плоскости пластины для разных чисел Рейнольдса. Результаты сравнивались с профилем Блазиуса для ламинарного случая.

Ключевые слова: воздух, сжимаемость, уравнения Навье-Стокса, пограничный слой, прямое моделирование, численное моделирование, двумерное течение.

DOI: 10.37313/1990-5378-2021-23-6-94-102

При расчете течений воздуха с относительно большими дозвуковыми скоростями возникает необходимость учета сжимаемости. Рассмотрим задачу о пограничном слое на плоской пластине в сжимаемо-вязкой постановке при помощи уравнений Навье-Стокса. Соответствующие уравнения данной задачи приводятся, например, в [1, 2]. Используется численная схема расщепления уравнений Навье-Стокса по физическим процессам. Невязкая сжимаемая подзадача решается с помощью TVD схемы [3, 4]. Вязкая подзадача решается методом, описанным в [5]. Правильный выбор шага интегрирования по времени является важным для этих подзадач. Для невязкой сжимаемой подзадачи шаг по времени выбирался согласно критерию Куранта-Фридрихса-Леви. Для вязкой сжимаемой подзадачи шаг по времени выбирался, как в работе [5]. Так как шаги для данных подзадач не совпадают между собой, использовалась схема интегрирования с разными шагами по времени. В процессе моделирования были получены профили продольной скорости для двух сечений перпендикулярных плоскости пластины для разных чисел Рейнольдса. Результаты сравнивались с профилем Блазиуса для ламинарного случая.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА

Уравнения Навье-Стокса для сжимаемого газа в двумерном случае имеют вид [1]

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) -$$

$$-\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right),$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + 2\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) -$$

$$-\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right). \quad (1)$$

Для замыкания задачи необходимо добавить уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

и энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(Eu)}{\partial x} + \frac{\partial(Ev)}{\partial y} - \text{div}(\overline{Pv}) = 0, \quad (3)$$

где

$$\text{div}(\overline{Pv}) = \frac{\partial}{\partial x} (p_{11}u + p_{12}v) + \frac{\partial}{\partial y} (p_{21}u + p_{22}v). \quad (4)$$

Здесь

$$p_{11} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

$$p_{12} = p_{21} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (5)$$

$$p_{22} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Также необходимо уравнение состояния

$$E = \frac{p}{\kappa - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2), \text{ или } \rho C_v T = \frac{p}{\kappa - 1}. \quad (6)$$

Коэффициент динамической вязкости для воздуха для (1) и (5) определяется следующим выражением [2]

Никонов Валерий Владимирович, кандидат технических наук, доцент кафедры конструкции и проектирования летательных аппаратов. E-mail: v_nikonov@mail.ru

$$\mu = 1,45 \times 10^{-6} \frac{T^{3/2}}{T+110}. \quad (7)$$

Система уравнений (1) решается путем расщепления по физическим процессам. Данная идея не нова и взята из [6], но в данной работе сделан переход от модельной задачи к уравнениям Навье-Стокса.

На этапе конвекции решается задача в невязкой постановке:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (8) \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial((E+p)u)}{\partial x} + \frac{\partial((E+p)v)}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

с помощью метода Total Variable Diminishing (TVD) [3, 4].

Для удобства изложения схемы метода TVD запишем уравнения Эйлера движения сжимаемого вязкого газа в потоковой форме [1]

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f_x(w)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(w)}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} w &= \begin{pmatrix} \rho \\ m_x \\ m_y \\ E \end{pmatrix}, \quad f_x(w) = \begin{pmatrix} m_x \\ m_x^2 / \rho + p \\ m_x m_y / \rho \\ (E+p)m_x / \rho \end{pmatrix}, \\ f_y(w) &= \begin{pmatrix} m_y \\ m_x m_y / \rho \\ m_y^2 / \rho + p \\ (E+p)m_y / \rho \end{pmatrix} \quad (10) \end{aligned}$$

где $m_x = \rho u$ – импульс по оси x , $m_y = \rho v$ – импульс по оси y .

Система уравнений (8) замыкается с помощью уравнения состояния для идеального газа, формула (6), где показатель адиабаты для воздуха $\kappa = 1.4$.

Собственные значения матриц якобиана [4]

$$A_x(w) = \frac{\partial f_x(w)}{\partial w}, \quad A_y(w) = \frac{\partial f_y(w)}{\partial w} \quad (11)$$

определяются, как

$$\begin{aligned} \lambda_{x1} &= u - c, \quad \lambda_{x2} = u, \quad \lambda_{x3} = u, \quad \lambda_{x4} = u + c, \\ \lambda_{y1} &= v - c, \quad \lambda_{y2} = v, \quad \lambda_{y3} = v, \quad \lambda_{y4} = v + c, \quad (12) \end{aligned}$$

где c – скорость звука:

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}. \quad (13)$$

Соответствующие правые собственные векторы находятся следующим образом [4]

$$\begin{aligned} R_x^1(w) &= \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \\ v \\ H - uc \end{pmatrix}, \quad R_x^2(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \end{pmatrix}, \\ R_x^3(w) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ v \end{pmatrix}, \quad R_x^4(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \\ v \\ H + uc \end{pmatrix}, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y^1(w) &= \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v - c \\ H - vc \end{pmatrix}, \quad R_y^2(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \end{pmatrix}, \\ R_y^3(w) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}, \quad R_y^4(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v + c \\ H + vc \end{pmatrix}, \quad (15) \end{aligned}$$

