УДК 517. 93 : 517.937

О РЕАЛИЗАЦИИ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИИ ДЛЯ КОНЕЧНОГО ПУЧКА ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА. I

© 2022 А.В. Данеев, В.А. Русанов, П.А. Плеснёв

Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия

Статья поступила в редакцию 31.01.2022

На базе проективизации нелинейного функционального оператора Релея–Ритца и тензорного произведения вещественных гильбертовых пространств, для конечного пучка интегральных кривых управляемой билинейной системы второго порядка, определены необходимые и достаточные условия существования дифференциальной реализации этого пучка в классе линейных нестационарных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (в том числе гиперболических моделей) в сепарабельном гильбертовом пространстве. При этом исходная билинейная структура моделирует нелинейность динамики системы, как самой траектории, так и скорости движения на этой траектории. Полученные результаты имеют приложения в теории обратных задач нестационарных управляемых полилинейных дифференциальных моделей высших порядков и теории оптимального управления по технологии последовательных приближений в решении двухточечной краевой задачи на базе процедуры квазилинеаризации по методу Пикара.

Ключевые слова: обратные задачи эволюционных уравнений, дифференциальная реализация (линейная/билинейная), билинейная динамическая система второго порядка, тензорное произведение гильбертовых пространств, нелинейный оператор Релея–Ритца.

DOI: 10.37313/1990-5378-2022-24-1-59-66

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект: 121041300056-7).

ВВЕДЕНИЕ

Проводимое ниже изыскание можно рассматривать как продолжение исследования по разрешимости задачи дифференциального моделирования нелинейной динамической системы с уравнениями состояния в бесконечномерном гильбертовом пространстве, начатой в работах [1, 2], в которых качественный анализ проблемы осуществления такого моделирования концентрировался вокруг нестационарной гиперболической модели с полилинейным регулятором. Данное исследование развивает эту проблему в контексте “*локальной структурной устойчивости*” подобных моделей.

Понятие структурной устойчивости непрерывной динамической системы связано с морфологией формы её уравнений состояния. Более аккуратно [3, с. 107]: динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением, называют структурно устойчивой, если малые возмущения δ её эволюционного оператора приводят к топологически эквивалентной динамической системе, т.е. такой, для которой *любой* её траекторный пучок N_δ можно привести в пучок N от исходной системы путем некоторой (зависящей от δ) невырожденной непрерывной замены фазовых координат.

Ниже обсудим эту проблему в постановке *локальной* структурной устойчивости, т.е. когда: (i) динамическая модель является системой второго порядка (возможно гиперболической) с билинейным регулятором, (ii) траекторный пучок $\tilde{N}$ исследуемой системы представляет *фиксированное конечное* семейство управляемых интегральных кривых, (iii) для грубых (больших) возмущений Δ уравнений состояния системы, устраняющих свойство билинейности регулятора (до свойства линейности), тем не менее, имеет место $\tilde{N}_\Delta = \tilde{N}$. Иными словами, локальный пучок $\tilde{N}$ инвариантен к “обнуле-

Данеев Алексей Васильевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Информационные системы и защита информации». E-mail: daneev@mail.ru
Русанов Вчеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор.
Плеснев Павел Александрович, аспирант.

нию” билинейной структуры регулятора моделируемой дифференциальной системы[1]. Фактически это означает, что для управляемых траекторных кривых пучка $\tilde{N}$ предполагается наличие *принципа суперпозиции*[2], – когда зависимость выходных величин от входных воздействий суть *линейная* [4, с. 18].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Далее $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ – вещественные сепарабельные гильбертовы пространства (нормы удовлетворяют “условию параллелограмма” [5, с. 47]), $L(Y, X)$ – банахово пространство (с операторной нормой) линейных непрерывных операторов, действующих из пространства Y в X (аналогично $L(\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$ – пространство всех линейных непрерывных операторов для двух банаховых пространств $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{B}''$), $\mathcal{Z}(X^2, X)$ – пространство всех непрерывных билинейных отображений из $X\times X$ в X; ниже активно используем линейную изометрию [6, с. 650] пространств $\mathcal{Z}(X^2, X)$ и $L(X, L(X, X))$.

Обозначим через T отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ, через $\wp_\mu$ – σ-алгебру всех μ-измеримых подмножеств из T. Сверх того примем, что $AC^1(T, X)$ – множество всех функций φ: $T \to X$, первая производная которых является абсолютно-непрерывной на T функцией (относительно меры μ). Если $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ – некоторое банахово пространство, то через $L_p(T, \mathcal{B})$, $p \in [1, \infty)$ будем обозначать банахово пространство классов μ-эквивалентности всех интегрируемых по Бохнеру отображений f: $T \to \mathcal{B}$ с нормой $(\int_T \|f(\tau)\|^p\mu(d\tau))^{1/p}<\infty$, соответственно через $L_\infty(T, \mathcal{B})$ – банахово пространство данных классов с нормой $\operatorname{ess\,sup}_T \|f\|<\infty$. В означенном контексте условимся, что

$$\mathbb{L}_2 := L_2(T, L(X, X)) \times L_2(T, L(X, X)) \times L_2(T, L(Y, X)) \times$$
$$\times L_2(T, \mathcal{Z}(X^2, X)) \times L_2(T, \mathcal{Z}(X^2, X)) \times L_2(T, \mathcal{Z}(X^2, X)),$$

Так как во многих задачах реализации дифференциального представления моделируемых нелинейных динамических процессов необходимо учитывать нелинейность как от самой траектории, так и от скорости движения на этой траектории, то ниже основное внимание будет сосредоточено на исследовании модели нелинейной дифференциальной реализации, зависящей от трех нестационарных билинейных структур $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3 \in L_2(T, \mathcal{Z}(X^2, X))$, когда оператор $\mathbb{D}_1$ задан на самой траектории, второй билинейный оператор $\mathbb{D}_2$ зависит от траектории и скорости движения по ней, и третий билинейный оператор $\mathbb{D}_3$ зависит только от скорости движения по этой траектории системы.