где H – полная энтальпия:

$$H = (E + p) / \rho = c^2 / (\kappa - 1) + \frac{1}{2}(u^2 + v^2).$$

Левые собственные векторы-строки L^i , умноженные на вектор столбец конечных разностей переменных (10), можем записать в следующем виде

$$\begin{aligned} \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^1 &= L_{\Delta}^1 w_{i+\frac{1}{2},j}, \\ \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^2 &= L_{\Delta}^2 w_{i+\frac{1}{2},j}, \\ \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^3 &= L_{\Delta}^3 w_{i+\frac{1}{2},j}, \quad (16) \\ \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^4 &= L_{\Delta}^4 w_{i+\frac{1}{2},j}, \end{aligned}$$

где левые собственные векторы-строки L^i определяются [4], как

$$\begin{aligned} L_x^1(w) &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{u}{c} + \frac{\kappa-1}{2c^2} (u^2 + v^2) \right), -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} + \frac{\kappa-1}{c^2} u \right), -\frac{\kappa-1}{2c^2} v, \frac{\kappa-1}{2c^2} \right), \\ L_x^2(w) &= \left(1 - \frac{\kappa-1}{2c^2} (u^2 + v^2), \frac{\kappa-1}{c^2} u, \frac{\kappa-1}{c^2} v, -\frac{\kappa-1}{c^2} \right), \\ L_x^3(w) &= (-v, 0, 1, 0), \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_x^4(w) &= \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{u}{c} + \frac{\kappa-1}{2c^2} (u^2 + v^2) \right), \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} - \frac{\kappa-1}{c^2} u \right), -\frac{\kappa-1}{2c^2} v, \frac{\kappa-1}{2c^2} \right), \\ L_y^1(w) &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} + \frac{\kappa-1}{2c^2} (u^2 + v^2) \right), -\frac{\kappa-1}{2c^2} u, -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} + \frac{\kappa-1}{c^2} v \right), \frac{\kappa-1}{2c^2} \right), \end{aligned}$$

$$L_y^2(w) = \left(1 - \frac{\kappa-1}{2c^2}(u^2+v^2), \frac{\kappa-1}{c^2}u, \frac{\kappa-1}{c^2}v, -\frac{\kappa-1}{c^2} \right), \quad \Delta t_c \leq 0.48 \frac{h}{c}, \quad (33)$$

$$L_y^3(w) = (-u, 1, 0, 0) \quad (18)$$

$$L_x^4(w) = \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{v}{c} + \frac{\kappa-1}{2c^2}(u^2+v^2) \right), -\frac{\kappa-1}{2c^2}u, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} - \frac{\kappa-1}{c^2}v \right), \frac{\kappa-1}{2c^2} \right).$$

TVD схема согласно [3, 4] описывается следующими формулами:

$$w_{i,j}(t + \Delta t_c) = w_{i,j}(t) - \frac{\Delta t_c}{2h} \left(f_{xi+\frac{1}{2},j}^* - f_{xi-\frac{1}{2},j}^* \right), \quad (19)$$

$$f_{i+\frac{1}{2},j}^* = \frac{1}{2} \left(f(w_{i,j}) + f(w_{i+1,j}) - d_{i+\frac{1}{2},j} \right), \quad (20)$$

$$d_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{2h}{\Delta t_c} \sum_{k=1}^3 \beta_{i+\frac{1}{2},j}^k R_{xi+\frac{1}{2},j}^k, \quad (21)$$

где

$$\beta_{i+\frac{1}{2},j}^k = \left| v_{i+\frac{1}{2},j}^k \right| \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k \quad (22)$$

для трех-точечной схемы первого порядка Рое [7]. Данная схема использовалась вблизи границ течения. В случае пяти-точечной схемы второго порядка [3, 4]:

$$\beta_{i+\frac{1}{2},j}^k = Q(v_{i+\frac{1}{2},j}^k + \gamma_{i+\frac{1}{2},j}^k) \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k - (g_{i,j}^k + g_{i+1,j}^k). \quad (23)$$

В формулах (22) и (23)

$$v_{i+\frac{1}{2},j}^k = \frac{\Delta t_c}{2 \Delta x} \lambda_{xk}(w_{i+\frac{1}{2},j}), \quad (24)$$

и ограничителем значения функции в (23):

$$g_{i,j}^k = s_{i+\frac{1}{2},j}^k \max[0, \min\left(\left| \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k \right|, \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^k s_{i+\frac{1}{2},j}^k \right)] / 8, \quad (25)$$

где

$$s_{i+\frac{1}{2},j}^k = \text{sign}(\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k), \quad (26)$$

$$\gamma_{i+\frac{1}{2},j}^k = \begin{cases} (g_{i+\frac{1}{2},j}^k - g_{i,j}^k) / \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k, & \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k \neq 0 \\ 0, & \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k = 0 \end{cases}, \quad (27)$$

$$Q(z) = z^2 + \frac{1}{4}, \quad (28)$$

$$w_{i,j}(t + 2 \Delta t_c) = L_x^* L_y^* L_y^* L_x^* w_{i,j}(t), \quad (29)$$

$$L_x^* : w_{i,j}^*(t + \Delta t_c) = w_{i,j}(t) - \frac{\Delta t_c}{2h} \left(f_{xi+\frac{1}{2},j}^* - f_{xi-\frac{1}{2},j}^* \right), \quad (30)$$

$$L_y^* : w_{i,j}^{**}(t + \Delta t_c) = w_{i,j}^*(t + \Delta t_c) - \frac{\Delta t_c}{2h} \left(f_{yi+\frac{1}{2},j}^{**} - f_{yi-\frac{1}{2},j}^{**} \right). \quad (31)$$

Граничные условия (ГУ) непротекания потока на поверхности пластины для невязкой подзадачи для слоя фиктивных ячеек $j = 0$, находящихся с «обратной стороны» пластины, сводятся к

$$v_{i,0} = -v_{i,1}, \quad (32)$$

где ячейка с координатами $(i, 1)$ является прилегающей к поверхности пластины.