Для формализации задачи моделирования считаем, что на временном интервале T фиксировано (возможно *a posteriori*) некоторое поведение исследуемой билинейной системы второго порядка в виде пучка $\tilde{N}$ управляемых динамических процессов типа “вход–выход”, т.е. формально:[3]

$$\begin{gathered}\hat{A}d^2x/dt^2 + A_1^* dx/dt + A_0^* x = \\ = B^*u + \mathbb{D}_1^*(x, x) + \mathbb{D}_2^*(x, dx/dt) + \mathbb{D}_3^*(dx/dt, dx/dt), \forall (x, u) \in \tilde{N}; \qquad (1) \\ (A_1^*, A_0^*, B^*, \mathbb{D}_1^*, \mathbb{D}_2^*, \mathbb{D}_3^*) \in \mathbb{L}_2,\ \mathbb{D}_1^* \neq \mathbb{O},\ \mathbb{D}_2^* \neq \mathbb{O},\ \mathbb{D}_3^* \neq \mathbb{O}, \\ \hat{A} \in L_\infty(T, L(X, X)),\ \mu\{t \in T: \hat{A}(t) = 0 \in L(X, X)\} = 0, \\ \tilde{N} \subset \{(x, u): x \in AC^1(T, X), u \in L_2(T, Y)\},\ \operatorname{Card} \tilde{N} < \aleph_0,\end{gathered}$$

где (x, u) – пара “*траектория, программное управление*”, $\aleph_0$ – алеф нуль, $\mathbb{O} \in L_2(T, \mathcal{Z}(X^2, X))$ – нулевой оператор; с учетом дальнейших построений нарушение условия $\operatorname{Ker} \hat{A}(t) = 0 \in X$ необременительно.

Постановка задачи: для управляемого траекторного пучка $\tilde{N}$, $\operatorname{Card} \tilde{N} < \aleph_0$ системы (1) определить необходимые и достаточные условия существования набора оператор-функций $(A_1, A_0, B, \mathbb{O}, \mathbb{O}, \mathbb{O}) \in \mathbb{L}_2$, для которого осуществима линейная дифференциальная реализация вида:

$$\begin{gathered}\hat{A}d^2x/dt^2 + A_1dx/dt + A_0x = \\ = Bu + \mathbb{O}(x, x) + \mathbb{O}(x, dx/dt) + \mathbb{O}(dx/dt, dx/dt), \forall (x, u) \in \tilde{N}. \qquad (2)\end{gathered}$$

Ниже в целях удобства термины *линейная* и *билинейная* дифференциальные реализации будем различать, соответственно, аббревиатурами ЛДР и БДР.

[1] Данный подход можно привлечь в расширении метода “квазилинеаризации” [4, с. 168] при решении задачи оптимального управления по технологии последовательных приближений, известной также как метод Пикара [4, с. 173].
[2] Онтологию принципа суперпозиции в физике см. в [13, с. 418].
[3] Равенство в (1) рассматривается как тождество в $L_1(T, X)$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Рассмотрим тензорное произведение $X \otimes X$ как сугубо алгебраический объект [5, с. 39] и пусть $(Z, \|\cdot\|_Z)$ – пополнение [5, с. 54] предгильбертова пространства $X \otimes X$ по кросс-норме $\|\cdot\|_Z$, порождаемой скалярным произведением в $X \otimes X$; уточняющие детали, касающиеся структуры ортонормированного базиса в $(Z, \|\cdot\|_Z)$, см. в предложении 2 [7, с. 65]. Сверх того, примем сокращения:

$$U := X \times X \times Y \times Z \times Z \times Z,\ \|(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\|_U := (\|\cdot\|_X^2 + \|\cdot\|_X^2 + \|\cdot\|_Y^2 + \|\cdot\|_Z^2 + \|\cdot\|_Z^2 + \|\cdot\|_Z^2)^{1/2},$$

$$\mathbf{L}_2 := \mathrm{L}_2(T, L(X, X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(X, X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Y, X)),$$

$$\acute{\mathbf{L}}_2 := \mathrm{L}_2(T, L(Z, X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Z, X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Z, X));$$

ясно, что пространство $\mathbf{L}_2 \times \acute{\mathbf{L}}_2$ (с топологией произведения) линейно гомеоморфно $\mathrm{L}_2(T, L(U, X))$.

Обозначим через π – универсальное билинейное отображение π: $X \times X \to X \otimes X$; на языке категорий морфизм π определяет тензорное произведение $X \otimes X$ как универсальный отталкивающий объект [5, с. 40]. Тогда, для любого разложимого тензора $\mathrm{x}_1 \otimes \mathrm{x}_2 \in X \otimes X$ имеем:

$$(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \mapsto \pi(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = \mathrm{x}_1 \otimes \mathrm{x}_2,\ \|\mathrm{x}_1 \otimes \mathrm{x}_2\|_Z = \|\mathrm{x}_1\|_X \|\mathrm{x}_2\|_X;$$

данные соотношения важны для конкретизации в (3) конструкции нормы $\|\cdot\|_U$; см. формулу (5).

Пусть декартов квадрат $X^2 = X \times X$ наделен нормой $(\|\cdot\|_X^2 + \|\cdot\|_X^2)^{1/2}$. Тогда $\pi \in \mathcal{Z}(X^2, Z)$ и, с учетом теоремы 2 [6, с. 245], для любого билинейного отображения $\mathcal{D} \in \mathcal{Z}(X^2, X)$ найдется[4] линейный непрерывный оператор $\mathrm{D} \in L(Z, X)$ такой, что $\mathcal{D} = \mathrm{D} \circ \pi$, при этом для каждой N-траектории $t \mapsto x(t)$ (т.е. для всякой пары $(x, u) \in N$), очевидно, будет

$$\pi(x, x),\ \pi(x, dx/dt),\ \pi(dx/dt, dx/dt) \in \mathrm{L}_\infty(T, Z).$$

Нам понадобятся несколько вспомогательных предложений (модификации утверждений из [8]), которые сформулируем в виде лемм и теорем, имеющих самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть* $\mathbb{D}(\cdot,\cdot) \in \mathrm{L}_2(T, \mathcal{Z}(X^2, X))$, $z \in \mathrm{L}_\infty(T, X)$, *тогда* $\mathbb{D}(z,\cdot) \in \mathrm{L}_2(T, L(X, X))$. *При этом для любого набора оператор-функций* $(A_1, A_0, B, \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3) \in \mathbb{L}_2$ *и отображения*

$$F\colon \mathrm{L}_2(T, X) \times \mathrm{L}_2(T, X) \times \mathrm{L}_2(T, Y) \times \mathrm{L}_2(T, X^2) \times \mathrm{L}_2(T, X^2) \times \mathrm{L}_2(T, X^2) \to \mathrm{L}_1(T, X),$$

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \mapsto F(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) := A_1 y_1 + A_0 y_2 + B y_3 + \mathbb{D}_1 y_4 + \mathbb{D}_2 y_5 + \mathbb{D}_3 y_6$$

существуют единственный кортеж $(C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3) \in \mathbf{L}_2 \times \acute{\mathbf{L}}_2$ *и, соответственно, единственное линейное отображение*

$$M\colon \mathrm{L}_2(T, U) \to \mathrm{L}_1(T, X),$$

$$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \mapsto M(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) := C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + D_1 z_4 + D_2 z_5 + D_3 z_6,$$

такое, что выполняется следующее функциональное равенство:

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \mapsto F(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = M(y_1, y_2, y_3, \pi(y_4), \pi(y_5), \pi(y_6)),$$

которое, в свою очередь, индуцирует для оператор-функций из F и M соотношения:

$$A_1 = C_1,\ A_0 = C_2,\ B = C_3,$$

$$\mathbb{D}_1 = D_1 \circ \pi,\ \mathbb{D}_2 = D_2 \circ \pi,\ \mathbb{D}_3 = D_3 \circ \pi.$$

Лемма 2. *Пусть* $(S, Q) \in \wp_\mu \times \wp_\mu$, *тогда* $\mu(S \setminus Q) = 0$, *если имеет место*

$$S := \{t \in T\colon (g(t), w(t), v(t), q(t), s(t), h(t)) = 0 \in U\},$$

$$Q := \{t \in T\colon \dot{g}(t) = 0 \in X\},\ \dot{g} = dg/dt,\ (g, w, v, q, s, h) \in V_N^q,\ q \in \{1, 2\},$$

$$V_N^q := \mathrm{Span}\{(dx/dt, x, u,$$

$$(q-1)\pi(x, x), (q-1)\pi(x, dx/dt), (q-1)\pi(dx/dt, dx/dt)) \in \mathrm{L}_2(T, U)\colon (x, u) \in N\},$$

$$N \subset \{(x, u)\colon x \in AC^1(T, X),\ u \in \mathrm{L}_2(T, Y)\},\ \mathrm{Card}\, N \le \exp \aleph_0.$$

[4] Это – сильное условие, поскольку на его базе для моделей (1) применима вся теория расширений M_2-операторов [9], что позволяет существенно расширить методы апостериорного моделирования бихевиористических систем [10]; сошлемся также на работу [11], в которой предложена конструктивная процедура построения конечномерных билинейных дифференциальных реализаций, позволившая показать, как рассматривать уравнения Эйлера в качестве “эмпирической экстраполяции” модели реализации наблюдаемого пространственного вращательного движения твердого тела в аспекте математической постановки задачи структурной идентификации автономных уравнений нелинейной динамики.