Шаг по времени для процесса движения невязкого течения удовлетворяет неравенству

для критерия Куранта-Фридриха-Леви [3], равного 0,48, который был найден при решении данным методом задачи Рое [7].

Уравнения, описывающие вязкую сжимаемую подзадачу, имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} &= \frac{4}{3} \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ &+ \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) \right), \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \end{aligned} \quad (34)$$

$$+ \frac{4}{3} \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= 2 \frac{\partial(\mu u)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + 2\mu u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2}{3} \frac{\partial(\mu u)}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \mu u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial(\mu v)}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \mu v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial(\mu u)}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \end{aligned} \quad (35)$$

$$+ 2 \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + 2\mu v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{2}{3} \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \mu v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right).$$

Для конечно-разностной аппроксимации системы уравнений (34, 35) использовались следующие схемы:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \approx \frac{\rho_{i,j}^{t+\Delta t} u_{i,j}^{t+\Delta t} - \rho_{i,j}^t u_{i,j}^t}{\Delta t_d},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j}^t - u_{i-1,j}^t}{2 \Delta x}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1,j}^t - 2u_{i,j}^t + u_{i+1,j}^t}{\Delta x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \approx \frac{u_{i+1,j+1}^t - u_{i+1,j-1}^t - u_{i-1,j+1}^t + u_{i-1,j-1}^t}{4 \Delta x \Delta y},$$

где Δt_d – шаг по времени для процесса диффузии (вязкой подзадачи), а Δx и Δy – по пространству. Индекс i отвечает за изменение переменной вдоль оси x , j – вдоль оси y . Остальные производные аппроксимируются аналогичным образом.

Граничные условия прилипания потока на поверхности пластины для слоя фиктивных ячеек $j = 0$, находящихся с «обратной стороны» пластины, сводятся к

$$u_{i,0} = -u_{i,1}, \quad v_{i,0} = 0, \quad (37)$$

где ячейка с координатами $(i,1)$ является прилегающей к поверхности пластины.

В работах [8, 9] было показано, что при выборе шага по времени в виде

$$\Delta t_d = kh^2 / \nu \quad (38)$$

ошибка численного решения уравнения диффузии с помощью схемы «донор-акцептор» и схемы «вперед по времени, центральная по пространству» (ВВЦП) зависит только от константы k и от количества сделанных шагов по времени. Здесь h – шаг ячейки расчетной сетки по пространству $h = \Delta x = \Delta y$. В работе [9] путем серии численных экспериментов было найдено значение $k = 0.22$, при котором ошибка решения минимальна. В работе [5] было показано, что данное значение коэффициента k справедливо и для нашей численной схемы.

ТЕСТИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ

Рассматривается задача о продольном обтекании плоской пластины и формирования на ней пограничного слоя. Данная задача имеет точное в рамках теории пограничного слоя решение, полученное Блазиусом для ламинарного случая, которое хорошо подтверждается в эксперименте [9]. Известно, что с помощью введения безразмерной нормальной координаты

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \quad (39)$$

и величины продольной компоненты скорости

$$u^* = \frac{u}{u_\infty} \quad (40)$$

профили компоненты скорости u^* в разных сечениях пластины $x = \text{const}$ будут совпадать, что является удобным для сравнения полученных данных.

Сравнение профилей скорости с решением Блазиуса производилось для двух сечений на расстояниях $x_n \gg 0.5b$ и $x_n \gg 0.75b$ от переднего края пластины, где b – длина пластины.

Расчеты проводились в диапазоне чисел Рейнольдса от 10^4 до 10^7 . Результаты численного моделирования приведены на рисунках 1-8. Здесь a_x и a_y – размеры расчетной области вдоль координат x и y соответственно, n_x и n_y – число ячеек сетки вдоль координат x и y . Видно, что необходимый шаг расчетной сетки пропорционален квадратному корню из числа Рейнольдса. Это условие вытекает из обратной пропорциональности толщины ламинарного пограничного слоя корню квадратному из числа Рейнольдса.

В результате численного моделирования задачи было выявлено, что в диапазоне чисел Рей-

нольдса от 10^4 до 10^7 не происходит перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный. При этом никаких ограничений на численную схему не накладывалось. Этот вопрос требует дальнейших исследований. Также оказалось сюрпризом, что TVD схема первого порядка Рое [7] показывает лучшие результаты для ламинарного пограничного слоя по сравнению со схемой второго порядка [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. - М.- Л.: Гос. изд. технико-теоретической литературы. 1950. - 676 с.
2. Себиси, Т. Конвективный теплообмен / Т. Себиси, П. Брэдишоу. - Пер. с англ. С.С. Ченцова и В.А. Хохрякова. - Под. ред. Пирумова У.Г. - М.: Мир, 1987. - 593 с.
3. Harten, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws / A. Harten // J. of Comp. Phys. - V. 49. - 1983. - P. 357-393.
4. Carofano, G.C. Blast computation using Harten's total variation diminishing scheme / Garry C. Carofano. Technical report ARLCB-TR-84029. US Army Armament Research and Development Center. 1984.
5. Никонов, В.В. О тестировании конечно-разностной схемы для моделирования процесса вязкой диффузии с учетом сжимаемости газа в двумерном случае / В.В. Никонов // Известия Самарского научного центра РАН. 2020. - Т. 22. - № 5. - С. 128-131.
6. Самарский, А.А. Аддитивные схемы для задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. - М.: Наука, 2001. - 319 с.
7. Roe, P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes / P.L. Roe // J. of Comp. Phys. - V. 135. - 1997. - P. 250-258.
8. Nikonov, V. The Ratio between Spatial and Time Resolutions for the Diffusion Substep in 2D Computational Vortex Methods / V. Nikonov, N. Kornev, A. Leder // Schiffbau Forschung. - 2002. - Vol. 41. - N 3/4. - Pp. 5-12.
9. Никонов, В.В. О выборе шага по времени в схеме ВВЦП при расчете процесса диффузии / В.В. Никонов // Сборник трудов 13-го Всероссийского семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. - Самара: СГАУ, 2007. - Ч. 2. С. 55-57.
10. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг // Пер. с нем. Г.А. Вольперта. Под. ред. Лойцянского Л.Г. - М.: Наука. - 1974. - 712 с.