Далее, пусть $L_+(T, R)$ – выпуклый конус [7] классов μ-эквивалентности всех вещественных неотрицательных μ-измеримых на T функций и $\le_L$ – такое квазиупорядочение в $L_+(T, R)$, что $\xi' \le_L \xi''$ в том и только в том случае, если $\xi'(t) \le \xi''(t)$ μ-почти всюду в T. При этом для заданного $W \subset L_+(T, R)$ через $\sup_L W$ обозначим наименьшую верхнюю грань подмножества W, если эта грань существует в конусе $L_+(T, R)$ в структуре квазиупорядочения $\le_L$, в частности, будет

$$\sup_L\{\xi', \xi''\} = \xi' \vee \xi'' := 2^{-1}(\xi' + \xi'' + |\xi' - \xi''|).$$

В данном контексте рассмотрим $\Re(W) := \{\xi \in L_+(T, R) : \xi \le_L \sup_L W\}$, тогда $(\Re(W), \le_L)$ образует решетку [6, с. 363] с универсальными границами $\chi_\varnothing$ и $\sup_L W$; здесь $\chi_\varnothing$ – нулевой элемент конуса $L_+(T, R)$. Принято [7, с. 339] также писать "$\Re(W)$ – *решетка с ортодополнением*".

Из теоремы 17 [6, с. 68] и следствия 1 [6, с. 69] несложно извлеч следующее общее утверждение (ниже $\inf_L$ – наибольшая нижняя $\le_L$-грань):

Лемма 3. *Решетка* $\Re(W)$ *– полная, т.е.* $\inf_L V, \sup_L V \in \Re(W)$ *для каждого* $V \subseteq \Re(W)$.

Пусть $\Psi: V_N^q \to L_+(T, R)$ – нелинейный функциональный оператор Релея–Ритца [4, 5, 8, 9]:

$$\Psi(\phi) := \|\hat{A}\dot{g}\|_X (\|\phi\|_U + \chi_S)^{-1}, \tag{3}$$

где $\phi \in V_N^q$, χ_S – характеристическая функция множества $S := T \setminus \operatorname{supp} \phi$, при этом в силу леммы 2 на интервале времени T имеем

$$\operatorname{supp} \Psi(\phi) = \operatorname{supp} \|\hat{A}\dot{g}\|_X \ (\mathrm{mod}\ \mu);$$

здесь в определении supp-конструкции носителя функции следуем [6, с. 137].

Оператор (3) удовлетворяет весьма простым (но геометрически важным) соотношениям:

$$\chi_\varnothing \le_L \Psi(\phi) = \Psi(r\phi), \ \ r \in R^* := R \setminus \{0\}, \ \ \phi \in V_N^q; \tag{4}$$

ниже будем различать в обозначениях образ точки $\Psi(\phi)$ и образ множества $\Psi[\{\phi\}]$.

Теория оператора Релея–Ритца нуждается в очень точном функционально-геометрическом языке, что заставляет нас уделить этому языку особое внимание. Поэтому прежде чем идти дальше, нам будет удобно ввести дополнительную терминологию.

В силу (4) оператор Ψ индуцирует отображение $P\Psi: P_N^q \to L_+(T, R)$, которое, по сложившейся в теории представлений традиции [5, с. 239], назовем *проективизацией* оператора Релея–Ритца:

$$P\Psi(\gamma) := \Psi[\gamma], \ \gamma \in P_N^q \ \ (\gamma \subset V_N^q \setminus \{\mathbf{0}\}),$$

где P_N^q – вещественное проективное пространство, ассоциированное с линейным многообразием V_N^q (с топологией, индуцированной из $L_2(T, U)$); т.е. P_N^q есть множество орбит мультипликативной группы R^*, действующей на $V_N^q \setminus \{\mathbf{0}\}$ ($\mathbf{0}$ – нулевой элемент в V_N^q). В данной геометрической трактовке ключевым моментом являются топологические свойства пространства P_N^q, $\dim P_N^q < \aleph_0$, разумеется, в первую очередь, его компактность, в частности, если $\dim V_N^q = 3$, то 2-многообразие P_N^q устроено как лист Мёбиуса, которому по его границе приклеен круг [12, с. 162]. Попутно отметим, что, на P_N^q можно ввести структуру *CW*-комплекса [12, с. 140], что, в свою очередь, упрощает рассмотрение вопроса о геометрической реализации многообразия P_N^q – теорема 9.7 [12, с. 149].

Теорема 1. *Семейство динамических процессов* $N \subset AC^1(T, X) \times L_2(T, Y)$, $\mathrm{Card}\, N \le \exp \aleph_0$ *представляет пучок управляемых траекторий некоторой линейной (ниже характеризует случай* $q = 1$*), соответственно, билинейной (при* $q = 2$*) дифференциальных систем второго порядка с фиксированным оператором* $\hat{A}$ *и другими соответствующими операторами из* $\mathbb{L}_2$*, в том и только в том случае, когда выполняется какое-нибудь (любое по выбору) из следующих двух условий*:

$$\exists \varphi \in L_2(T, R) : \Psi(\phi) \le_L \varphi, \ \forall \phi \in V_N^q,$$

$$\exists \sup_L P\Psi[P_N^q] : \sup_L P\Psi[P_N^q] \in L_2(T, R).$$

Ниже для дифференциального моделирования (1) ⇒ (2) для нас будет важен следующий частный случай:

Следствие 1. *Пара* $(x, u)\in AC^1(T, X)\times \mathrm{L}_2(T, Y)$ *образует управляемую траекторию ЛДР-системы второго порядка при* $q = 1$ *и БДР-системы второго порядка при* $q = 2$ *с фиксированным оператором* $\hat{A}$ *и другими операторами из пространства* $\mathbb{L}_2$ *тогда и только тогда, когда*

$$\|\hat{A}\, d^2x/dt^2\|_X / (\|dx/dt\|_X^2 + \|x\|_X^2 + \|u\|_Y^2 +$$
$$+ (q-1)\|x\|_X^4 + (q-1)\|x\|_X^2\, \|dx/dt\|_X^2 + (q-1)\|dx/dt\|_X^4\,)^{1/2} \in \mathrm{L}_2(T, R). \tag{5}$$

3. ИТОГОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Начнем с математической предпосылки, которая (с учетом следствия 2) имеет широкое применение в рамках метода последовательных приближений [4, с. 173] (известной как метод Пикара [13, с. 215]), используемого для построения оптимального программного управления по технологии “квазилинеаризации” [4, сс. 168, 174] в решении двухточечной краевой задачи.

Теорема 2. *Пусть пара* $(x, \hat{A}) \in AC^{\,1}(T, X) \times \mathrm{L}_\infty(T, L(X, X))$ *имеет, в качестве представления, некоторую БДР-модель вида*

$$\hat{A}d^2x/dt^2 + A_1dx/dt + A_0x =$$
$$= \mathbb{D}_1(x, x) + \mathbb{D}_2(x, dx/dt) + \mathbb{D}_3(dx/dt, dx/dt),$$

где хотя бы один, или любые два, или все три из билинейных операторов $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3$ *суть ненулевые. Тогда для данной пары* $(x, \hat{A})$ *найдутся (не единственным образом) такие оператор-функции* $\tilde{A}_1, \tilde{A}_0 \in \mathrm{L}_2(T, L(X, X))$, *что осуществима линейная нестационарная реализация*:

$$\hat{A}d^2x/dt^2 + \tilde{A}_1dx/dt + \tilde{A}_0x = 0.$$

Доказательство. Согласно следствию 1 (и её формуле (5)) формулировка теоремы 2 допускает следующую интерпретацию:

$$\|\hat{A}\, d^2x/dt^2\|_X(\|dx/dt\|_X^2 + \|x\|_X^2 + \|x\|_X^4 + \|x\|_X^2\, \|dx/dt\|_X^2 + \|dx/dt\|_X^4\,)^{-1/2} \in \mathrm{L}_2(T, R) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|\hat{A}\, d^2x/dt^2\|_X(\|dx/dt\|_X^2 + \|x\|_X^2\,)^{-1/2} \in \mathrm{L}_2(T, R).$$

С другой стороны, установление этого утверждения вытекает из следующей цепочки отношений:

$$\|\hat{A}\,(t)\, d^2x(t)/dt^2\|_X(\|dx(t)/dt\|_X^2 + \|x(t)\|_X^2 +$$
$$+ \|x(t)\|_X^4 + \|x(t)\|_X^2\, \|dx(t)/dt\|_X^2 + \|dx(t)/dt\|_X^4\,)^{-1/2} =$$
$$= \|\hat{A}\,(t)\, d^2x(t)/dt^2\|_X(\|dx(t)/dt\|_X^2 + \|x(t)\|_X^2\,)^{-1/2}\times$$
$$\times(1 + \|dx(t)/dt\|_X^2 + \|x(t)\|_X^2 - \|x(t)\|_X^2\, \|dx(t)/dt\|_X^2\, (\|dx(t)/dt\|_X^2 + \|x(t)\|_X^2\,)^{-1})^{-1/2} \geq$$
$$\geq \|\hat{A}\,(t)\, d^2x(t)/dt^2\|_X(\|dx(t)/dt\|_X^2 + \|x(t)\|_X^2\,)^{-1/2}\,(1 + \|dx(t)/dt\|_X^2 + \|x(t)\|_X^2\,)^{-1/2} \geq$$
$$\geq \alpha^{-1/2}\|\hat{A}\,(t)\, d^2x(t)/dt^2\|_X(\|dx(t)/dt\|_X^2 + \|x(t)\|_X^2\,)^{-1/2},$$

где (с учетом, что T компакт, а функции $\|dx/dt\|_X^2$, $\|x\|_X^2$ непрерывные) можно принять

$$\alpha = \sup\,\{1 + \|dx(t)/dt\|_X^2 + \|x(t)\|_X^2 : t \in T\} < \infty.$$

Выше также учли, что для $t \mapsto \|x(t)\|_X$, $t \mapsto \|dx(t)/dt\|_X$ имеет место функциональная оценка:

$$\|x(t)\|_X^2\, \|dx(t)/dt\|_X^2\, (\|dx(t)/dt\|_X^2 + \|x(t)\|_X^2\,)^{-1} \leq$$
$$\leq 0{,}25(\|dx(t)/dt\|_X^2 + \|x(t)\|_X^2\,);$$

данное неравенство устанавливается рассуждением, основанным на том утверждении, что вещественная функция двух переменных $(z, y) \mapsto zy(z + y)^{-2}$ в области $\{(z, y)\colon z \geq 0,\, y \geq 0,\, (z, y) \neq (0, 0)\}$ достигает максимума, равного 1/4, в точках диагонали $\{(z, y)\colon z = y,\, (z, y) \neq (0, 0)\}$; технические детали этих рутинных вычислений по существу шаблонны в силу чего их опускаем. ■

Теорему 2 можно расширить (в контексте “локального” решения задачи (2)) на билинейные дифференциальные уравнения с программным управлением:

Следствие 2. *Любая управляемая траектория* $(x^*, u^*) \in \tilde{N}$ *билинейной дифференциальной системы* (1) *имеет, в качестве представления, некоторую ЛДР-модель вида*

$$\hat{A}d^2x^*/dt^2 + A_1dx^*/dt + A_0x^* = Bu^*,$$

$$(A_1, A_0, B) \in \mathbf{L}_2.$$

Доказательство. Установление следствия 2 можно провести модификацией доказательства теоремы 2, но ниже воспользуемся конструкциями леммы 1.