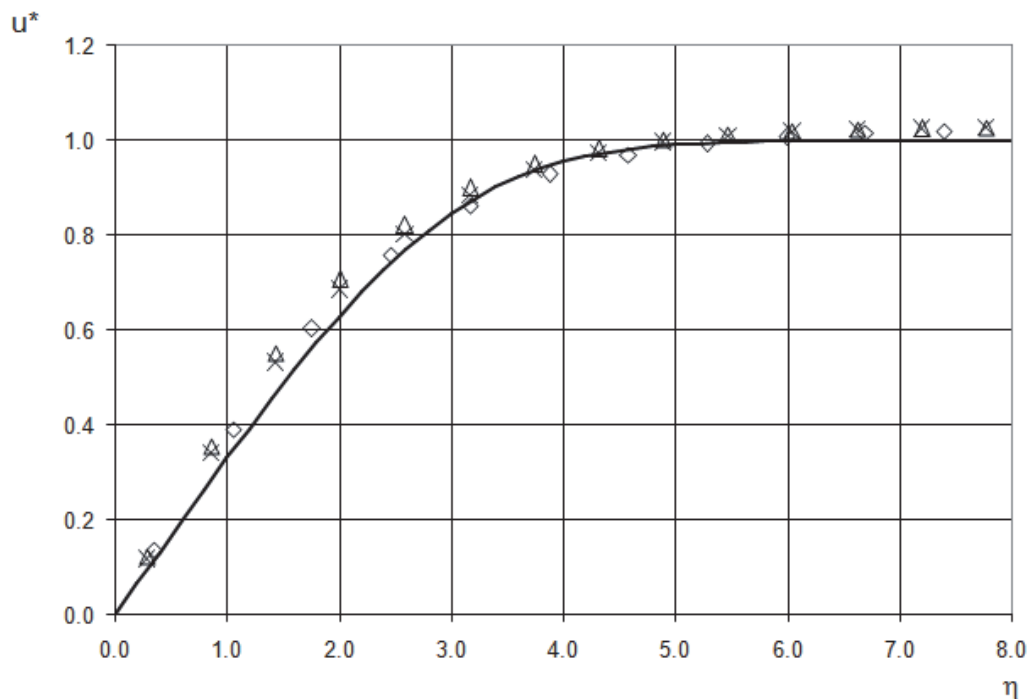


Рис. 1. Распределение продольной безразмерной компоненты скорости u^* в пограничном слое над поверхностью пластины в сравнении с решением Блазиуса, схема [7]:

$b = 0.1$ м, $Re = 10^4$, $a_x \times a_y = 0.2 \times 0.14$ м, $n_x \times n_y = 400 \times 280$; $u_\infty = 14.63394141$ м/с, $\rho_\infty = 10132.5$ Па, $\rho_\infty = 0.1225$ кг/м³, $dt = 7.038175965 \cdot 10^{-7}$ с, $dt_d = 3.758386 \cdot 10^{-4}$ с, численное решение: \diamond - сечение $x = 0.5b$, $t = 40 dt_d$; Δ - сечение $x = 0.75b$, $t = 40 dt_d$;