Пусть $(A_1^*, A_0^*, B^*, \mathbb{D}_1^*, \mathbb{D}_2^*, \mathbb{D}_3^*) \in \mathbb{L}_2$ – оператор-функции дифференциальной системы (1). Тогда согласно леммы 1 найдется такая упорядоченная тройка оператор-функций

$$(A_1^{\#}, A_2^{\#}, A_3^{\#}) \in \mathrm{L}_2(T, L(X, X)),$$

для которой будут справедливы следующие функциональные равенства:

$$A_1^* dx^*/dt + A_0^* x^* - B^* u^* - \mathbb{D}_1^*(x^*, x^*) - \mathbb{D}_2^*(x^*, dx^*/dt) - \mathbb{D}_3^*(dx^*/dt, dx^*/dt) =$$

$$= (A_1^* - A_3^{\#})dx^*/dt + (A_0^* - A_1^{\#} - A_2^{\#})x^* - B^* u^*;$$

$$x^*(t) \mapsto \mathbb{D}_1^*(t, y(t), x^*(t)) = A_1^{\#}(t, x^*(t)) \in \mathrm{L}_2(T, X),$$

$$x^*(t) \mapsto \mathbb{D}_2^*(t, z(t), x^*(t)) = A_2^{\#}(t, x^*(t)) \in \mathrm{L}_2(T, X),$$

$$dx^*(t)/dt \mapsto \mathbb{D}_3^*(t, z(t), dx^*(t)/dt) = A_3^{\#}(t, dx^*(t)/dt) \in \mathrm{L}_2(T, X),$$

где $y := x^*$, $z := dx^*/dt$; выше учли, что y, z – суть элементы пространства $\mathrm{L}_\infty(T, X)$.

Ясно, что данные равенства позволяет для фиксированной пары $(x^*, u^*) \in \tilde{N}$ переписать дифференциальное соотношение (1) в ЛДР-редакции. ■

Пусть $\{(x_i, u_i)\}_{i=1,\ldots,n} := \tilde{N}$, тогда, в силу следствия 2, найдется система оператор-функций

$$\{(A_1^i, A_0^i, B_i)\}_{i=1,\ldots,n} \subset \mathbf{L}_2,$$

для которой имеют место следующие аналитические представления:

$$\hat{A}(t)d^2x_1(t)/dt^2 + A_1^1(t)\, dx_1(t)/dt + A_0^1(t)\, x_1(t) = B_1(t)\, u_1(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

$$\hat{A}(t)d^2x_n(t)/dt^2 + A_1^n(t)\, dx_n(t)/dt + A_0^n(t)\, x_n(t) = B_n(t)\, u_n(t).$$

Сопоставим этой системе n функциональных равенств систему из n линейных непрерывных операторов $\{\mathrm{P}_i\}_{i=1,\ldots,n} \subset L(\mathbf{L}_2, \mathrm{L}_1(T, X))$ вида:

$$(A_1, A_0, B) \mapsto \mathrm{P}_1(A_1, A_0, B) := A_1 dx_1/dt + A_0 x_1 - B u_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(A_1, A_0, B) \mapsto \mathrm{P}_n(A_1, A_0, B) := A_1 dx_n/dt + A_0 x_n - B u_n,$$

Теперь основной результат (в контексте разрешимости задачи (2)) вполне очевиден:

Теорема 3. *ЛДР-модель* (2) *существует в том и только в том случае, если*

$$E := \cap\{\mathrm{Ker}\, \mathrm{P}_i + (A_1^i, A_0^i, B_i) : i = 1,\ldots,n\} \neq \varnothing. \tag{6}$$

Данный характеристический признак ЛДР-разрешимости задачи (2) в силу своего геометрического представления позволяет выписать наглядные компактные итоговые соотношения:

Следствие 3. *Если* $E \neq \varnothing$, *то найдется такая тройка оператор-функций* $(A_1, A_0, B) \in \mathbf{L}_2$, *что выполнимы следующие соотношения*

$$E = (A_1, A_0, B) + \cap\{\mathrm{Ker}\, \mathrm{P}_i : i = 1,\ldots,n\},$$

$$\hat{A}d^2x/dt^2 + A_1 dx/dt + A_0 x =$$

$$= Bu + \mathbb{O}(x, x) + \mathbb{O}(x, dx/dt) + \mathbb{O}(dx/dt, dx/dt),\ \forall (x, u) \in \tilde{N}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На всё полезно смотреть с более общей точки зрения, и предмет этой работы – не исключение, поскольку её методологическое содержание состоит в проработке математического языка для выражения одной из самых универсальных естественнонаучных идей – идеи *линейности*. Для этой идеи её важнейшим (центральным) положением является *принцип линейности малых приращений*, когда по существу всякая математическая операция в малом, – почти всегда линейна. Этот принцип лежит в основе всего математического анализа и его многочисленных приложений. К тому же после Эйнштейна стало ясным, что и окружающее физическое пространство приближенно линейно лишь в малой окрестности наблюдателя. К счастью, эта малая окрестность довольно велика, поэтому физика двадцатого века существенно расширила сферу применения идеи линейности, добавив к принципу линейности малых приращений методологию принципа суперпозиции [13, с. 418].