\times - сечение $x = 0.75b$, $t = 80 dt_d$; — - решение Блазиуса

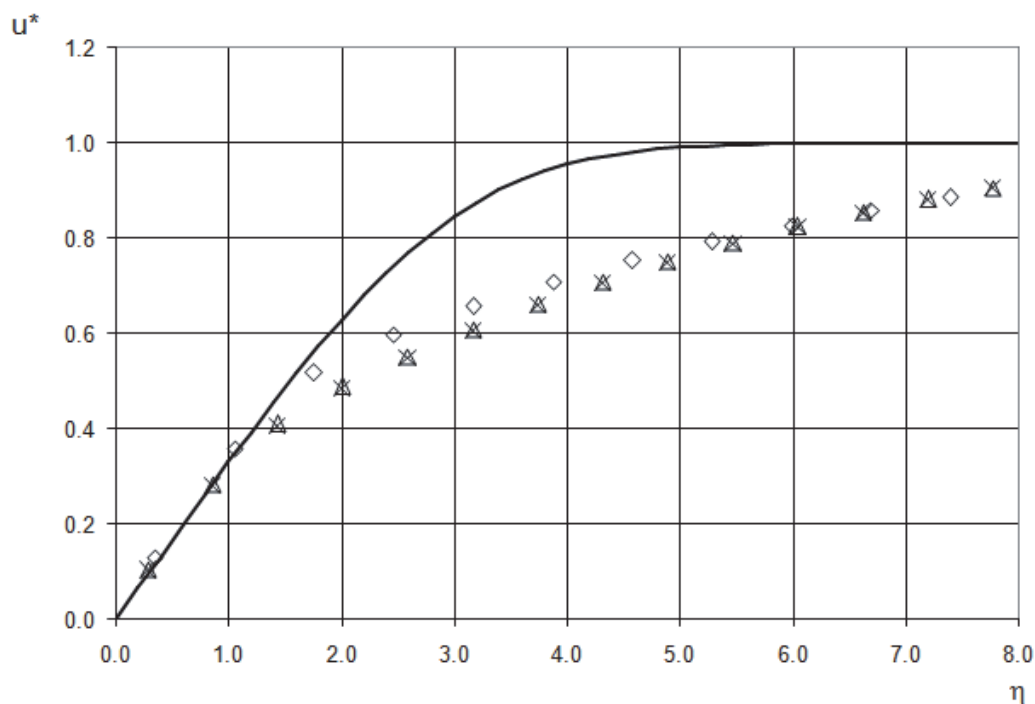


Рис. 2. Распределение продольной безразмерной компоненты скорости u^* в пограничном слое над поверхностью пластины в сравнении с решением Блазиуса, схема [4]:

$b = 0.1$ м, $Re = 10^4$, $a_x \times a_y = 0.2 \times 0.14$ м, $n_x \times n_y = 400 \times 280$; $u_\infty = 14.63394141$ м/с, $\rho_\infty = 10132.5$ Па, $\rho_\infty = 0.1225$ кг/м³, $dt = 7.038175965 \cdot 10^{-7}$ с, $dt_d = 3.758386 \cdot 10^{-4}$ с, численное решение: \diamond - сечение $x = 0.5b$, $t = 40 dt_d$; Δ - сечение $x = 0.75b$, $t = 40 dt_d$;

\times - сечение $x = 0.75b$, $t = 80 dt_d$; — - решение Блазиуса

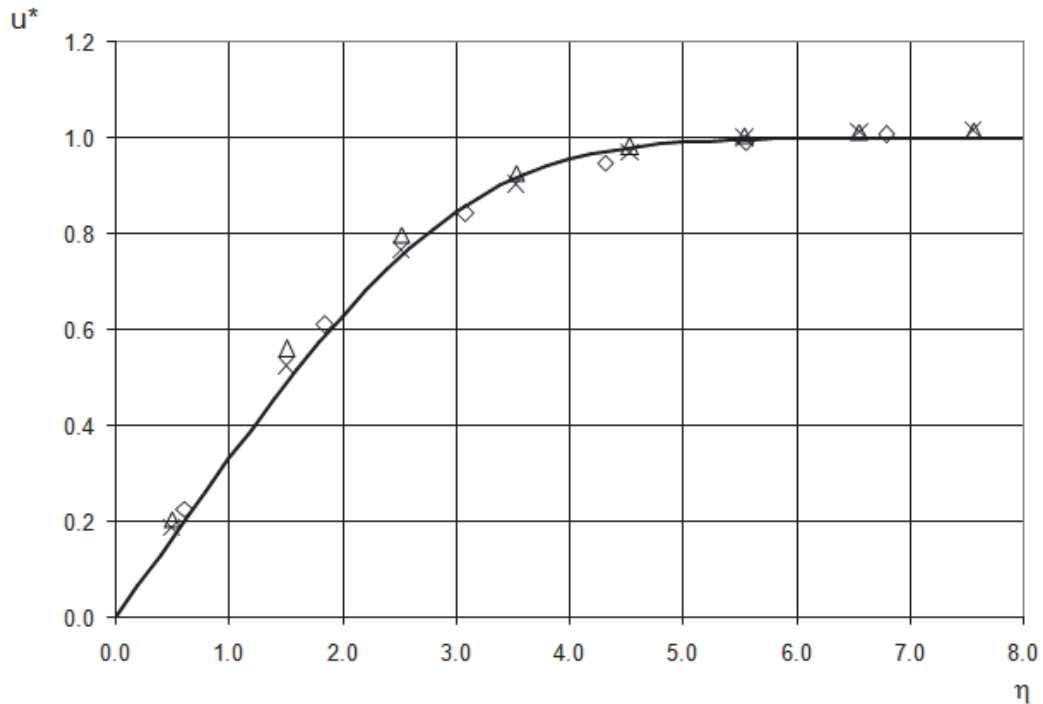


Рис. 3. Распределение продольной безразмерной компоненты скорости u^* в пограничном слое над поверхностью пластины в сравнении с решением Блазиуса, схема [7]:

$b = 0.1$ м, $Re = 10^5$, $a_x \times a_y = 0.2 \times 0.04$ м, $n_x \times n_y = 800 \times 160$; $u_\infty = 14.63394141$ м/с,

$p_\infty = 101325.0$ Па, $\rho_\infty = 1.225$ кг/м³, $dt = 3.524367935 \cdot 10^{-7}$ с, $dt_d = 9.395965 \cdot 10^{-4}$ с,

численное решение: \diamond - сечение $x = 0.5b$, $t = 10 dt_d$; Δ - сечение $x = 0.75b$, $t = 10 dt_d$;

\times - сечение $x = 0.75b$, $t = 20 dt_d$; — - решение Блазиуса

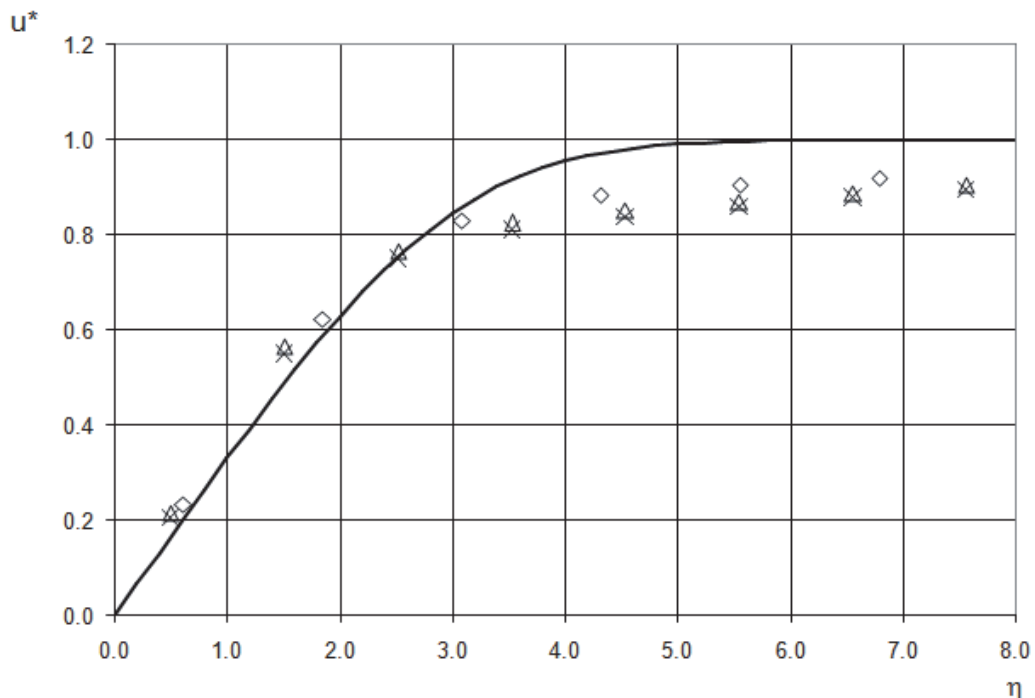


Рис. 4. Распределение продольной безразмерной компоненты скорости u^* в пограничном слое над поверхностью пластины в сравнении с решением Блазиуса, схема [4],

$b = 0.1$ м, $Re = 10^5$, $a_x \times a_y = 0.2 \times 0.04$ м, $n_x \times n_y = 800 \times 160$; $u_\infty = 14.63394141$ м/с,

$p_\infty = 101325.0$ Па, $\rho_\infty = 1.225$ кг/м³, $dt = 3.524367935 \cdot 10^{-7}$ с, $dt_d = 9.395965 \cdot 10^{-4}$ с,

численное решение: \diamond - сечение $x = 0.5b$, $t = 10 dt_d$; Δ - сечение $x = 0.75b$, $t = 10 dt_d$;

\times - сечение $x = 0.75b$, $t = 20 dt_d$; — - решение Блазиуса

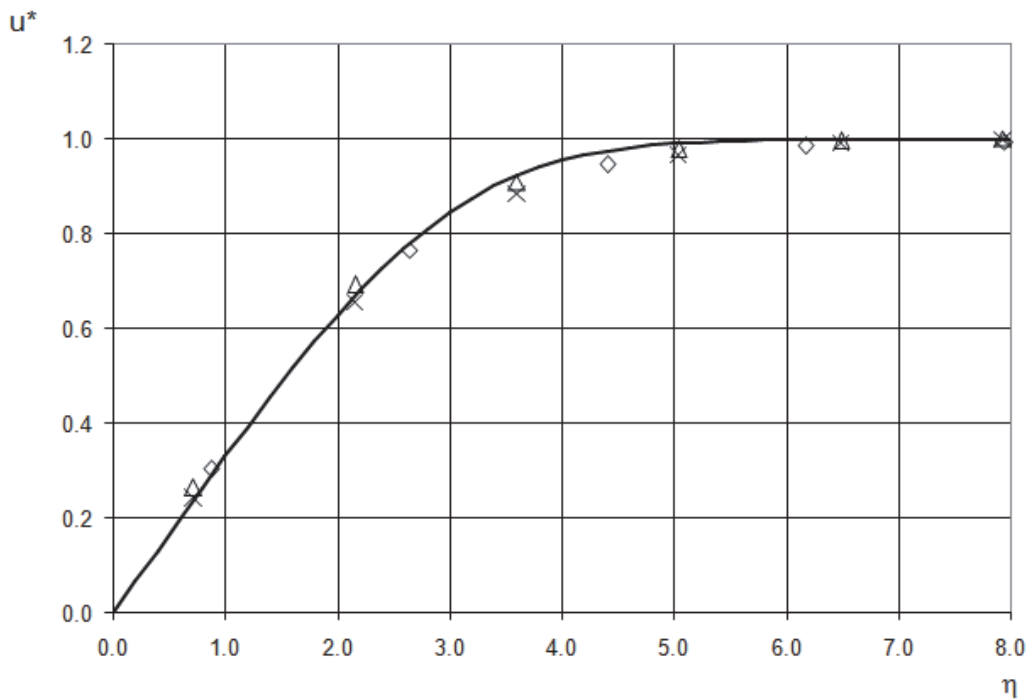


Рис. 5. Распределение продольной безразмерной компоненты скорости u^* в пограничном слое над поверхностью пластины в сравнении с решением Блазиуса, схема [7]:
 $b = 0.1$ м, $Re = 10^6$, $a_x \times a_y = 0.2 \times 0.02$ м, $n_x \times n_y = 1600 \times 160$; $u_\infty = 146.3394141$ м/с,
 $p_\infty = 101325.0$ Па, $\rho_\infty = 1.225$ кг/м³, $dt = 1.760862990 \cdot 10^{-7}$ с, $dt_d = 2.348991 \cdot 10^{-4}$ с,
 численное решение: \diamond - сечение $x = 0.5b$, $t = 5 dt_d$; Δ - сечение $x = 0.75b$, $t = 5 dt_d$;
 \times - сечение $x = 0.75b$, $t = 10 dt_d$; — - решение Блазиуса