В данном контексте цель настоящей работы – продвижение принципа суперпозиции в область действия билинейных управляемых динамических процессов. Касаясь её аналитических результатов, отметим, что, варьируя индекс $q \in \{1, \ldots, n\}$ при соответствующей модификации конструкции функционального оператора Релея–Ритца и использовании структуры пространства Фока [7], полученные выше результаты несложно распространить на линейное моделирование конечных пучков траекторных кривых n-линейных дифференциальных систем. Однако справедливости ради следует отметить, что использование нелинейного оператора Релея–Ритца в теории дифференциальной реализации ставит не меньше задач чем их решает. В частности, во второй части работы приведем признак (достаточные условия) ЛДР-разрешимости задачи (2), допускающий проверку условия (6) в привязке к свойствам сублинейности [14, с. 400] и непрерывности [15, 16] оператора Релея–Ритца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É.* On solvability of the identification-inverse problem for operator-functions of a nonlinear regulator of a nonstationary hyperbolic system // Advances in Differential Equa-tions and Control Processes. 2015. Vol. 16. No. 2. P. 71-84.
2. *Лакеев, А.В.* К реализации полилинейного регулятора дифференциальной системы второго порядка в гильбертовом пространстве / А.В. Лакеев, Ю.Э. Линке, В.А. Русанов // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53. – № 8. – С. 1098-1109.
3. *Арнольд, В.И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2012. - 381 с.
4. Калман, Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М.: Мир, 1971. – 400 с.
5. *Кириллов, А.А.* Элементы теории представлений / А.А. Кириллов. – М.: Наука, 1978. – 344 с.
6. *Канторович, Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
7. Рид, М. Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ: Пер. с англ. / М. Рид, Б. Саймон. – М.: Мир, 1977. - 360 с.
8. *Rusanov, V.A.* Differential realization of second-order bilinear system: a functional-geometric approach // Advances in Differential Equations and Control Processes 2018. Vol. 19. No. 3. P. 303-321.
9. *Русанов, В.А.* Существование дифференциальной реализации динамической системы в банаховом пространстве в конструкциях расширений до Mp-операторов / В.А. Русанов, А.В. Лакеев, Ю.Э. Линке // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49. – № 3. – С. 358-370.
10. *Rusanov, V.A.* Inverse problem of nonlinear systems analysis: a behavioral approach // Advances in Differential Equations and Control Processes. - 2012. - Vol. 10. – No. 2. – P. 69-88.
11. *Русанов, В.А.* К теории структурной идентификации нелинейных многомерных систем / В.А. Русанов, Д.Ю. Шарпинский // Прикладная математика и механика. – 2010. – Т. 74. – Вып. 1. – С. 119-132.
12. *Прасолов, В.В.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии / В.В. Прасолов. - М.: МЦНМО, 2014. – 359 с.
13. *Фейнман, Р.* Фейнмановские лекции по физике: 1, 2 / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М.: Мир, 1977. – 440 с.
14. *Эдвардс, Р.* Функциональный анализ: Теория и приложения / Р. Эдвардс. - М.: Мир, 1969. – 1072 с.
15. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É.* On the theory differential realization: Criterions for the continuity of the nonlinear Rayleigh-Ritz operator // International Journal of Functional Analysis, Operator Theory and Applications. 2020. Vol. 12. No. 1. P. 1-22.
16. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É.* An inverse problems for nonlinear evolution equations: Criteria of existence of an invariant polylinear controller for a second-order differential system in a Hilbert space // International Journal of Differential Equations. 2021. Vol. 16. No. 1. P. 1-10.
17. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Antonova L.V., Mironov A.S.* Differential realization with a minimum operator norm of a controlled dynamic process // Advances in differrential equations and control processes. 2013. V.11. No 1. P. 1-40.
18. *Данеев, А.В.* К теории реализации сильных дифференциальных моделей . I / А.В. Данеев, А.В. Лакеев, В.А. Русанов, М.В. Русанов. // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – № 1. – С. 53-63.
19. *Данеев, А.В.* К теории реализации сильных дифференциальных моделей. II / А.В. Данеев, А.В. Лакеев, В.А. Русанов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – № 2. – С. 46-56.

ON THE IMPLEMENTATION OF THE SUPERPOSITION PRINCIPLE FOR A FINITE BEAM OF INTEGRAL CURVE OF A SECOND-ORDER BILINEAR SYSTEM. I

© 2022 A.V. Daneev, V.A. Rusanov, P.A. Plesnyov

Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

Based on the projectivization of the non-linear Rayleigh-Ritz functional operator and the tensor product of real Hilbert spaces, for a finite bundle of integral curves of a controlled bilinear system of the second order, neces-sary and sufficient conditions for the existence of a differential realization of this bundle in the class of linear non-stationary ordinary differential equations of the second order are determined (including hyperbolic models) in a separable Hilbert space. In this case, the original bilinear structure models the nonlinearity of the system dynam-ics, both the trajectory itself and the speed of movement on this trajectory. The results obtained have applications in the theory of inverse problems of non-stationary controlled multilinear differential models of higher orders and the theory of optimal control using the technology of successive approximations in solving a two-point boundary value problem based on the quasi-linearization procedure using the Picard method.

Keywords: inverse problems of evolutionary equations, differential realization (linear/bilinear), second-order bilinear dynamical system, tensor product of Hilbert spaces, non-linear Rayleigh-Ritz operator.

DOI: 10.37313/1990-5378-2022-24-1-59-66

REFERENCES

1. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É.* On solvability of the identification-inverse problem for operator-functions of a nonlinear regulator of a nonstationary hyperbolic system // Advances in Differential Equations and Control Pro-cesses. 2015. Vol. 16. No. 2. P. 71-84.
2. *Lakeev, A.V.* K realizacii polilinejnogo regulyatora differencial'noj sistemy vtorogo poryadka v gil'bertovom prostranstve / A.V. Lakeev, YU.E. Linke, V.A. Rusanov // Differencial'nye uravneniya. – 2017. – T. 53. – № 8. – S. 1098-1109.
3. *Arnol'd, V.I.* Geometricheskie metody v teorii obyknovennyh differencial'nyh uravnenij / V.I. Arnol'd. – M.: MCNMO, 2012. – 381 s.
4. *Kalman, R.* Ocherki po matematicheskoj teorii sistem / R. Kalman, P. Falb, M. Arbib. – M.: Mir, 1971. – 400 s.
5. Kirillov, A.A. Elementy teorii predstavlenij / A.A. Kirillov. – M.: Nauka, 1978. – 344 s.
6. *Kantorovich, L.V.* Funkcional'nyj analiz / L.V. Kantorovich, G.P. Akilov. – M.: Nauka, 1977. – 744 s.
7. *Rid, M.* Metody sovremennoj matematicheskoj fiziki. Tom 1. Funkcional'nyj analiz: Per. s angl. / M. Rid, B. Sajmon. – M.: Mir, 1977. – 360 s.
8. *Rusanov, V.A.* Differential realization of second-order bilinear system: a functional-geometric approach // Advances in Differential Equations and Control Processes 2018. Vol. 19. No. 3. P. 303-321.
9. *Rusanov, V.A.* Sushchestvovanie differencial'noj realizacii dinamicheskoj sistemy v banahovom prostran-stve v konstrukciyah rasshirenij do Mp-operatorov / V.A. Rusanov, A.V. Lakeev, YU.E. Linke // Differencial'nye uravneniya. – 2013. – T. 49. – № 3. - C. 358-370.
10. *Rusanov, V.A.* Inverse problem of nonlinear systems analysis: a behavioral approach // Advances in Differ-ential Equa-tions and Control Processes. – 2012. – Vol. 10. – No. 2. – P. 69-88.
11. *Rusanov, V.A.* K teorii strukturnoj identifikacii nelinejnyh mnogomernyh sistem / V.A. Rusanov, D.YU. SHar-pinskij // Prikladnaya matematika i mekhanika. – 2010. – T. 74. – Vyp. 1. – S. 119-132.
12. *Prasolov, V.V.* Elementy kombinatornoj i differencial'noj topologii / V.V. Prasolov. – M.: MCNMO, 2014. – 359 s.
13. *Fejnman, R.* Fejnmanovskie lekcii po fizike: 1, 2 / R. Fejnman, R. Lejton, M. Sends. – M.: Mir, 1977. – 440 s.
14. *Edvards, R.* Funkcional'nyj analiz: Teoriya i prilozheniya / R. Edvards. – M.: Mir, 1969. – 1072 s.
15. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É.* On the theory differential realization: Criterions for the continuity of the nonlinear Rayleigh-Ritz operator // International Journal of Functional Analysis, Operator Theory and Applications. 2020. Vol. 12. No. 1. P. 1-22.
16. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É.* An inverse problems for nonlinear evolution equa-tions: Criteria of existence of an invariant polylinear controller for a second-order differential system in a Hilbert space // International Journal of Differential Equations. 2021. Vol. 16. No. 1. P. 1-10.
17. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Antonova L.V., Mironov A.S.* Differential realization with a minimum operator norm of a controlled dynamic process // Advances in differrential equations and control processes. 2013. V.11. No 1. P. 1-40.
18. *Daneev, A.V.* K teorii realizacii sil'nyh differencial'nyh modelej . I / A.V. Daneev, A.V. Lakeev, V.A. Rusanov, M.V. Rusanov // Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki. – 2005. – № 1. – S. 53-63.
19. *Daneev, A.V.* K teorii realizacii sil'nyh differencial'nyh modelej. II / A.V. Daneev, A.V. Lakeev, V.A. Rusa-nov // Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki. – 2005. – № 2. – S. 46-56.

Aleksey Daneev, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Information Systems and Information Security. E-mail: daneev@mail.ru
Vcheslav Rusanov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor.
Pavel Plesnev, Post-Graduate Student.