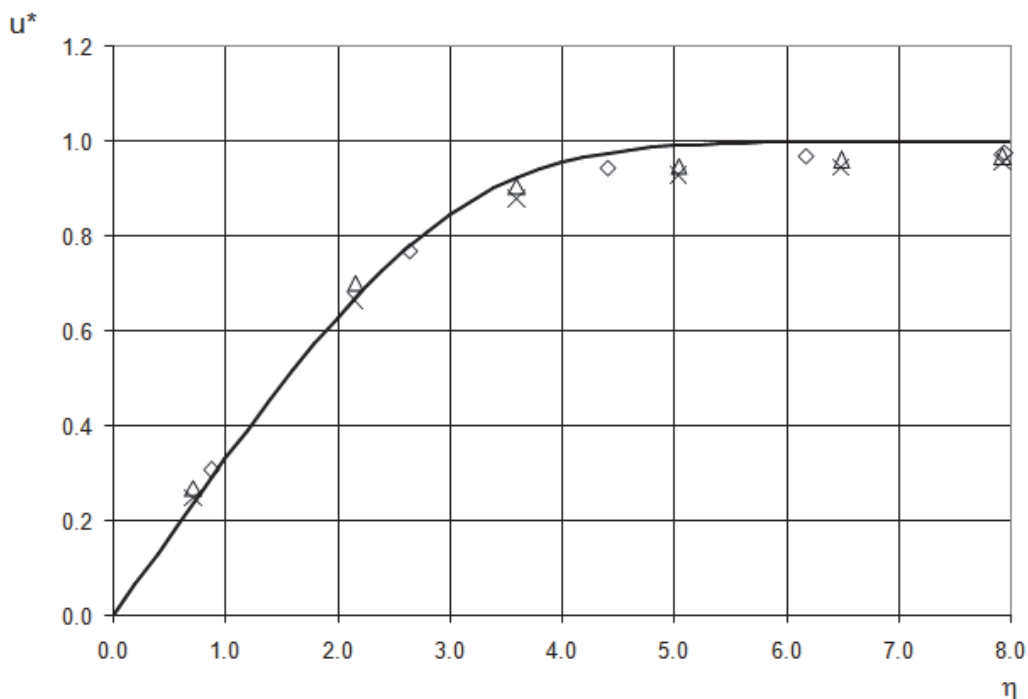


Рис. 6. Распределение продольной безразмерной компоненты скорости u^* в пограничном слое над поверхностью пластины в сравнении с решением Блазиуса, схема [4]:
 $b = 0.1$ м, $Re = 10^6$, $a_x \times a_y = 0.2 \times 0.02$ м, $n_x \times n_y = 1600 \times 160$; $u_\infty = 146.3394141$ м/с,
 $p_\infty = 101325.0$ Па, $\rho_\infty = 1.225$ кг/м³, $dt = 1.760862990 \cdot 10^{-7}$ с, $dt_d = 2.348991 \cdot 10^{-4}$ с,
 численное решение: \diamond - сечение $x = 0.5b$, $t = 5 dt_d$; Δ - сечение $x = 0.75b$, $t = 5 dt_d$;
 \times - сечение $x = 0.75b$, $t = 10 dt_d$; — - решение Блазиуса

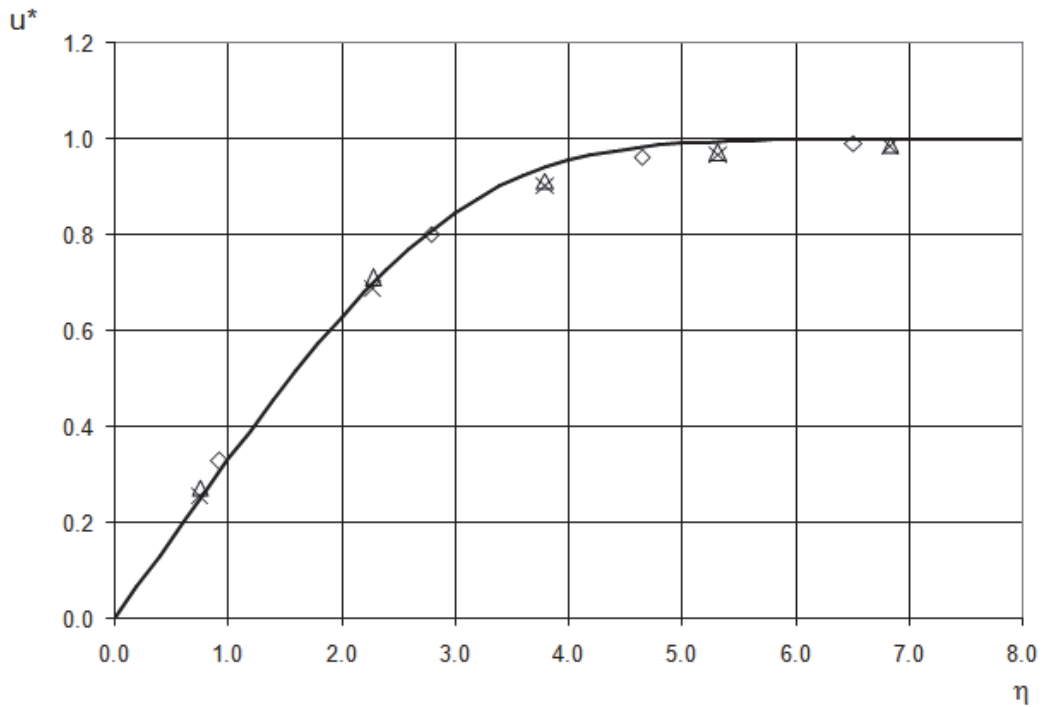


Рис. 7. Распределение продольной безразмерной компоненты скорости u^* в пограничном слое над поверхностью пластины в сравнении с решением Блазиуса, схема [7]:
 $b = 1.0$ м, $Re = 10^7$, $a_x \times a_y = 2.0 \times 0.05$ м, $n_x \times n_y = 4800 \times 120$; $u_\infty = 146.3394141$ м/с,
 $p_\infty = 101325.0$ Па, $\rho_\infty = 1.225$ кг/м³, $dt = 5.875709711 \cdot 10^{-7}$ с, $dt_d = 2.6099903 \cdot 10^{-3}$ с,
численное решение: \diamond - сечение $x = 0.5b$, $t = 5 dt_d$; Δ - сечение $x = 0.75b$, $t = 5 dt_d$;
 \times - сечение $x = 0.75b$, $t = 10 dt_d$; — - решение Блазиуса

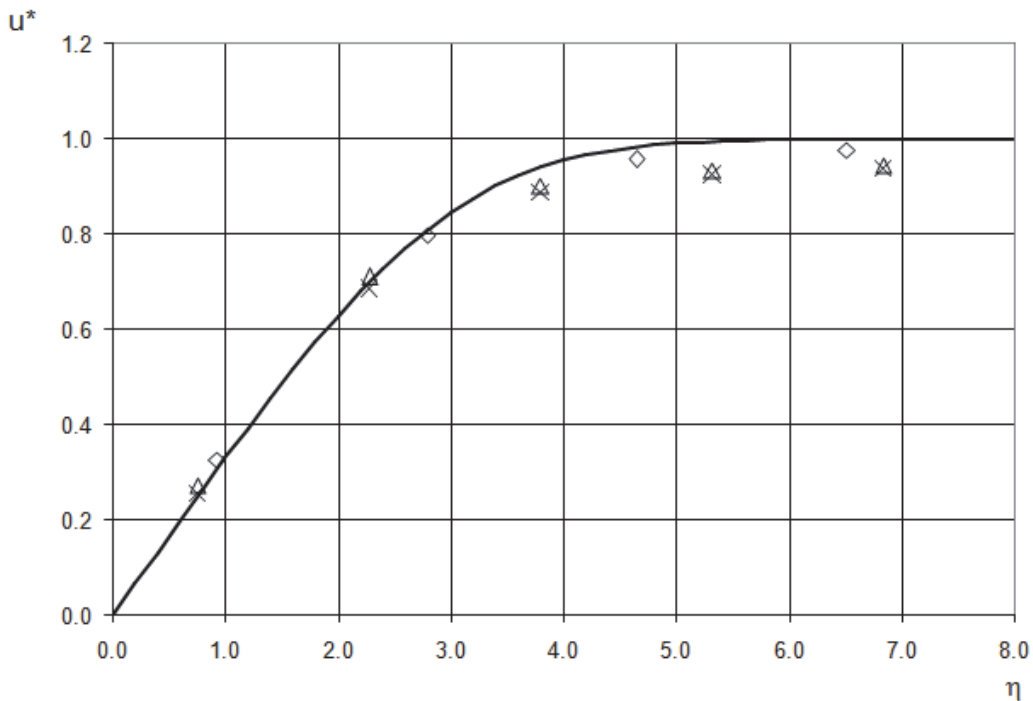


Рис. 8. Распределение продольной безразмерной компоненты скорости u^* в пограничном слое над поверхностью пластины в сравнении с решением Блазиуса, схема [4]:
 $b = 1.0$ м, $Re = 10^7$, $a_x \times a_y = 2.0 \times 0.05$ м, $n_x \times n_y = 4800 \times 120$; $u_\infty = 146.3394141$ м/с,
 $p_\infty = 101325.0$ Па, $\rho_\infty = 1.225$ кг/м³, $dt = 5.875709711 \cdot 10^{-7}$ с, $dt_d = 2.6099903 \cdot 10^{-3}$ с,
численное решение: \diamond - сечение $x = 0.5b$, $t = 5 dt_d$; Δ - сечение $x = 0.75b$, $t = 5 dt_d$;
 \times - сечение $x = 0.75b$, $t = 10 dt_d$; — - решение Блазиуса

**2D DIRECT NUMERICAL SIMULATION
OF A COMPRESSIBLE BOUNDARY LAYER ON A FLAT PLATE**

© 2021 V.V. Nikonov

Samara National Research University named after Academician S.P. Korolyov

In a paper a compressible air boundary layer on a flat plate is modeled. Total Variation Deminition (TVD) scheme is used for compressibility calculation. The longitudinal velocity profile was obtained for two sections perpendicular to the plate plane for different Reynolds numbers. The numerical results are compared with the Blasius' solution for the laminar case.

Keywords: air, compressibility, Navier-Stokes equations, boundary layer, direct simulation, numerical simulation, two-dimensional flow.

DOI: 10.37313/1990-5378-2021-23-6-94-102